ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА

С. М. Зеньковская (Ростов-на-Дону)

Рассматривается двумерная задача для уравнения Навье — Стокса с условием периодичности функции тока по переменным x, y, t с периодами $2\pi/\alpha_0$, 2π, T соответственно.

В работе [1] исследовано стационарное решение $\psi(y) = -(\gamma/\nu)\cos y$ и доказано, что при $\alpha_0 > 1$ решение устойчиво, а при $\alpha_0 < 1$ и достаточно малом ν устойчивость теряется. Ниже исследуется устойчивость периодического решения

$$\psi_0(y, t) = -\frac{\gamma}{\nu}\cos y\,(1 + \varepsilon \sin \omega t) \qquad \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

близкого к стационарному (ε — достаточно малое положительное число). Заметим, что вместо $\sin \omega t$ можно взять любую функцию $g(t)$, периодическую с периодом T и такую, что

$$\int_0^T g(t)\,dt = 0$$

В самом начале работы сделано замечание, что при $\alpha_0 \geqslant 1$ периодическое решение $\psi_0(y, t)$ устойчиво в «целом». Это утверждение доказывается аналогично тому, как в работе [2] оно доказано для стационарного решения.

Основным результатом работы является доказательство того, что при $\alpha_0 < 1$, достаточно больших значениях параметра $\lambda = \gamma/\nu^2$ и достаточно малом числе ε решение $\psi_0(y, t)$ неустойчиво относительно бесконечно малых возмущений.

При исследовании спектра устойчивости установлено, что если $^1/_2 \leqslant \alpha_0 < 1$, то имеет место простота собственного значения. Решение поставленной задачи производится в следующем плане: задача об устойчивости сводится к решению спектральной задачи (§ 1); для ее решения существенно используется простота собственного значения стационарной задачи (§ 2); исследуется спектр стационарной задачи (§ 3) и дается обоснование метода решения (§ 4).

§ 1. Будем искать решение уравнения Навье — Стокса для функции тока

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \psi_y \Delta\psi_x - \psi_x \Delta\psi_y - \nu\Delta^2\psi = \gamma \cos y + \varepsilon f(y, t) \tag{1.1}$$

с условием периодичности функции тока по x, y, t с периодами $2\pi/\alpha_0$, 2π, T соответственно. Произвольную постоянную в определении функции тока фиксируем условием

$$\int_0^T \int_\Omega \psi(x, y, t)\,dx\,dy\,dt = 0, \qquad \Omega = \{|x| \leqslant \pi/\alpha_0, \quad |y| \leqslant \pi\}$$

В дальнейшем все функции будем считать периодическими по x, y с периодами $2\pi/\alpha_0$, 2π. Функция $f(y, t)$ предполагается, кроме того, периодической по времени с периодом T и удовлетворяет условию

$$\int_0^T f(y, t)\,dt = 0$$

Пусть функция $f(y, t)$ имеет вид

$$f(y, t) = \gamma \cos y\left(\sin \omega t + \frac{\omega}{\nu}\cos \omega t\right)$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение

$$\psi_0(y, t) = -\frac{\gamma}{\nu}\cos y\,(1 + \varepsilon \sin \omega t) \tag{1.2}$$

Исследуем устойчивость этого решения. Положим в уравнении (1.1) функцию $\psi(x, y, t) = \psi_0(y, t) + \Phi(x, y, t)$. Тогда функция $\Phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial t} + \Phi_y \Delta\Phi_x - \Phi_x \Delta\Phi_y + \frac{\gamma}{\nu} \sin y \,(1 + \varepsilon \sin \omega t)\,(\Delta\Phi_x + \Phi_x) - \nu\Delta^2\Phi = 0 \qquad (1.3)$$

Отметим, что если $\alpha_0 \geqslant 1$, то периодическое решение устойчиво в целом (т. е. при любых возмущениях $\Phi(x, y, t)$ и любых параметрах ν, γ, ε). Доказательство этого факта проводится, так же как в [2], для стационарного решения.

