ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Д. Л. Шварцблат

(Пермь)

Исследование устойчивости стационарных движений вязкой жидкости связано, как известно, со значительными математическими трудностями. Точное решение задачи о спектре малых нормальных возмущений известно лишь в исключительных случаях. Ниже обсуждается пример простого стационарного движения, для которого задача о спектре возмущений решается точно.

Рассмотрим плоский бесконечный слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный плоскостями $z = \pm h$. Границы слоя будем считать проницаемыми, причем через плоскость $z = -h$ происходит однородное вдувание жидкости со скоростью v_0, а на плоскости $z = h$ имеется однородное отсасывание с той же скоростью. В слое жидкости, таким образом, происходит стационарное поперечное движение с однородной скоростью:

$$v_x = 0, \qquad v_y = 0, \qquad v_z = v_0 \tag{1}$$

(начало координат выбрано в середине слоя, оси x и y параллельны границам).

Уравнения малых возмущений стационарного движения (1) получаются обычным образом из уравнений Навье—Стокса и непрерывности. После исключения давления, а также x- и y-компонент скорости возмущений получим уравнение для поперечной компоненты скорости возмущений $v_z = v_z(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z + R \frac{\partial}{\partial z} \Delta v_z = \Delta^2 v_z, \qquad R = \frac{v_0 h}{\nu} \tag{2}$$

Уравнение (2) записано в безразмерном виде, причем в качестве единиц расстояния, времени и скорости выбраны соответственно величины h, h^2/ν, v_0. В уравнение входит безразмерный параметр — число Рейнольдса R.

Рассмотрим периодические в плоскости слоя нормальные возмущения вида

$$v_z = v(z) \exp\left[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)\right] \tag{3}$$

Здесь λ — комплексный декремент возмущений, k_1 и k_2 — волновые числа вдоль направлений x и y. Из (2) следует уравнение для амплитуды возмущений $v(z)$

$$-\lambda(v'' - k^2 v) + R(v''' - k^2 v') = v^{\mathrm{IV}} - 2k^2 v'' + k^4 v, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \tag{4}$$

На границах слоя

$$v = v' = 0 \qquad \text{при } z = \pm 1 \tag{5}$$

Краевая задача (4), (5) определяет спектр характеристических возмущений и соответствующих декрементов λ. Заметим, что уравнение (4) отличается от уравнения Орра — Зоммерфельда, получающегося при исследовании возмущений продольных потоков.

Покажем, прежде всего, что все возмущения вида (3) со временем затухают. Для этого умножим уравнение (4) на комплексносопряженное решение v^* и проинтегрируем по z в пределах от -1 до 1. Складывая получившееся соотношение с комплексно-сопряженным, получим

$$(\lambda + \lambda^*) \int_{-1}^{1} (|v'|^2 + k^2 |v|^2)\, dz = 2 \int_{-1}^{1} (|v''|^2 + 2k^2 |v'|^2 + k^4 |v|^2)\, dz \tag{6}$$

Так как оба интеграла, входящие в (6), положительны, то $\lambda + \lambda^* > 0$. Таким образом, вещественные части λ_r декрементов всех нормальных возмущений положительны, и стационарное движение (1) всегда устойчиво.

Для нахождения спектра декрементов и возмущений необходимо решить несамосопряженную краевую задачу (4), (5).

Общее решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами (4) имеет вид

$$v = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} + C_3 e^{r_1 z} + C_4 e^{r_2 z} \tag{7}$$

$$r_{1,2} = {}^1/_2 \left[R \pm \sqrt{R^2 + 4(k^2 - \lambda)}\right] \tag{8}$$

Граничные условия (5) приводят к системе четырех линейных однородных уравнений для коэффициентов C_i. Условие разрешимости этой системы дает характеристическое уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{\operatorname{th}^2 k - \operatorname{th} r_1 \operatorname{th} r_2}{\operatorname{th} r_1 - \operatorname{th} r_2} = \frac{(k^2 - r_1 r_2)\operatorname{th} k}{k(r_1 - r_2)} \tag{9}$$

