Каждый корень β_n уравнения (19) соответствует комплексно-сопряженной паре, образовавшейся в результате слияния двух соседних вещественных уровней спектра. Для $k = 1$, например, получаем: $\beta = 3.632$, 6.883, 10.07, $13.24\ldots$ и, соответственно, $\delta = 1{,}382$, 1.644, 1.819, $1.948\ldots$ Для $k = 4$ имеем: $\beta = 3.338$, 6.624, 9.860, $13.07\ldots$ и $\delta = 4.043$, 4.137, 4.239, $4.331\ldots$ Вещественная и мнимая части декрементов в области больших R могут быть найдены в соответствии с (13)

$$\lambda_r = (k^2 + \beta^2 - \delta^2) + \delta R, \qquad \lambda_i = \pm (R - 2\delta)\,\beta \tag{20}$$

Интересно заметить, что асимптотические формулы (20) хорошо описывают всю комплексную область спектра. В частности, значения числа Рейнольдса R_*, при которых возникают колебательные возмущения (в этой точке $\lambda_i = 0$), могут быть достаточно точно найдены по формуле $R_* = 2\delta$, вытекающей из (20). На фиг. 2 приведены линии тока возмущений в плоском случае ($k_2 = 0$, $k = k_1 = 1$) для фиксированного момента времени. На фигурах изображена картина движения в интервале значений координаты x, равном половине длины волны возмущения. Фиг. 2, *а* — *г* соответствуют затухающим монотонным возмущениям для различных уровней спектра при $R = 1$ (значения параметров R и λ_r, которым соответствуют эти фигуры, отмечены на фиг. 1 точками). Фиг. 2, *д*, *е* изображают линии тока затухающих колебательных возмущений

$$\operatorname{Re} \psi(x, z) = \mathrm{const}$$

(ψ — комплексная функция тока) для первой (фиг. 2, *д*) и второй (фиг. 2, *е*) — в порядке возрастания λ_r — пары слившихся уровней при $R = 19$.

С ростом номера уровня структура собственных функций усложняется. Отметим также эффект «сдувания» возмущений поперечным потоком.

Поступила 1 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

В. А. Кондратьев (Москва)

В работе рассматривается решение уравнения

$$\Delta\Delta u + a\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + b\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = f \tag{1}$$

в области G, граница которой Γ всюду, кроме начала координат, гладкая, а в некоторой окрестности начала координат состоит из двух прямолинейных отрезков l_1, l_2 длины a_0, пересекающихся под углом ω ($\omega \leqslant 2\pi$).

Коэффициенты a, b, входящие в уравнение (1), постоянные. Решение $U(x, y)$ предполагается имеющим первые производные, непрерывные в замкнутой области G, обращающимся на Γ в нуль вместе с нормальной производной всюду, кроме, быть может, начала координат.

Введем некоторые обозначения. Функция v принадлежит пространству H_α^{0k}, если конечны интегралы

$$\iint_{6} r^{\alpha - 2(k_1+k_2)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} v}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right|^2 dx dy, \qquad k_1 + k_2 \leqslant k$$

(r — расстояние до начала координат).

Через $\|v\|_{k\alpha}^2$ обозначим сумму всех таких интегралов. Функция $v \in C_m$, если она имеет m непрерывных производных в замкнутой области G. В силу предположений искомое решение принадлежит C_1 и, кроме того, $u \in H_{-2+\beta}^{01}$ при всех $\beta > 0$.

Покажем, что такое решение в окрестности начала имеет асимптотику вида

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{j_k} r^{-i\lambda_k} \ln^j r \psi_{kj} (\varphi) \tag{2}$$

Здесь λ_k — некоторый набор комплексных чисел таких, что $\operatorname{Im} \lambda_k > 1$, ψ_{kj} — бесконечно дифференцируемые функции, φ полярный угол.

