Прикладная математика и механика. Том 31, 1967

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ И ВЕТВЛЕНИЕ

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

В работах [1-4] было исследовано возникновение вторичных стационарных течений для ряда гидродинамических задач. При этом использован топологический метод — применялась теорема М. А. Красносельского о бифуркации [5]. Этот метод, обладая большой общностью и требуя минимальной «информации на входе», не дает, однако, возможности исследовать расположение спектра и определять число возникающих решений.

Наиболее детальные сведения о ветвлении можно получить аналитическим методом — методом Ляпунова — Шмидта. Метод Ляпунова — Шмидта дает при этом не только качественные результаты, но и является в рассматриваемом круге задач эффективным методом расчета вторичных потоков. Главная трудность в приложениях этого метода сконцентрирована в решении линеаризованной задачи. Вообще говоря, ее придется решать численно, но есть ряд случаев, где качественные результаты можно получить независимо от расчетов. Таковы как раз задачи, разбираемые в [1-4].

Следует указать, что наиболее законченные и полные результаты дает комбинация топологического и аналитического методов; на этом пути получается, в частности, полная картина потери устойчивости в задаче конвекции. В данной работе доказывается, что сразу после потери устойчивости возникает два вторичных течения (и других нетривиальных решений задача не имеет). Этот факт имеет место в том случае, когда первое собственное число линеаризованной задачи простое. Приводится ряд примеров, в которых условие простоты проверяется: конвекция в горизонтальном слое, в вертикальном цилиндрическом сосуде большой высоты. Эти результаты изложены в § 2. В следующей работе будет показано, что оба вторичных течения устойчивы. Заметим, что ветвление при переходе следующих критических чисел в случае слоя (и в некоторых других) происходит аналогично, но рождаются неустойчивые решения.

В § 1 доказывается нужная для дальнейшего теорема 1.1. В ней рассматривается специальный, но нередко встречающийся в задачах математической физики, случай применения метода Ляпунова — Шмидта. Здесь допускаются и кратный спектр. Заметим, что эта теорема позволила в настоящее время установить, что вторичное течение Тэйлора между вращающимися цилиндрами определено однозначно (с точностью до сдвига вдоль оси трубы).

Наиболее детальные сведения о характере ветвления (число решений, устройство спектра и т. д.) дает метод Ляпунова — Шмидта. Однако применение этого метода требует, по сравнению с топологическим методом, гораздо больших сведений об операторах. Особые сложности вызывает кратный спектр. К случаю простого спектра можно иногда перейти, разыскивая решение из некоторого подпространства (в задачах гидродинамики, накладывая некоторые условия четности на неизвестные функции, как это делается в [1-4]).

При этом, однако, остается открытым вопрос о существовании других решений. В первом параграфе будет показано, как решается этот вопрос в одном случае, когда кратность спектра вызвана инвариантностью задачи относительно некоторой группы преобразований. При некоторых условиях (см. теорему 1.1) оказывается, что все решения задачи получаются из одного решения преобразованиями указанной группы. Именно такова ситуация в случае течения жидкости между двумя цилиндрами, в двумерной задаче о волнах на поверхности жидкости, а также в случае плоской конвекции. Применение теоремы 1.1 к задаче конвекции дано в § 2.

§ 1. Один случай ветвления при наличии кратного спектра. Итак, рассмотрим в банаховом пространстве X уравнение вида

$$x = K_\lambda x \tag{1.1}$$

Здесь K_λ — вполне непрерывный оператор в X, аннулирующийся в нуле. Пусть дифференциал Фреше оператора K_λ в точке $x = 0$ имеет вид λAx и λ_0 — характеристическое число оператора A. Будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1.1. Оператор K_λ аналитичен по x, λ в области ($\|x\| < \rho$; $|\lambda - \lambda_0| < \gamma$). Таким образом, уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$x = \lambda Ax + \sum_{k=2}^{\infty} R_k x \tag{1.2}$$

