Подставив разложение (4.6) в условие (4.3), получим, что функция $\mu(\varepsilon)$ представима в виде ряда по ε. Легко убедиться, что если в равенство (4.6) подставить вместо $\mu(\varepsilon)$ ее разложение, то функция $u(x, y, t)$ будет удовлетворять уравнению (4.4).

В заключение заметим, что изложенный в § 2 метод исследования устойчивости периодического решения позволяет дополнительно сделать вывод о влиянии малых периодических сил на устойчивость стационарного решения. А именно, если $\sigma_0 = 0$ и $\operatorname{Re}\sigma_2 > 0$, то решение попадает из нейтральной области в область неустойчивости.

Автор благодарит И. Б. Симоненко и В. И. Юдовича за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 19 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
2. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, № 2, стр. 13—75.

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Мовсесян (Ереван)

В работе получены преобразования для уравнений импульса и неразрывности одномерных нестационарных движений идеального газа, относительно которых исходная система инвариантна. Это дает возможность наряду с исходной пространственно-временной плоскостью x_1t_1 ввести новую плоскость течения x_2t_2, где сжимаемая жидкость подчиняется иному уравнению состояния, содержащего произвольную функцию частицы [1]. Установленная связь между течениями в обеих пространственно-временных плоскостях позволяет путем простого пересчета находить решение какой-либо задачи в одной из плоскостей по известному решению задачи в другой плоскости.

Наличие произвольной функции частицы в одной из плоскостей позволяет для адиабатических течений ставить в соответствие изоэнтропическому течению течение с постоянной энтропией лишь в частице для специального вида уравнения состояния.

1. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим уравнения Эйлера

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_1 u_1) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь p_1, ρ_1, u_1 — соответственно давление, плотность и скорость движения сжимаемой жидкости, x_1, t_1 — пространственная координата и время.

Нетрудно видеть, что соотношения

$$dx_2 = (1 + \chi\rho_1)\, dx_1 - \chi\rho_1 u_1\, dt_1, \qquad \frac{d\chi}{dt_1} = 0 \tag{1.2}$$

вытекают из уравнения неразрывности и условия сохранения функции χ в частице.

Если $1 + \chi\rho_1 \neq 0$ в исследуемой области плоскости x_1t_1, то функции $x_2(x_1, t_1)$ и $t_2 = t_1$ независимы, так как $D(x_2, t_2) / D(x_1, t_1) = 1 + \chi\rho_1 \neq 0$.

[1] Функция частицы есть функция лагранжевой координаты.

Обозначим

$$p_2 = p_1, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\chi\rho_1}, \quad u_2 = u_1 \tag{1.3}$$

Если в системе (1.1) перейти к новым независимым переменным x_2, t_2, то при наличии (1.3) можно написать аналогичную систему

$$\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t_2} + \rho_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho_2 u_2) = 0 \tag{1.4}$$

Таким образом, движению жидкости с параметрами p_1, ρ_1, u_1 в плоскости *1* $(x_1 t_1)$ соответствует движение другой жидкости с параметрами p_2, ρ_2, u_2 в плоскости *2* $(x_2 t_2)$, при этом переход из плоскости *1* в плоскость *2* осуществляется по формулам (1.2), (1.3). Обратный переход из плоскости *2* в плоскость *1* — по формулам

$$dx_1 = (1 - \chi\rho_2)\, dx_2 + \chi\rho_2 u_2 dt_2 \tag{1.5}$$

$$p_1 = p_2, \quad \rho_1 = \frac{\rho_2}{1-\chi\rho_2}, \quad u_1 = u_2 \tag{1.6}$$

Легко видеть, что для однозначного соответствия плоскостей *1* и *2* необходимо выполнение условий $1 + \chi\rho_1 \neq 0$, $1 - \chi\rho_2 \neq 0$. Из прямых и обратных формул преобразования видно, что обе плоскости равноправны, но не равноценны; это следует из того, что ρ_1 может быть как угодно большим, в то время как $\rho_2 < 1 / \chi$.

