Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

О МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ

А. Т. Листров

(Воронеж)

Уравнения движения вязкой жидкости Навье — Стокса могут быть получены, исходя из представлений кинетической теории жидкостей и газов, лишь для систем с небольшой плотностью или систем, состоящих из сферических молекул [1,2]. В общем случае тензор напряжений в вязкой жидкости должен быть несимметричным. В [1] была предложена модель сплошной среды с несимметричным тензором напряжений, механическое поведение которой описывается одновременно обычным полем скоростей и полем внутреннего вращения частиц, из которых состоит «точка» материального континуума. Наряду с несимметричным тензором силовых напряжений в [1] был введен в рассмотрение аксиальный тензор второго ранга, характеризующий внутренние моментные напряжения. В предположении, что моментные напряжения производят работу только на перемещениях внутреннего вращения, в [1] были получены определяющие реологические уравнения и уравнения движения вязкой жидкости, обладающей релаксационными свойствами. В этой же работе было показано, что в тех случаях, когда в жидкостях и газах моментными напряжениями можно пренебречь, физические свойства среды описываются обычным коэффициентом вязкости, коэффициентом вращательной вязкости и временем релаксации. Более общая модель структурного континуума была предложена в работах [3,4].

В [3] рассмотрена среда, обладающая поляризационными свойствами. Наряду с несимметричным тензором напряжений и моментными напряжениями в [3] рассмотрены также внешние массовые моменты электромагнитной природы. Детальное исследование механического поведения модели жидкого диэлектрика в электрическом поле проведено в работе [4].

В этой работе построена линейная модель поляризующегося диэлектрика при предположении, что симметричная часть тензора напряжений зависит только от симметричной части тензора скоростей деформации, тензор моментных напряжений симметричен и зависит только от симметричной части тензора — градиента угловой скорости внутреннего вращения частиц.

Конкретные течения в [4] рассмотрены при условиях, что на твердых границах равна нулю или антисимметричная часть тензора напряжений, или равен нулю вектор угловой скорости внутреннего вращения.

Ниже рассматривается вариант структурного континуума, который характеризуется в некотором отношении более общими свойствами, чем континуумы, рассмотренные в [1–4].

Модель построена в предположении, что моментные напряжения не производят работу на перемещениях внутреннего вращения, но производят работу на внешних перемещениях внутри объема. В общем случае диады силовых и моментных напряжений рассматриваемой модели несимметричны, модель обладает релаксацией и характеризуется термомеханическим эффектом.

В одном из предельных случаев исследуемая модель совпадает с моделью Грэда [1,2], в другом предельном случае модель характеризуется обычной ньютоновской вязкостью при сдвиге и вязкостью при локальном изгибе — кручении.

Рассмотрим материальный изотропный континуум, в каждой точке которого определен вектор скорости трансляции $\mathbf{v}$ и вектор угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$. Будем предполагать, что в каждой точке произвольного объема V приложен вектор массовой силы $\mathbf{f}$ и вектор внешнего массового момента $\mathbf{c}$. На поверхности S объема V действуют силовые напряжения $\mathbf{t}_n$ и моментные напряжения $\mathbf{m}_n$.

Уравнения сохранения массы, уравнения изменения количества движения, момента количества движения и энергии запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{v}\, dV = \int_S \mathbf{t}_n dS + \int_V \rho\mathbf{f}\, dV \\
\frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{v} + J\boldsymbol{\omega})\rho\, dV = \int_S (\mathbf{r}\times\mathbf{t}_n + \mathbf{m}_n)\, dS + \int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{f} + \mathbf{c})\rho dV \\
\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{J\omega^2}{2}\right)\rho\, dV = \int_S \left(\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{m}_n\cdot\nabla\times\mathbf{v}\right) dS - \\
- \int_V \nabla\cdot\mathbf{q} dV + \int_V \left(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\cdot\nabla\times\mathbf{v}\right)\rho\, dV
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь ρ — плотность, $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени, $\mathbf{r}$ — радиус вектор точки, ∇ — пространственный градиент, $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока, u — удельная внутренняя энергия, являющаяся функцией состояния, J — среднее значение момента инерции в точке структурного континуума [1,2]. Уравнение изменения энергии (1) написано в предположении, что работой вектора моментного напряжения $\mathbf{m}_n$ и работой вектора $\mathbf{c}$ на перемещениях вращения $\boldsymbol{\omega}$ можно пренебречь [1].