Будем использовать некоторые факты, известные для линейных эллиптических уравнений. Обозначим через S_a^p область, граница которой состоит из дуг $r = a/p$, $r = ap$ и отрезков $\varphi = 0$, $\varphi = \omega$. Пусть функция v удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta v + \sum_{i,\,k=0}^{3} a_{ik}(x, y) \frac{\partial^k v}{\partial x^i \partial y^{k-i}} = F \tag{3}$$

где функции a_{ik} имеют q непрерывных в S_2^4 производных

$$v(0, r) = \frac{\partial v(0, r)}{\partial \varphi} = v(\omega, r) = \frac{\partial v(\omega, r)}{\partial \varphi} = 0 \tag{4}$$

Тогда

$$\iint_{S_2^2} \left| \frac{\partial^{p_1+p_2} v}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}} \right|^2 dxdy \leqslant c \left[\sum_{q_1+q_2=0}^{q} \iint_{S_2^4} \left| \frac{\partial^{q_1+q_2} f}{\partial x^{q_1} \partial y^{q_2}} \right|^2 + |v|^2 dxdy \right], \quad p_1 + p_2 \leqslant q + 4$$

Имеет место следующее утверждение [1] о решении уравнения (3). Если

$$a_{ik} = 0, \qquad u \in H^{\circ k}_{\alpha} \qquad F \in H^{\circ k_1}_{\alpha_1}$$

$$u(0, r) = u(\omega, r) = u_\varphi(0, r) = u_\varphi(\omega, r), \qquad 0 \leqslant k \leqslant k_j \tag{5}$$

то

$$u = \sum_{j=0}^{M} \sum_{k=0}^{k_j} r^{-i\lambda_j} \ln^k r \psi_{k_j}(\varphi) + u_1, \qquad u_1 \in H_{\alpha_1}^{\circ k_1+4}$$

Здесь числа λ_j — нули кратности k_j функции $R(\lambda)$, заключенные в полосе

$$1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < k_1 + 3 - 1/2\,\alpha_1$$

Функция $R(\lambda)$ строится так. В бесконечной области Γ_0 $(0 < \varphi < \omega)$ рассматривается краевая задача

$$\Delta\Delta u = 0, \qquad u(0, r) = u_\varphi(0, r) = u(\omega, r) = u_\varphi(\omega, r) = 0 \tag{6}$$

В полярных координатах эти соотношения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0,\ \varphi=\omega} = 0 \tag{7}$$

После замены $t = \ln(1/r)$ получаем

$$u_{tttt} + 2u_{tt\varphi\varphi} + u_{\varphi\varphi\varphi\varphi} - 4u_{ttt} - 4u_{t\varphi\varphi} + 4u_{tt} + 4u_{\varphi\varphi} = 0$$

Теперь сделаем преобразование Фурье по t и получим краевую задачу

$$u_{\varphi\varphi\varphi\varphi} - 2\lambda^2 u_{\varphi\varphi} + \lambda^4 u + 4iu - 4iu_{\varphi\varphi} - 4\lambda^2 u + 4u_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$u(0) = u'(0) = u(\omega) = u'(\omega) = 0$$

Числа λ_j есть ее собственные значения, а ψ_j — ее собственные функции. Найдем все значения λ_j. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u = C_1 \cos i\lambda\varphi + C_2 \sin i\lambda\varphi + C_3 \sin(i\lambda + 2)\varphi + C_4 \cos(i\lambda + 2)\varphi, \quad \lambda \neq 0, \quad i, \quad 2i \tag{8}$$

Условия (6) выполняются, если обращается в нуль определитель

$$R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \cos i\lambda\omega & 0 & -i\lambda \sin i\lambda\omega \\ 0 & \sin i\lambda\omega & i\lambda & i\lambda \cos i\lambda\omega \\ 0 & \sin(i\lambda + 2\omega) & i\lambda + 2 & (i\lambda + 2)\cos(i\lambda + 2)\omega \\ 1 & \cos(i\lambda + 2)\omega & 0 & (-i\lambda + 2)\sin(i\lambda + 2)\omega \end{vmatrix} \tag{9}$$