Далее решаем линеаризованную задачу

$$\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial t} + \frac{\gamma}{\nu} \sin y\,(1 + \varepsilon \sin \omega t)\,(\Delta\Phi_x + \Phi_x) - \nu\Delta^2\Phi = 0 \qquad (1.4)$$

По аналогии с методом Флоке для обыкновенных дифференциальных уравнений будем искать решение уравнения (1.4) в виде

$$\Phi(x, y, t) = e^{\sigma t} \varphi(x, y, t)$$

Здесь $\varphi(x, y, t)$ — периодическая функция времени с периодом $T = 2\pi / \omega$.

Решение $\psi_0(y, t)$ неустойчиво, если найдется хотя бы одно собственное значение σ с положительной вещественной частью. Таким образом, задача об устойчивости свелась к спектральной задаче

$$A\varphi \equiv \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} + \sigma\Delta\varphi + \frac{\gamma}{\nu} \sin y\,(1 + \varepsilon \sin \omega t)\,(\Delta\varphi_x + \varphi_x) - \nu\Delta^2\varphi = 0 \qquad (1.5)$$

§ 2. Построим решение спектральной задачи. Введем гильбертово пространство H_2 как замыкание множества гладких периодических функций, удовлетворяющих условиям

$$u(-x, -y) = u(x, y), \qquad \int_\Omega u(x, y)\,dx\,dy = 0$$

по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{H_2} = \int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx\,dy$$

Через H_2' обозначим гильбертово пространство функций от x, y, t, принадлежащих при почти всех t пространству H_2, периодических по t с периодом T. Скалярное произведение в H_2' вводится следующим образом:

$$(u, v)_{H'_2} = \int_0^T (u, v)_{H_2} dt$$

Через H_2^α (α — любое положительное число) обозначим подпространство пространства H_2', состоящее из функций вида

$$e^{i\alpha x} g(y, t) + e^{-i\alpha x} g^*(y, t)$$

Здесь функция $g(y, t)$ — периодическая по y с периодом 2π. Пространство H_2' распадается на прямую сумму подпространств $H_2^{k\alpha_0}$ ($k = 1, 2, \ldots$). Каждое из этих подпространств инвариантно относительно оператора A, поэтому исследование спектра задачи (1.5) сводится к исследованию его в пространствах H_2^α ($\alpha = k\alpha_0$, $k = 1, 2, \ldots$).

Покажем, как, отправляясь от собственного значения σ_0 и соответствующей ему собственной функции $\varphi_0(x, y) \in H_2^\alpha$, в предположении простоты σ_0, можно найти собственные значения и собственные функции уравнения (1.5). Будем искать неизвестные σ и $\varphi(x, y, t) \in H_2^\alpha$ в виде рядов по ε:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \varepsilon^k, \qquad \varphi(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \varepsilon^k \qquad (2.1)$$

Сходимость этих рядов будет доказана в § 4. Подставляя ряды (2.1) в уравнение (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему уравнений для определения неизвестных σ_k, φ_k. Покажем, как они последовательно находятся. Для определения σ_0 и функции φ_0 получаем уравнение

$$\frac{\partial \Delta\varphi_0}{\partial t} + \sigma_0\Delta\varphi_0 + \frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_0 + \varphi_0) - \nu\Delta^2\varphi_0 = 0 \qquad (2.2)$$

которое соответствует стационарному случаю и было рассмотрено в [1]. Неизвестные σ_1 и φ_1 определяются из уравнения

$$\frac{\partial \Delta\varphi_1}{\partial t} + \sigma_0\Delta\varphi_1 + \frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_1 + \varphi_1) - \nu\Delta^2\varphi_1 =$$
$$= -\sigma_1\Delta\varphi_0 - \frac{\gamma}{\nu}\sin y\sin\omega t\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_0 + \varphi_0) \qquad (2.3)$$

Будем искать функцию $\varphi_1(x, y, t)$ в виде

$$\varphi_1(x, y, t) = u_1(x, y) + e^{i\omega t}v_1(x, y) + e^{-i\omega t}v_1^*(x, y)$$

Тогда для определения функции u_1 получаем уравнение

$$Lu_1 \equiv \sigma_0\Delta u_1 + \frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_1 + u_1) - \nu\Delta^2 u_1 = -\sigma_1\Delta\varphi_0 \qquad (2.4)$$