Отделяя в (9) вещественную и мнимую части, получим два соотношения

$$\frac{\alpha(k^2 + \alpha^2 + \beta^2 - {}^1/_4 R^2)}{4(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{\operatorname{sh} 2k}{k} + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{\operatorname{ch} 4\alpha - \cos 4\beta} (\operatorname{ch} R \cos 2\beta - \operatorname{ch} 2k \operatorname{ch} 2\alpha) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\beta(k^2 - \alpha^2 - \beta^2 - {}^1/_4 R^2)}{4(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{\operatorname{sh} 2k}{k} + \frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch} 4\alpha - \cos 4\beta} (\operatorname{ch} R \operatorname{ch} 2\alpha - \operatorname{ch} 2k \cos 2\beta) = 0 \tag{11}$$

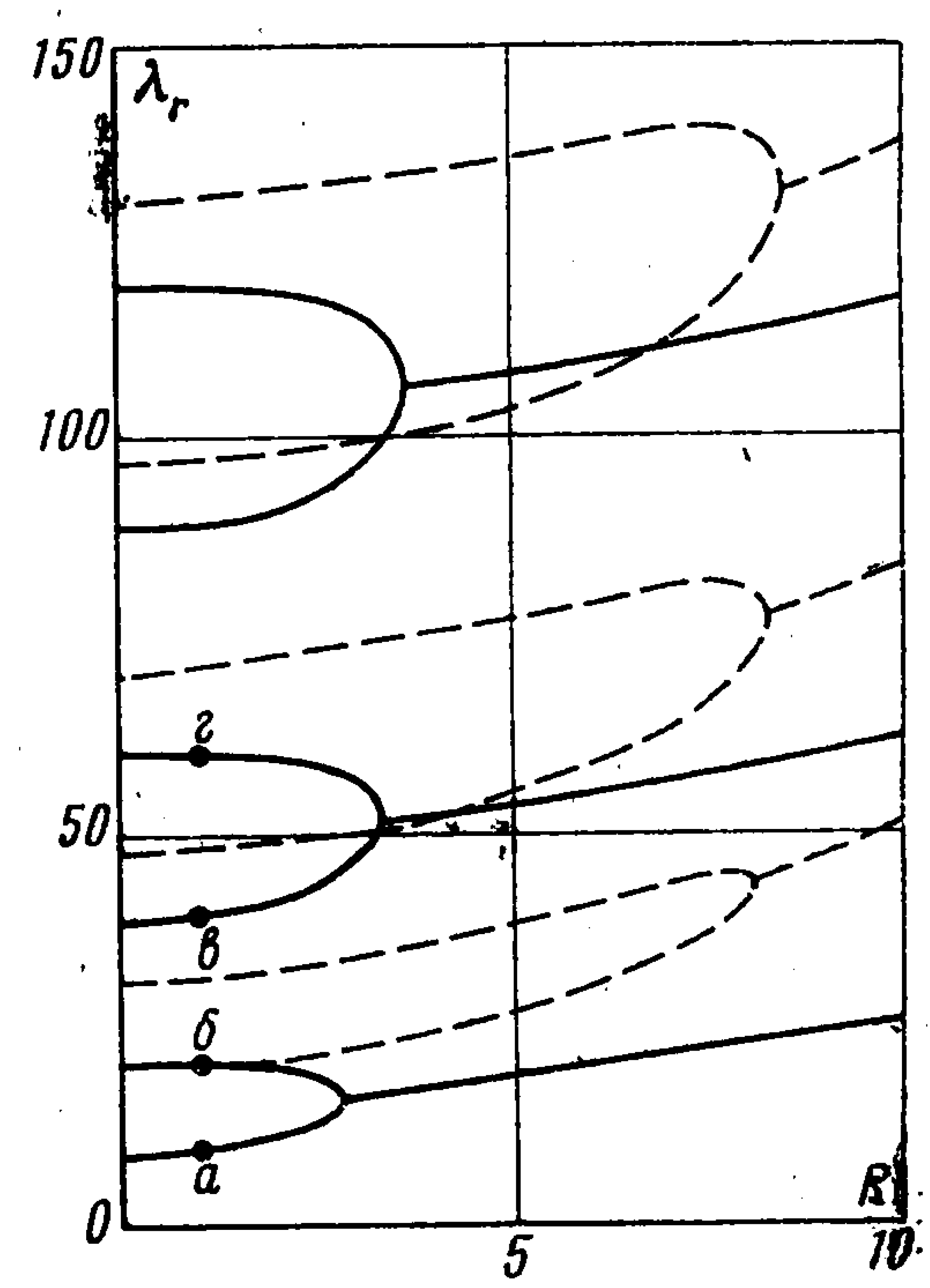
Вещественные величины α и β, входящие в уравнения (10) и (11), определяются следующим образом