После элементарных преобразований уравнение (9) приводится к виду:

$$R(\lambda) = 2i\lambda(i\lambda+2) - 2i\lambda(i\lambda+2)\cos i\lambda\omega\cos(i\lambda+2)\omega - \\ - [(i\lambda+2)^2+(i\lambda)^2]\sin i\lambda\omega\sin(i\lambda+2)\omega = 0 \qquad (10)$$

Сделав замену $z = i\lambda + 1$, получим для z уравнение

$$\sin^2\omega z - z^2\sin^2\omega = 0 \qquad (11)$$

Таким образом, в разложении (4) числами λ_j будут числа $i(z+1)$, где z — корни уравнения (11). Надо еще рассмотреть решение уравнения (7) в случаях $\lambda = 2i$, $\lambda = i$, т. е. когда общее решение отлично от (8).

Если $\lambda = 2i$, то общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u = C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi + C_3\varphi + C_4$$

Функция u удовлетворяет краевым условиям, если

$$C_2 + C_4 = 0, \qquad C_1\sin 2\omega + C_2\cos 2\omega + C_3\omega + C_4 = 0$$
$$2C_1 + C_3 = 0, \qquad 2C_1\cos 2\omega - 2C_2\sin 2\omega + C_3 = 0$$

Если определитель этой системы $\sin\omega(\sin\omega - \omega\cos\omega) \neq 0$, то краевым условиям может удовлетворять только нулевое решение. Таким образом, показателями λ_j в разложении (4) будут числа $i(z+1)$, где z — корни уравнения (9), исключая $\lambda = 2i$, если $\sin\omega(\sin\omega - \omega\cos\omega) \neq 0$. В случае же, когда $\sin^2\omega = \omega\sin\omega\cos\omega$, число $\lambda = 2i$ в разложении (4) участвует.

Переходим к изучению нелинейного уравнения (1). Придется рассмотреть уравнение более общего вида

$$L_0 u = \Delta\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\Delta u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}u = f \qquad (12)$$

Здесь a_{ij} — функции вида

$$a_{ij} = \sum_{s=0}^{p}\sum_{k=0}^{k_s} r^{\mu_s}\ln^k r\, a_{skij}(\varphi), \qquad \operatorname{Re}\mu_s > i+j-4$$

а a_{skij} — бесконечно дифференцируемые функции полярного угла. Докажем ряд лемм о решениях уравнения (12)

Лемма 1. Пусть u — решение уравнения (12) принадлежит $H^{\circ\circ}_\alpha$ и C_p; причем

$$u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \qquad f \in H_\beta^{\circ s}, \qquad \beta \geqslant \alpha + 2s + 8$$

Тогда

$$u \in H_\beta^{\circ s+4}$$

Доказательство. Выберем число a_0 настолько малым, чтобы при $r < a_0$ граница G состояла из прямолинейных отрезков. Рассмотрим область E_n

$$a_0/2^{n+1} \leqslant r \leqslant a_0/2^{n-1}$$

Сделаем преобразование координат $x = (a_0/2^n)x'$, $y = (a_0/2^n)y'$. Уравнение (12) примет вид

$$\Delta\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial\Delta u}{\partial y'} + b\frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial\Delta u}{\partial x'} + a_{ij}'\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x'^i\partial y'^j} = f a_0^4/2^{4n}$$

Применяя к u неравенство (3), получаем

$$\iint_{E_1}\left|\frac{\partial^{p_1+p_2}u}{\partial x'^{p_1}\partial y'^{p_2}}\right|^2 dx'dy' \leqslant c\left[\iint_{E_2}\left|\frac{\partial^{q_1+q_2}f}{\partial x'^{q_1}\partial y'^{q_2}}\right|^2 a_0^8/2^{8n} + |u|^2 dxdy\right]$$