Для разрешимости уравнения (2.4) необходимо выполнение условия ортогональности

$$\int_\Omega(-\sigma_1\Delta\varphi_0)\tau_0\,dx\,dy = 0$$

Здесь τ_0 — решение сопряженного уравнения

$$L^*\tau_0 \equiv \sigma_0\Delta\tau_0 - \frac{\gamma}{\nu}(1 + \Delta)\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\sin y) - \nu\Delta^2\varphi = 0$$

Из простоты собственного значения σ_0 следует:

$$\int_\Omega\Delta\varphi_0\tau_0\,dx\,dy \neq 0$$

Тогда $\sigma_1 = 0$, а функция $u_1(x, y)$ определяется из того же уравнения, что и $\varphi_0(x, y)$. Функция $v_1(x, y)$ определяется из уравнения

$$(\sigma_0 + i\omega)\Delta v_1 + \frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\Delta v_1 + v_1) - \nu\Delta^2 v_1 = -\frac{1}{2i}\frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_0 + \varphi_0) \qquad (2.5)$$

В работе [1] доказано, что собственное значение σ при условии $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 0$ вещественно. Следовательно, значение $\sigma_0 + i\omega$ не есть собственное, поэтому уравнение (2.5) разрешимо. Функцию $v_1(x, y)$ следует искать в виде ряда Фурье

$$v_1(x, y) = e^{i\alpha x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{iny} + e^{-i\alpha x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n a_n e^{iny} \qquad (a_{-n} = (-1)^n a_n)$$

Тогда для a_n получается бесконечная неоднородная система типа

$$c_n a_n + a_{n-1} - a_{n+1} = b_n \qquad (n=0, \pm1, \ldots),$$

которую можно решить приближенно. Далее находим значение σ_2 и функцию φ_2 из уравнения

$$\frac{\partial\Delta\varphi_2}{\partial t} + L\varphi_2 = -\sigma_2\Delta\varphi_0 - \frac{\gamma}{\nu}\sin y\sin\omega t\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_1 + \varphi_1)$$

Функцию φ_2 ищем в виде

$$\varphi_2(x, y, t) = u_2(x, y) + e^{i\omega t}v_2(x, y) + e^{-i\omega t}v_2^*(x, y)$$

Функция $u_2(x, y)$ определяется из уравнения

$$Lu_2 = -\sigma_2\Delta\varphi_0 + \frac{\gamma}{\nu}\sin y\,\operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Delta v_1 + v_1)\right]$$

для разрешимости которого необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\Omega}\left\{-\sigma_2\Delta\varphi_0+\frac{\gamma}{\nu}\sin y\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Delta v_1+v_1)\right]\right\}\tau_0\,dx\,dy=0$$

Отсюда находим σ_2, которое уже, вообще говоря, не равно нулю. Аналогичным образом последовательно находятся остальные неизвестные σ_k и φ_k, причем на каждом этапе встречаются уже рассмотренные уравнения.

§ 3. Исследуем спектр стационарной задачи. Вначале заметим, что если собственное значение $\sigma_0 \geqslant 0$ задачи (2.2) простое в классе стационарных решений, то оно будет простым и в классе периодических решений. В самом деле, будем искать решение уравнения (2.2) периодическое по времени с периодом T в виде ряда Фурье

$$\varphi_0(x, y, t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x, y)\,e^{ik\omega t}$$

Функции $u_k(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\sigma_0+ik\omega)\,\Delta u_k+\frac{\gamma}{\nu}\sin y\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_k+u_k)-\nu\Delta^2u_k=0 \qquad (k=0, 1, \ldots)$$

Но, как показано в работе [1], величина $\sigma_0 \geqslant 0$ может быть собственным числом этой задачи только при $k=0$. Отсутствие присоединенных векторов в классе периодических решений следует из отсутствия присоединенных векторов в классе стационарных.

1. Покажем, что в каждом из подпространств $H_2^{\alpha}(0<\alpha<1)$ положительное собственное значение σ_0 единственное и простое.

Собственные функции $\varphi_0(x, y)\in H_2^{\alpha}$ уравнения $L\varphi_0=0$ следует искать в виде

$$\varphi_0(x, y)=e^{i\alpha x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{iny}+e^{-i\alpha x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nc_ne^{iny} \tag{3.1}$$

где коэффициенты c_n удовлетворяют условию $c_{-n}=(-1)^nc_n$.