2. Линии частиц. Из соответствующих уравнений неразрывности следует, что функции частиц $\psi_1(x_1, t_1)$ и $\psi_2(x_2, t_2)$ связаны с параметрами потоков обеих плоскостей соотношениями

$$\rho_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \rho_1 u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1}, \quad \rho_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad \rho_2 u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial t_2}$$

Исследуемые преобразования позволяют заключить, что если $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$ линии частиц в соответствующих плоскостях, то $\psi_1(x_1, t_1) = \psi_2(x_2, t_2)$, т. е. указанные преобразования переводят линии $\psi_1 = \text{const}$ в плоскости *1* в линии $\psi_2 = \text{const}$ в плоскости *2*. Далее, в соответствующих точках обеих плоскостей углы между касательными к линиям частиц с соответствующими осями координат равны, однако кривизна этих линий в указанных точках различна.

Следует отметить, что линия $\psi_1 = \text{const}$ $[\psi_2 = \text{const}]$, будучи функцией лишь лагранжевой координаты $\xi_1(x_1, t_1)$ $[\xi_2(x_2, t_2)]$, характеризует закон движения каждой частицы, а поэтому каждой фиксированной частице в плоскости *1* соответствует определенная фиксированная частица в плоскости *2*. Следовательно, если χ — функция частицы в плоскости *1*, то в плоскости *2* она имеет тот же смысл.

3. Взаимозависимость решений задач в обеих плоскостях. По известному решению какой-либо задачи в плоскости *1* из соотношений (1.2) может быть определена координата x_2 в функции от x_1, t_1

$$x_2 = \int_L (1 + \chi\rho_1)\, dx_1 - \chi\rho_1 u_1\, dt_1 + m_1 \tag{3.1}$$

где χ, ρ_1, u_1 — известные функции x_1, t_1, а криволинейный интеграл взят по любому контуру L, соединяющему заданные точки плоскости *1*.

Таким образом, из соотношений (1.3) и (3.1) легко может быть найдено решение соответствующей задачи в плоскости *2* в параметрическом виде $p_2 = p_2(x_1, t_1)$, $\rho_2 = \rho_2(x_1, t_1)$, $u_2 = u_2(x_1, t_1)$, $x_2 = x_2(x_1, t_1)$, $t_2 = t_1$. Отсюда, исключив x_1, t_1, можно написать решение задачи в переменных x_2, t_2.

Следовательно, из решения какой-либо задачи в одной из плоскостей путем простого пересчета может быть найдено решение задачи в другой плоскости.

Из условия $u_1 = u_2$ следует, что закон движения поршней в обеих плоскостях один и тот же. Если принять $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\chi > 0$, то $\partial x_2 / \partial x_1 > 0$. Поэтому положительные и отрицательные направления одноименных осей координат совпадают; более того, $x_1 \to \pm\infty$ при $x_2 \to \pm\infty$.

4. Уравнения состояния. Будем предполагать, что в обеих плоскостях движение адиабатическое. За исходную] плоскость, где полностью известно некоторое нестационарное движение жидкости, примем плоскость *1*. Так как в каждой частице энтропия s_1 постоянна, то $s_1 = s_1(\psi_1)$. Поэтому уравнению состояния $p_1 = F(\rho_1, s_1)$ в плоскости *1* будет соответствовать уравнение состояния $p_2 = F\{\rho_2 / [1 - \chi(\psi_2)\rho_2],\ s_1(\psi_2)\}$ в плоскости *2*. В частности, если в плоскости *1* течение изоэнтропическое $[p_1 = F(\rho_1)]$, то наличие в формулах преобразования произвольной функции частицы χ позволяет в плоскости *2* рассматривать постоянство энтропии лишь в частице.