$${}^1/_2 \sqrt{R^2 + 4(k^2 - \lambda)} = \alpha + i\beta \tag{12}$$

Полагая $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, будем иметь (13)

$$\lambda_r = k^2 - \alpha^2 + \beta^2 + 1/4\, R^2, \qquad \lambda_i = -2\alpha\beta$$

Таким образом, уравнения (10), (11) определяют вещественные и мнимые части характеристических декрементов λ_r и λ_i в зависимости от параметров R и k. Коэффициенты C_i решения (7), определяющие форму возмущений, имеют весьма громоздкий вид и здесь не приводятся.



Фиг. 1

При $R = 0$ декременты λ нормальных возмущений являются вещественными и положительными (монотонное затухание возмущений). Они определяются (в порядке возрастания) из следующих трансцендентных соотношений:

$$\beta_0 \operatorname{tg} \beta_0 = -k \operatorname{th} k, \qquad \lambda^{(0)} = \lambda_0^{(0)}, \quad \lambda_2^{(0)}, \ldots$$

$$\beta_0 \operatorname{ctg} \beta_0 = k \operatorname{cth} k, \qquad \lambda^{(0)} = \lambda_1^{(0)}, \quad \lambda_3^{(0)}, \ldots$$

$$\left(\beta_0 = \sqrt{\lambda^{(0)} - k^2}\right) \tag{14}$$

При этом первой подсистеме соответствуют четные относительно середины слоя решения уравнения (4) при $R = 0$, а второй — нечетные (см., например, [1]).

При малых значениях числа Рейнольдса R вещественность декрементов λ сохраняется, и в этой области $\lambda_i = 0$, т. е. $\alpha = 0$. В этом случае (10) удовлетворяется тождественно, а λ_r определяются из уравнения (11), которое принимает вид

$$\left(k^2 - \beta^2 - \frac{R^2}{4}\right) \frac{\operatorname{sh} 2k}{2k} + \frac{\beta}{\sin 2\beta} (\operatorname{ch} R - \operatorname{ch} 2k \cos 2\beta) = 0 \tag{15}$$

Из (15) следует, что при малых R декременты меняются квадратично с ростом R:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + aR^2 + \ldots \tag{16}$$