Тогда, как показано в [1], собственное значение σ_0 определяется из уравнения

$$-\frac{a_0}{2}=\frac{1}{a_1+\dfrac{1}{a_2+\ldots}}\equiv f(\mu, \lambda, \alpha) \tag{3.2}$$

в котором использованы следующие обозначения:

$$\mu=\frac{\sigma_0}{\nu}, \qquad \lambda=\frac{\gamma}{\nu^2}, \qquad a_n=\frac{2}{\lambda}\frac{(\alpha^2+n^2)(\alpha^2+n^2+\mu)}{\alpha(\alpha^2-1+n^2)} \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

Ищем неотрицательные корни уравнения (3.2). Легко убедиться, что если $\alpha\geqslant 1$, то неотрицательных корней нет.

Лемма 3. 1. Функция $\lambda f(\mu, \lambda, \alpha)$ монотонно возрастает по λ.

Доказательство. Имеем

$$\lambda f(\mu, \lambda, \alpha)\equiv\frac{1}{\lambda^{-1}a_1+\dfrac{1}{\lambda a_2+\ldots}}$$

Когда λ возрастет, члены этой цепной дроби с нечетными номерами убывают, а с четными — не меняются, отсюда следует справедливость леммы.

Лемма 3. 2. Функция $a_0^{-1}f(\mu, \lambda, \alpha)$ монотонно возрастает по μ $(\mu>0)$.

Доказательство. Имеем

$$a_0^{-1}f(\mu, \lambda, \alpha)\equiv\frac{1}{a_0a_1+\dfrac{1}{a_0^{-1}a_2+\ldots}}$$

Члены с нечетными номерами имеют вид

$$a_0 a_n = \frac{4}{\lambda^2} \frac{(\alpha^2+\mu)\,[(\alpha^2+n^2)^2+\mu\,(\alpha^2+n^2)]}{(\alpha^2-1)(\alpha^2-1+n^2)} < 0 \qquad (n = 1, 3, \ldots)$$

Очевидно, они убывают, когда μ возрастает ($\mu > 0$). Члены с четными номерами имеют вид

$$a_0^{-1} a_n = \frac{(\alpha^2+n^2)(\alpha^2+n^2+\mu)(\alpha^2-1)}{\alpha^2(\alpha^2-1+n^2)(\alpha^2+\mu)} \qquad (n = 2, 4, \ldots)$$

Легко убедиться, что производная $\partial(a_0^{-1}a_n)\,/\,\partial\mu > 0$. Значит, цепная дробь возрастает по $\mu > 0$.

Лемма 3. 3. Если $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \geqslant \lambda_0$, где λ_0 — решение уравнения (3.2) при $\mu = 0$, то существует корень $\mu \geqslant 0$ уравнения (3.2) и притом только один.

Доказательство. а) Если $\mu \to +\infty$, то $-{}^1\!/_2 a_0 \to +\infty$. Для функции $f(\mu, \lambda, \alpha)$ справедлива оценка

$$f \leqslant \frac{1}{a_1} = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha^3}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+1+\mu)}$$

Следовательно, при $\mu \to +\infty$ имеет место неравенство

$$-{}^1\!/_2 a_0 > f(\mu, \lambda, \alpha) \tag{3.3}$$

б) Покажем, что при малых μ имеет место противоположное неравенство. В [2] доказано существование такого $\lambda = \lambda_0$, при котором $\mu = 0$ будет корнем уравнения (3.2), т. е. имеет место равенство

$$\frac{\alpha^3}{1-\alpha^2} = \lambda_0 f(0, \lambda_0, \alpha)$$

Функция $\lambda f(\mu, \lambda, \alpha)$ монотонно возрастает по λ (лемма 3.1), поэтому при $\lambda \geqslant \lambda_0$ и малых значениях $\mu \geqslant 0$ имеем неравенство

$$-\frac{a_0}{2} \leqslant f(\mu, \lambda, \alpha) \tag{3.4}$$

Сопоставляя оценки (3.3) и (3.4), можно сделать вывод о существовании корня $\mu \geqslant 0$ уравнения (3.2). Единственность его при фиксированном α следует из леммы 3.2.