В случае линейной связи $p_1 = c_1^2\rho_1$ (c_1 — скорость звука, постоянная) соответствующее замыкающее уравнение в плоскости *2* выразится зависимостью $p_2 = c_1^2\rho_2 / [1 - \chi(\psi_2)\rho_2]$. Следует отметить, что если $dp_1 / d\rho_1 > 0$, $d^2p_1 / d\rho_1^2 > 0$, то этим свойством обладает и жидкость в плоскости *2*. Легко видеть, что скорости звука для обоих течений связаны формулой $c_2 = [1 + \chi(\psi_2)\rho_1]\, c_1$. Зная решение какой-либо задачи для изоэнтропического движения газа, характеризуемой связью, $p_1 = F(\rho_1)$, можно, тем самым, поставить ему в соответствие решение другой задачи для неизоэнтропического движения газа, характеризуемой связью $p_2 = F(\rho_2 / [1 - \chi(\psi_2)\rho_2])$, для которой задача решается более сложными средствами.

Если связь $p_1 = F_1(\rho_1)$ зафиксирована, то соответствующая ей зависимость $p_2 = F_2(\rho_2, \psi_2)$ будет вполне определенной.

Если вместо (1.3) взять формулы

$$p_2 = \alpha p_1 + \beta, \qquad \rho_2 = \frac{\lambda\rho_1}{1 + \chi\rho_1}, \qquad u_2 = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{1/2} u_1$$

где α, β, λ — произвольные постоянные, то вид системы (1.4) не изменится, поэтому выбором α, β, λ можно аппроксимировать заданную зависимость $p_2 = F_2'(\rho_2, \psi_2)$ функцией $p_2 = F_2(\rho_2, \psi_2, \alpha, \beta, \lambda)$. Так, например, для аппроксимации адиабаты Пуассона $p_2' = \theta(\psi_2)\rho_2'^{\gamma}$ (p_2', ρ_2' — безразмерные) в окрестности некоторого значения ρ_{20}' выберем в плоскости *1* функцию $p_1' = \alpha\exp(-1 / \rho_1')$ (p_1', ρ_1' — безразмерные). Тогда зависимость между p_2' и ρ_2' в плоскости *2* определится функцией

$$p_2' = \theta(\psi_2)\alpha_1\exp(-\beta_1 / \rho_2'), \qquad [\beta_1\chi(\psi_2) = \ln\theta(\psi_2)]$$

Приравнивая значения функций и их первых производных в точке ρ_{20}', можно получить постоянные

$$\alpha_1 = \rho_{20}'^{\,\gamma}\exp\gamma, \qquad \beta_1 = \gamma\rho_{20}'.$$

Следует отметить, что выбранная таким образом аппроксимирующая кривая в любой точке ρ_{20}' будет иметь положительную вторую производную лишь для значений $\gamma > 2$.

Разумеется, адиабату Пуассона можно аппроксимировать не только в окрестности точки, но и в некотором интервале изменения ρ_2'. Например, при $\gamma = 2.7$ $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, в интервале $0.2 \leqslant \rho_2' \leqslant 0.5$ обе кривые почти совпадают, при этом $0.008 \leqslant p_2' \leqslant 0.14$. При $\gamma = 2$ хорошая аппроксимация получается в интервале $0.3 \leqslant \rho_2 \leqslant 0.5$.

5. Течения с ударными волнами. Если в плоскости *1* имеется линия разрыва первого рода гидродинамических величин, то в плоскости *2* можно рассматривать соответствующий образ линии разрыва.