Диада силовых напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и диада моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ связаны с вектором внешней нормали $\mathbf{n}$ соотношениями

$$
\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}, \qquad \mathbf{m}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mu} \tag{2}
$$

Принимая во внимание (2), из (1) находим

$$
\begin{gathered}
\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f}, \qquad \frac{d\rho}{dt} = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\mu} + \rho\mathbf{c} + \boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{I} = \rho J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \\
\rho\frac{du}{dt} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{I})\cdot\nabla\times\mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\nabla\nabla\times\mathbf{v} + \\
+ \frac{1}{2}\rho J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\cdot(\nabla\times\mathbf{q} - 2\boldsymbol{\omega}) - \nabla\cdot\mathbf{q}
\end{gathered} \tag{3}
$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная диада, операция $(\times\cdot)$ означает, что первые множители диад перемножаются скалярно, а левые — векторно [5].

Представим диады $\boldsymbol{\tau}$, $\nabla\mathbf{v}$, $\nabla\nabla\times\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\mu}$ в форме

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\tau} = (\pi^* - p)\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}^a + \boldsymbol{\pi}^d, \qquad \boldsymbol{\mu} = \mu^*\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}^a + \boldsymbol{\mu}^d, \qquad \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi} \\
\nabla\nabla\times\mathbf{v} = (\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a + (\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d, \qquad \nabla\mathbf{v} = v^*\mathbf{I} + (\nabla\mathbf{v})^a + (\nabla\mathbf{v})^d \\
\mu^* = {}^1/_3\boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\mathbf{I}, \qquad \pi^* = {}^1/_3\boldsymbol{\pi}\cdot\cdot\mathbf{I}, \qquad v^* = {}^1/_3(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}
\end{gathered} \tag{4}
$$

Здесь p — равновесное давление, индексами d и a соответственно отмечены симметричные и антисимметричные диады.

Учитывая (4) и соотношение $(\tau\times.\mathrm{I})\cdot\nabla\times\mathbf{v}=2\pi^a\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}$, преобразуем уравнение изменения энергии (1) к виду

$$\rho\frac{du}{dt}=(\pi^*-p)\nabla\cdot\mathbf{v}+\pi^d\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^d+\frac{1}{2}\mu^d\cdot\cdot(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d+$$
$$+\frac{1}{2}\mu^a\cdot\cdot(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a+\frac{1}{2}\rho J\frac{d\omega}{dt}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}-2\omega)-\nabla\cdot\mathbf{q} \tag{5}$$

Воспользуемся термодинамическим соотношением Гиббса и законом сохранения массы в форме [2]

$$T\frac{ds}{dt}=\frac{du}{dt}+p\frac{dv}{dt}, \qquad \rho\frac{dv}{dt}=\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{6}$$

Здесь T — абсолютная температура, s — удельная энтропия, v — удельный объем ($v=\rho^{-1}$).

Из (5) и (6) получаем уравнение баланса энтропии в форме

$$\rho\frac{ds}{dt}=-\nabla\cdot\frac{\mathbf{q}}{T}+\sigma \tag{7}$$

где положительная величина производства энтропии σ имеет вид

$$\sigma=-\mathbf{q}\cdot\frac{\nabla T}{T^2}+\frac{\pi^*(\nabla\cdot\mathbf{v})}{T}+\frac{\pi^d\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^d}{T}+\frac{\mu^d\cdot\cdot(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d}{2T}+$$
$$+\frac{\mu^a\cdot\cdot(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a}{2T}+\frac{1}{2T}\left[\rho J\frac{d\omega}{dt}\cdot(\nabla\times\mathbf{v}-2\omega)\right]\geqslant 0 \tag{8}$$

В (8) термодинамическими силами [6] являются: истинный скаляр $\nabla\cdot\mathbf{v}$, симметричная диада $(\nabla\mathbf{v})^d$, симметричная псевдодиада $(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d$, антисимметричная псевдодиада $(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a$, псевдовектор $(\nabla\times\mathbf{v}-2\omega)$ и истинный вектор ∇T. Отметим, что псевдовектор $(\nabla\times\mathbf{v}-2\omega)$ и псевдодиада $(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d$ являются аксиальными, тогда как вектор, эквивалентный антисимметричной псевдодиаде $(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a$, симметричная диада $(\nabla\mathbf{v})^d$ и вектор ∇T являются полярными. Принимая во внимание принцип Кюри и соотношения взаимности Онзагера [2], из (8) находим линейную связь между термодинамическими силами и термодинамическими потоками в виде