Чтобы окончательно установить простоту собственного значения в пространстве H_2^{α}, необходимо доказать отсутствие присоединенных векторов. Для этого нужно показать, что уравнение $L\varphi = -\Delta\varphi_0$ не имеет решения. Для разрешимости этого уравнения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\theta \equiv -\int_{\Omega} \Delta\varphi_0 \tau_0 \, dx\, dy = 0$$

где τ_0 — решение сопряженного уравнения. Покажем, что $\theta > 0$. Собственные функции $\varphi_0(x, y)$ имеют вид (3.1), а сопряженного уравнения $\tau_0(x, y)$ имеют вид

$$\tau_0(x, y) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{iny} + e^{-i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n d_n e^{iny}, \qquad d_{-n} = (-1)^n d_n$$

Непосредственно проверяется, что между коэффициентами c_n и d_n имеет место соотношение $d_n = (-1)^{n-1}(\alpha^2 + n^2 - 1)\, c_n$. Тогда получаем

$$\theta = 2\,|\Omega| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} (\alpha^2+n^2)(\alpha^2+n^2-1)\, c_n^2 \tag{3.5}$$

Покажем, что $\theta > 0$, для этого установим еще одно равенство. Умножая уравнение (2.2) на функцию $\Delta\varphi_0 + \varphi_0$ и интегрируя по области Ω, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha^2+n^2)^2 (\alpha^2+n^2-1)\, c_n^2 + \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha^2+n^2)(\alpha^2+n^2-1)\, c_n^2 = 0 \tag{3.6}$$

Умножим равенство (3.6) на $(\alpha^2+\mu)^{-1}$, прибавим к равенству (3.5) и получим

$$\theta = 2|\Omega| \sum_{n\neq 0} (\alpha^2+n^2)(\alpha^2+n^2-1)\left[(-1)^{n-1}+1+\frac{n^2}{\alpha^2+\mu}\right]c_n^2 > 0$$

2. Если $1/2 \leqslant \alpha_0 < 1$, то $\mu(\alpha_0)$ — единственное простое собственное число в пространстве H_2'.

В самом деле, собственное значение $\mu(\alpha_0)$ простое в пространстве $H^{2\alpha_0}$, в других пространствах $H_2^{k\alpha_0}$ $(k \geqslant 2)$ собственных функций, соответствующих $\mu(\alpha_0)$, нет.

§ 4. Приводим обоснование метода решения спектральной задачи. Покажем, что при достаточно малом ε ряды (2.1) сходятся. В уравнении (1.5) обратим оператор

$$B \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Delta - \nu\Delta^2$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$\varphi + K\varphi + \varepsilon K_1\varphi = \sigma K_2\varphi \tag{4.1}$$

$$K \equiv \frac{\gamma}{\nu} B^{-1}\sin y \frac{\partial}{\partial x}(\Delta+1), \qquad K_1 \equiv \sin\omega t K, \qquad K_2 \equiv -B^{-1}\Delta$$

Операторы K, K_1, K_2, действующие в H_2', вначале определены на гладких функциях, а затем продолжены по непрерывности на все пространство H_2'.

Если для обращения оператора B воспользоваться, например, рядами Фурье по переменным x, y, t, то можно легко убедиться, что операторы K, K_1, K_2 вполне непрерывны в H_2'.

При $\varepsilon = 0$ известны [1] собственное значение σ_0 и собственная функция $\varphi_0(x, y)$, причем, σ_0 — простое собственное число. Нормируем собственные функции уравнения (4.1) условием $(\varphi, \tau_0)_{H_2'} = 1$. Неизвестные будем искать в виде

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + u(x, y, t), \qquad \sigma = \sigma_0 + \mu$$

Тогда неизвестные $u(x, y, t)$ и μ должны удовлетворять уравнению

$$Du \equiv u + Ku - \sigma_0 K_2 u = \mu K_2 u + \mu K_2\varphi_0 - \varepsilon K_1 u - \varepsilon K_1\varphi_0 \tag{4.2}$$

Для функции $u(x, y, t)$ должно выполняться условие

$$(u, \tau_0)_{H_2'} = 0.$$

Далее обоснование проводится при помощи уравнения разветвления [3].