Сделав обратное преобразование координат, получим

$$\iint_{E_n}\frac{a_0^{2(p_1+p_2)}}{2^{2(p_1+p_2)}}\left|\frac{\partial^{p_1+p_2}u}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}}\right|^2 dxdy \leqslant c\iint_{E_{n+1}}\frac{a_0^8}{2^{8n}}\left|\frac{\partial^{q_1+q_2}f}{\partial x^{q_1}\partial y^{q_2}}\right|^2 + |u|^2 dxdy$$

Просуммировав эти неравенства, получим окончательный результат

$$\iint\limits_G \left| \frac{\partial^{p_1+p_2} u}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}} \right|^2 r^{\alpha+2p_1+2p_2} dxdy \leqslant c \iint\limits_G \left[r^{\alpha+2p_1+2p_2+8-2q_1-2q_2} \left| \frac{\partial^{q_1+q_2} f}{\partial x^{q_1} \partial y^{q_2}} \right|^2 + r^\alpha |u|^2 \right] dxdy$$

Лемма 2. Уравнение $\Delta\Delta u = r^\beta \ln^s r\, \Phi_{\beta s}(\varphi)$ имеет частное решение вида

$$u_1 = \sum_{j=0}^{p+s} r^{\beta+4} \ln^j r \Phi_j(\varphi)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u_1(0, r) = u_1(\omega, r) = \frac{\partial}{\partial\varphi} u_1(0, r) = \frac{\partial}{\partial\varphi} u_1(\omega, r) = 0$$

Число p равно кратности корня $\beta + 1$ в уравнении (11). Существование такого частного решения проверяется непосредственно подстановкой. Подробное доказательство имеется в работе [2].

Лемма 3. Пусть $Z = r^\lambda \ln^k r\psi(\varphi)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая по φ функция, а $H > 0$ — произвольное число. Существует функция v вида

$$v = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{k_j} r^{\lambda_j} \ln^k r \psi_{kj}(\varphi), \qquad \operatorname{Re} \lambda_j \geqslant 4$$

удовлетворяющая условиям

$$v(0, r) = v(\omega, r) = \frac{\partial}{\partial\varphi} v(0, r) = \frac{\partial}{\partial\varphi} v(\omega, r) = 0, L_0(v) - Z = o(r^H)$$

Доказательство. Будем искать функцию v в виде $v = v_1 + w_1$.

За функцию v_1 примем решение уравнения $\Delta\Delta v_1 = Z_1$, которое существует согласно лемме 2. Сделаем в уравнении (12) замену $v - v_1 = w_1$.

Для функции w_1 получим уравнение

$$L_1 w_1 = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_j} r^{\lambda_j} \ln^k r \psi_{kj}^{(1)}(\varphi)$$

Здесь L_1 — оператор такого же вида, что и L_0. Положим, затем $w_1 = v_2 + w_2$, где w_2 — решение уравнения $\Delta\Delta v_2 = Z_1$, удовлетворяющее требованиям леммы 2. Для функции w_2 получаем уравнение $L_2 w_2 = Z_2$

$$z_2 = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_j} r^{\lambda_j} \ln^k r \psi_{kj}^{(2)}(\varphi), \qquad \operatorname{Re} \lambda_j \geqslant \operatorname{Re} \lambda + 2$$

Продолжая такой процесс, можно установить через конечное число шагов, что функция $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ удовлетворяет всем требованиям леммы 3. Докажем справедливость формулы (2) для решения уравнения (1). Рассмотрим функцию $u_1 = \theta u$, где θ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю всюду, кроме той окрестности начала координат, где граница области G состоит из прямолинейных отрезков и равная единице в некоторой окрестности начала координат (например, при $r \leqslant a_0/2$). Функция u_1 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta u_1 + a \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial y} + b \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x} = f_1 \tag{13}$$

Здесь $f_1 \equiv f$ в некоторой окрестности начала. Представим функцию f_1 в виде

$$f_1 = P_1(x, y) + F_1, \qquad F_1 = o(r^m)$$

Здесь P_1 — полином степени m. Согласно лемме 3 существует функция

$$v = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_j} r^{i\lambda_j} \ln^k r \psi_{kp}(\varphi)$$