$$\mathbf{q}=-\varkappa\nabla T+T\varkappa_{12}\mathbf{b}, \qquad \pi^d=2\eta(\nabla\mathbf{v})^d, \qquad \pi^*=\eta^*\nabla\cdot\mathbf{v}$$
$$\mathbf{d}=\varkappa_{12}\nabla T+c_a\mathbf{b}, \quad \mu^d=c_d(\nabla\nabla\mathbf{v})^d, \quad \rho J\frac{d\omega}{dt}=2\eta_r(\nabla\times\mathbf{v}-2\omega) \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{b}$ — вектор, эквивалентный диаде $(\nabla\nabla\mathbf{v})^a$, а $\mathbf{d}$ — вектор, эквивалентный диаде μ^a. Из (9) видно, что рассматриваемая модель сплошной среды характеризуется термомеханическим эффектом, обусловленным несимметричностью диады моментных напряжений μ.

В этом случае, когда термомеханическими явлениями и сжимаемостью можно пренебречь, соотношения (9) запишем в форме

$$\mathbf{q}=-\varkappa\nabla T, \quad \pi^d=2\eta(\nabla\mathbf{v})^d, \quad \mu^a=c_a(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a$$
$$\mu^d=c_d(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d, \qquad \rho J\frac{d\omega}{dt}=2\eta_r(\nabla\times\mathbf{v}-2\omega) \tag{10}$$

Здесь скалярные величины η, η_r, c_a, c_d, $\varkappa$ и J положительны.

Учитывая, что $2\boldsymbol{\tau}^a = -I\times(\boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{I})$, из (3) получаем, что

$$\boldsymbol{\tau}^a = \frac{1}{2}\mathbf{I}\times\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\mu} + \rho\mathbf{c} - \rho J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \tag{11}$$

Используя (9)—(11) и (4), из (5) находим, что

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + 2\eta\nabla\cdot(\nabla\mathbf{v})^d + \frac{c_d}{2}\nabla\times\nabla\cdot(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^d + $$

$$+ \frac{c_a}{2}\nabla\times\nabla\cdot(\nabla\nabla\times\mathbf{v})^a + \eta_r\nabla\times(2\boldsymbol{\omega} - \nabla\times\mathbf{v}) + \rho\mathbf{f} \tag{12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{2\eta_r}{\rho J}(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}), \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

Уравнение теплопроводности при условии несжимаемости имеет вид

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot(\nabla T)\right] = -T\nabla\cdot\frac{\mathbf{q}}{T} + T\sigma \tag{13}$$

где C_p — теплоемкость при постоянном давлении, а σ определяется согласно (8), (9).

При $C_d = C_a = 0$, $\mathbf{c} = 0$ уравнения (12) совпадают с уравнениями движения вязкой несжимаемой среды [2], у которой диада напряжений несимметрична за счет внутреннего вращения частиц

$$\boldsymbol{\tau}^a = -\frac{\rho J}{2}\mathbf{I}\times\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

При $J = 0$ уравнения (10), (12), (13) совместно с соотношением

$$\boldsymbol{\tau}^a = \frac{1}{2}\mathbf{I}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{\mu}^d + \nabla\cdot\boldsymbol{\mu}^a + \boldsymbol{\mu}^* + \rho\mathbf{c}) \tag{14}$$

описывают течение вязкой несжимаемой жидкости, у которой несимметричность диады напряжений обусловлена наличием моментных напряжений.

При $J = 0$ уравнения (10), (12), (14) аналогичны уравнениям линейной теории упругой среды с моментными напряжениями [5].

Рассматриваемая модель вязкой жидкости в общем случае характеризуется обычным ньютоновским сопротивлением сдвигу, сопротивлением локальному изгибу — кручению [5], релаксационными свойствами [1,2] и термомеханическими явлениями.

Поступила 26 I 1966

Воронежский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical mechanics, thermodinamics and fluid dynamics of systems with arbitrary number of integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., Изд-во Мир, 1964.
3. Dahler J., Serin L. The theory of structured continua. 1. General consideration of angular momentum and polarization. Proc. Roy. Soc., London, 1963, A275, No. 1363.
4. Condiff D. W., Dahler J. S. Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 6.
5. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stesses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1962, vol. 11, No. 5; русск. пер.: Механика, Сб. пер., Изд-во иностр. лит., 1964, № 4 (86).
6. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физики. М., Физматгиз, 1963.