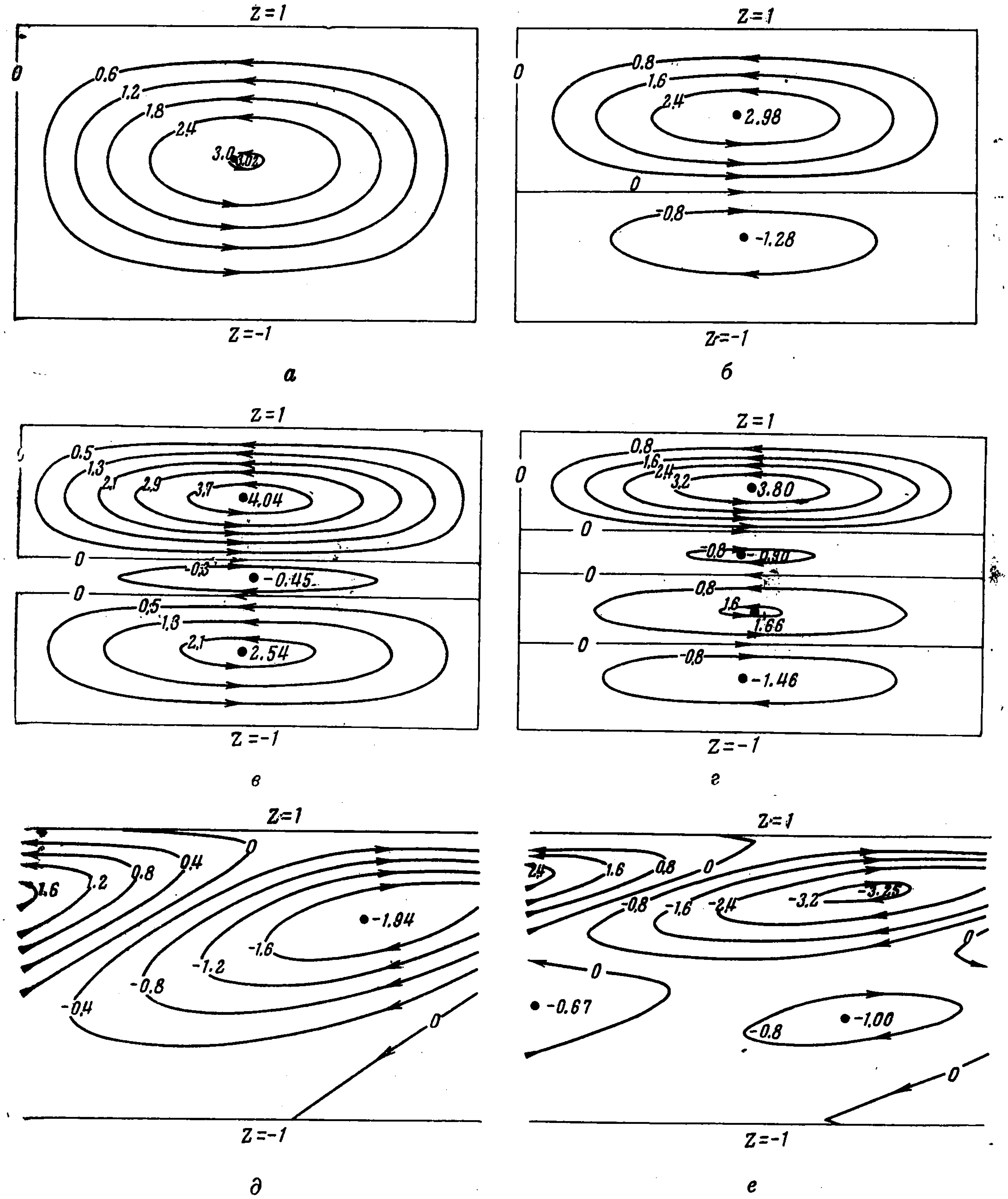
$$a = \beta_0 (4k\beta_0 - \operatorname{sh} 2k \sin 2\beta_0) \, [\beta_0 \sin 2\beta_0 \operatorname{sh} 2k (1 - 2k \operatorname{cth} 2k) -$$

$$- k(1 - 2\beta_0 \operatorname{ctg} 2\beta_0)(1 - \operatorname{ch} 2k \cos 2\beta_0)]^{-1} + {}^1/_4 \tag{17}$$

С возрастанием R вещественные декременты попарно сливаются, порождая пары комплексносопряженных декрементов, т. е. возникают колебательные возмущения, бегущие вдоль слоя с отличной от нуля фазовой скоростью.

Рассматриваемый спектр, таким образом, аналогичен спектру декрементов в случае продольных потоков с нечетным профилем [1].

На фиг. 1 в качестве примера приведены построенные по уравнениям (10) и (11) ектры для значений волнового числа $k = 1$ (сплошная линия) и $k = 4$ (пунктир).