такая, что

$$Lv - P_1 = o(r^m), \quad v(0, r) = v(\omega, r) = \frac{\partial v(0, r)}{\partial\varphi} = \frac{\partial v(\omega, r)}{\partial\varphi} = 0$$

В уравнении (11) сделаем замену $u_1 = v + Z$. Для функции Z получим

$$L_1 Z = F_2, \quad F_2 = o(r^m), \quad F_2 \in \overset{\circ}{H}{}^m_\beta, \ \beta > -2 \tag{14}$$

Функция Z принадлежит C_1 и $\overset{\circ\circ}{H}_{\alpha-6}$ при $\alpha > 0$. Следовательно, согласно лемме 1

$$z \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\alpha+2m-6}$$

Перепишем уравнение (14) в виде

$$\Delta\Delta z = \Phi_2, \quad \Phi_2 \in \overset{\circ}{H}{}^{m-3}_{-6+\alpha+2m+\delta_1}$$

$$z = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{j_k} r^{\lambda_k} \ln^j r \psi_{kj}^{(0)}(\varphi) + z_1, \quad z_1 \in \overset{\circ}{H}{}^{m+1}_{-4+\alpha+2m}, \quad \operatorname{Re}\lambda_k \geqslant 2$$

На основании теоремы вложения получаем $Z_1 \in C_2$. Функция Z_1 удовлетворяет уравнению

$$L_1 z_1 = P_3 + g_3, \quad P_3 \in \overset{\circ}{H}{}^{m-2}_{-4+\alpha+2m+\delta_1}, \quad g_3 = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{j_k} r^{\lambda_k} \ln^j r g_{kj}(\varphi), \quad \operatorname{Re}\lambda_k > -1$$

Найдем согласно лемме 3 функцию v_1 такую, что

$$L_1 v_1 - g_3 \in \overset{\circ}{H}{}^{m-2}_{-6+\alpha+2m+\delta_1}$$

и сделаем замену $u_2 = z_2 + v_2$. В результате получим

$$L_1 z_2 = \psi_2, \quad \psi_2 \in \overset{\circ}{H}{}^{m-2}_{-6+\alpha+2m+\delta_1}$$

Это уравнение опять можно переписать в виде

$$\Delta\Delta z_2 = F_2^{(1)}, \quad F_2^{(1)} \in \overset{\circ}{H}{}^{m-2}_{-6+\alpha+2m+\delta_1}$$

и, применяя формулу (4), получим представление

$$z_2 = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_j} r^{\lambda_j} \ln^k r \psi_{kp}^{(1)}(\varphi) + z_3$$

Продолжая этот процесс далее, найдем следующие члены асимптотики. Решение $u(x, y)$ таким образом представляется в виде

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_j} r^{\gamma_j} \ln^k r \psi_{kp}(\varphi) + w \qquad w \in H_\beta^{0m+4}, \ \beta > -1, \quad \gamma_k = i(\mu_k + n)$$

Здесь μ_k — корни уравнения (11). Отметим, что первый член асимптотики (2) определяется только главной линейной частью уравнения (1). Показатель γ_1 в этом случае есть число $i\mu_1$, где μ_1 — тот из корней уравнения (11), лежащих выше прямой $\operatorname{Im}\lambda = 2$, который имеет наименьшую мнимую часть.

В качестве примера рассмотрим случай $\omega = 2\pi$. В этом случае $\mu_k = n/2$ и для u получается разложение вида

$$u = \sum_{n\geqslant 3} \sum_{k=0}^{k_n} r^{n/2} \ln^k r \psi_{nk}(\varphi) \quad (n = 3, 4, \ldots; \ k_3 = 0, \ k_4 = 1)$$

Поступила 15 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Agmon S., Douglis A. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations. Communs. Pure and Appl. Math., 1959, vol. 12, pp. 623—727.

2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 27—29.