Для разрешимости уравнения (4.2) необходимо и достаточно выполнения условия ортогональности

$$(\mu K_2 u + \mu K_2\varphi_0 - \varepsilon K_1 u - \varepsilon K_1\varphi_0, \tau_0)_{H_2'} = 0 \tag{4.3}$$

Введем оператор R $(H_2' \to H_2')$ такой, что $DRf = f$, если $(f, \tau_0)_{H_2'} = 0$. Тогда из уравнения (4.2) имеем

$$u - \mu RK_2 u + \varepsilon RK_1 u = \mu RK_2\varphi_0 - \varepsilon RK_1\varphi_0 \tag{4.4}$$

Применяя к уравнению (4.4) принцип сжатых отображений, заключаем, что при ε, μ столь малых, что

$$\|\mu RK_2 - \varepsilon RK_1\|_{H_2'} < 1 \tag{4.5}$$

существует единственное решение $u(x, y, t)$ уравнения (4.4)

$$u(x, y, t) = (1 - \mu RK_2 + \varepsilon RK_1)^{-1}(\mu RK_2\varphi_0 - \varepsilon RK_1\varphi_0) \tag{4.6}$$

Из этого равенства видно, что функция $u(x, y, t)$ разлагается в ряд по степеням ε, μ. Подставив разложение (4.6) в условие (4.3), получим уравнение $F(\mu, \varepsilon) = 0$, где F — аналитическая функция, причем имеет место соотношение

$$\frac{\partial F(0, 0)}{\partial\mu} = (K_2\varphi_0, \tau_0)_{H_2'} \neq 0$$

Подставив разложение (4.6) в условие (4.3), получим, что функция $\mu(\varepsilon)$ представима в виде ряда по ε. Легко убедиться, что если в равенство (4.6) подставить вместо $\mu(\varepsilon)$ ее разложение, то функция $u(x, y, t)$ будет удовлетворять уравнению (4.4).

В заключение заметим, что изложенный в § 2 метод исследования устойчивости периодического решения позволяет дополнительно сделать вывод о влиянии малых периодических сил на устойчивость стационарного решения. А именно, если $\sigma_0 = 0$ и $\operatorname{Re}\sigma_2 > 0$, то решение попадает из нейтральной области в область неустойчивости.

Автор благодарит И. Б. Симоненко и В. И. Юдовича за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 19 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
2. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, № 2, стр. 13—75.

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Мовсесян (Ереван)

В работе получены преобразования для уравнений импульса и неразрывности одномерных нестационарных движений идеального газа, относительно которых исходная система инвариантна. Это дает возможность наряду с исходной пространственно-временной плоскостью x_1t_1 ввести новую плоскость течения x_2t_2, где сжимаемая жидкость подчиняется иному уравнению состояния, содержащего произвольную функцию частицы [1]. Установленная связь между течениями в обеих пространственно-временных плоскостях позволяет путем простого пересчета находить решение какой-либо задачи в одной из плоскостей по известному решению задачи в другой плоскости.

Наличие произвольной функции частицы в одной из плоскостей позволяет для адиабатических течений ставить в соответствие изоэнтропическому течению течение с постоянной энтропией лишь в частице для специального вида уравнения состояния.

1. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим уравнения Эйлера

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_1 u_1) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь p_1, ρ_1, u_1 — соответственно давление, плотность и скорость движения сжимаемой жидкости, x_1, t_1 — пространственная координата и время.

Нетрудно видеть, что соотношения

$$dx_2 = (1 + \chi\rho_1)\,dx_1 - \chi\rho_1 u_1\,dt_1, \qquad \frac{d\chi}{dt_1} = 0 \tag{1.2}$$

вытекают из уравнения неразрывности и условия сохранения функции χ в частице.

Если $1 + \chi\rho_1 \neq 0$ в исследуемой области плоскости x_1t_1, то функции $x_2(x_1, t_1)$ и $t_2 = t_1$ независимы, так как $D(x_2, t_2) / D(x_1, t_1) = 1 + \chi\rho_1 \neq 0$.

[1] Функция частицы есть функция лагранжевой координаты.