Из условий на ударной волне в плоскости *1*, вытекающих из уравнений импульса и неразрывности [1]

$$\rho_1'(V_1 - u_1')(u_1' - u_1'') = p_1' - p_1'', \qquad \rho_1'(V_1 - u_1') = \rho_1''(V_1 - u_1'') \tag{5.1}$$

и из соотношений (1.5) можно получить условия на ее образе в плоскости *2*

$$\rho_2'(V_2 - u_2')(u_2' - u_2'') = p_2' - p_2'', \quad \rho_2'(V_2 - u_2') = \rho_2''(V_2 - u_2'') \tag{5.2}$$

Величины с одним штрихом отвечают состоянию потока перед ударной волной, с двумя штрихами — за ударной волной; V_1, V_2 — скорости движения ударных волн в плоскостях *1* и *2*, связанные эквивалентными соотношениями

$$V_2 = V_1 + \chi(\psi_2)\rho_1'(V_1 - u_1') = V_1 + \chi(\psi_2)\rho_1''(V_1 - u_1'') \tag{5.3}$$

Если ударные волны в обеих плоскостях распространяются в покоящихся средах ($u_1' = u_2' = 0$, $p_1' = p_1^0$, $\rho_1' = \rho_1^0$), то (5.3) примет более простой вид

$$V_2 = [1 + \chi(\psi_2)\rho_1^0]V_1$$

Формулы (5.2) и (5.3) верны лишь в том случае, когда χ не терпит скачка на ударной волне. В противном случае следует сопоставлять лишь области, лежащие между поршнем и ударной волной, причем, для внешних областей указанные преобразования теряют смысл.

6. **Течение неоднородной сжимаемой жидкости за поршнем.** Пусть в плоскости *2*, где поршень движется по закону $x_2 = -at_2^2/2$ ($a > 0$), сжимаемая жидкость подчиняется уравнению состояния $p_2 = c^2\rho_2/[1 - \chi(\psi_2)\rho_2]$. В плоскости *1* поршень будет двигаться по тому же закону $x_1 = -at_1^2/2$, а газ будет характеризоваться зависимостью $p_1 = c^2\rho_1$.

Если $u_1 = 0$, $p_1 = p_1^0$, $\rho_1 = \rho_1^0$ на характеристике $x_1 = ct_1$, то решение поставленной задачи в плоскости *1* будет [1]

$$u_1 = \sqrt{a^2t^2 + 2ax_1 + c^2} - (c + at_1), \qquad \rho_1 = \rho_1^0 \exp\frac{u_1}{c}, \qquad p_1 = c^2\rho_1$$

$$\chi = E\left(at_1 - \sqrt{a^2t_1^2 + 2ax_1 + c^2} - c\ln\frac{\sqrt{a^2t_1^2 + 2ax_1 + c^2} - c}{c}\right)$$

Здесь E — произвольная функция своего аргумента η, являющаяся общим решением уравнения $d\chi/dt_1 = 0$.

Согласно формуле (3.1), имеем

$$x_2 = x_1 + \rho_1^0\int_L E(\eta)\exp\frac{u_1}{c}\,dx_1 - E(\eta)\,u_1\exp\frac{u_1}{c}\,dt_1 \tag{6.1}$$

На линии $x_1 = ct_1$

$$\eta = c\left(1 + \ln\frac{at_1}{c}\right)$$

Задаваясь тем или иным видом функции $E(\eta) = f(t_1)$ на линии $x_1 = ct_1$, из соотношения (6.1) можно определить первую характеристику $t_2 = t_2(x_2)$ в плоскости *2* (в общем случае криволинейную).

Так как в невозмущенной области плоскости *2* имеем $p_2 = p_2^0$, $u_2 = 0$, то на характеристике $t_2 = t_2(x_2)$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^0}{1 + \chi[t_2(x_2)]\rho_1^0}$$

а это есть начальное распределение плотности в зависимости от x_2.

Таким образом, определены функции $x_2(x_1, t_1)$, $t_2 = t_1$, $u_2(x_1, t_1)$, $p_2(x_1, t_1)$, $\rho_2(x_1, t_1)$, являющиеся решением поставленной задачи в плоскости *2* в параметрическом виде.

За ценные советы и замечания автор признателен Л. И. Седову.

Поступила 12 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. Физматгиз, 1963.