Фиг. 2

В области больших R из уравнений (10), (11) можно получить асимптотические зависимости α и β (т. е. λ_r и λ_i) от числа Рейнольдса R. Как оказывается, при больших R параметр β не зависит от R, а параметр α зависит от R линейно

$$\alpha = \frac{R}{2} - \delta, \qquad \delta = \ln\left(\frac{\beta \operatorname{sh} 2k}{k \sin 2\beta}\right)^{1/2} \tag{18}$$

причем значения β определяются как корни трансцендентного уравнения

$$2\beta \operatorname{ctg} 2\beta + \ln\frac{\sin 2\beta}{2\beta} = 2k \operatorname{cth} 2k + \ln\frac{\operatorname{sh} 2k}{2k} \tag{19}$$

Каждый корень β_n уравнения (19) соответствует комплексно-сопряженной паре, образовавшейся в результате слияния двух соседних вещественных уровней спектра. Для $k = 1$, например, получаем: β = 3.632, 6.883, 10.07, 13.24... и, соответственно, δ = 1,382, 1.644, 1.819, 1.948... Для $k = 4$ имеем: β = 3.338, 6.624, 9.860, 13.07... и δ = 4.043, 4.137, 4.239, 4.331... Вещественная и мнимая части декрементов в области больших R могут быть найдены в соответствии с (13)

$$\lambda_r = (k^2 + \beta^2 - \delta^2) + \delta R, \qquad \lambda_i = \pm (R - 2\delta)\,\beta \tag{20}$$

Интересно заметить, что асимптотические формулы (20) хорошо описывают всю комплексную область спектра. В частности, значения числа Рейнольдса R_*, при которых возникают колебательные возмущения (в этой точке $\lambda_i = 0$), могут быть достаточно точно найдены по формуле $R_* = 2\delta$, вытекающей из (20). На фиг. 2 приведены линии тока возмущений в плоском случае ($k_2 = 0$, $k = k_1 = 1$) для фиксированного момента времени. На фигурах изображена картина движения в интервале значений координаты x, равном половине длины волны возмущения. Фиг. 2, *а* — *г* соответствуют затухающим монотонным возмущениям для различных уровней спектра при $R = 1$ (значения параметров R и λ_r, которым соответствуют эти фигуры, отмечены на фиг. 1 точками). Фиг. 2, *д*, *е* изображают линии тока затухающих колебательных возмущений

$$\operatorname{Re} \psi (x, z) = \text{const}$$

(ψ — комплексная функция тока) для первой (фиг. 2, *д*) и второй (фиг. 2, *е*) — в порядке возрастания λ_r — пары слившихся уровней при $R = 19$.

С ростом номера уровня структура собственных функций усложняется. Отметим также эффект «сдувания» возмущений поперечным потоком.

Поступила 1 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О спектре возмущений плоскопараллельных течений при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

В. А. Кондратьев (Москва)

В работе рассматривается решение уравнения

$$\Delta\Delta u + a\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + b\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = f \tag{1}$$

в области G, граница которой Γ всюду, кроме начала координат, гладкая, а в некоторой окрестности начала координат состоит из двух прямолинейных отрезков l_1, l_2 длины a_0, пересекающихся под углом ω ($\omega \leqslant 2\pi$).

Коэффициенты a, b, входящие в уравнение (1), постоянные. Решение $U(x, y)$ предполагается имеющим первые производные, непрерывные в замкнутой области G, обращающимся на Γ в нуль вместе с нормальной производной всюду, кроме, быть может, начала координат.

Введем некоторые обозначения. Функция v принадлежит пространству H_α^{0k}, если конечны интегралы

$$\iint\limits_G r^{\alpha - 2(k_1+k_2)} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} v}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right|^2 dx dy, \qquad k_1 + k_2 \leqslant k$$

(r — расстояние до начала координат).

Через $\|v\|_{k\alpha}^2$ обозначим сумму всех таких интегралов. Функция $v \in C_m$, если она имеет m непрерывных производных в замкнутой области G. В силу предположений искомое решение принадлежит C_1 и, кроме того, $u \in H_{-2+\beta}^{01}$ при всех $\beta > 0$.