причем оператор $R_k x = R_k (x, x, \ldots, x)$, k—линеен и аналитически зависит от λ

$$R_k x = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m R_{km} x, \qquad \mu = \lambda - \lambda_0 \tag{1.3}$$

Условие 1.2. Пусть L_g — представление компактной группы G в пространство линейных операторов в $X : L_g$ — непрерывная оператор-функция на G и выполнены условия

$$L_{g_1 g_2} = L_{g_1} L_{g_2}, \qquad L_{g^{-1}} = L_g^{-1} \; (g, g_1, g_2 \in G) \tag{1.4}$$

Предположим, что уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразований L_g

$$L_g K_\lambda x = K_\lambda L_g x \qquad (x \in X; \; g \in G) \tag{1.5}$$

Разлагая $K_\lambda(\rho x)$ в ряд по степеням параметра ρ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим из (1.5)

$$L_g A x = A L_g x; \qquad L_g R_k x = R_k L_g x, \qquad L_g R_{km} x = R_{km} L_g x \tag{1.6}$$

Из первого равенства (1.6) следует, что собственное подпространство X_0 оператора A, отвечающее характеристическому числу λ_0, инвариантно относительно операторов L_g.

Условие 1.3. Назовем представление L_g полным в X_0, если по любой паре $\varphi', \varphi'' \in X_0$ можно указать $g \in G$ так, что

$$L_g \varphi' = \alpha \varphi'' \qquad (\alpha > 0) \tag{1.7}$$

Будем предполагать, что представление L_g полно в X_0.

Условие 1.4. Ранг характеристического числа пусть равен единице, а кратность, совпадающая в этом случае с размерностью X_0, есть r. Это означает, что в X_0 можно указать базис $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$ и что существует биортогональная к $\{\varphi_k\}$ система собственных векторов сопряженного оператора $A^* : \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{r-1}$.

Из (1.6) и (1.7) следует, что найдутся такие $g_k \in G$, что $\varphi_k = L_{g_k} \varphi_0$ $(k = 1, 2, \ldots, r - 1)$ и такие $g_k' \in G$, что $\psi_k = L_{g'_k}{}^* \psi_0$.

Условие 1.5. Если r четно, то предположим, что некоторое подпространство E, состоящее из векторов, ортогональных к $\psi_1, \ldots \psi_{r-1}$, и содержащее φ_0, инвариантно относительно оператора K_λ.

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия 1.1—1.5 и, кроме того, справедливо неравенство

$$\gamma = -(R_{20}^0(v, \varphi_0), \psi_0) - (R_{30}\varphi_0, \psi_0) > 0 \tag{1.8}$$

$$R_{20}^0(v, \varphi_0) = R_{20}(v, \varphi_0) + R_{20}(\varphi_0, v)$$

При этом вектор v определяется как решение задачи

$$v - \lambda_0 A v = R_{20}\varphi_0 - \sum_{k=0}^{r-1} (R_{20}\varphi_0, \psi_k)\varphi_k, \quad (v, \psi_0) = \cdots = (v, \psi_{r-1}) = 0 \tag{1.9}$$

Тогда:

а) новые решения уравнения (1.1) рождаются, когда λ проходит значение λ_0, возрастая: спектр лежит правее точки λ_0;

б) каждому $\lambda > \lambda_0$, близкому к λ_0, отвечает, с точностью до преобразования L_g, одно ненулевое решение

$$x = \sqrt{1/\lambda_0\gamma}\,\mu^{1/2}\varphi_0 + O(\mu)$$

Замечание. Как следует из дальнейшего, если отбросить условия (2), (3) и считать, что λ_0 — простое собственное число, то при условии (1.8) возникает два ненулевых решения

$$x_{1,2} = \mp\sqrt{1/\lambda_0\gamma}\,\mu^{1/2}\varphi_0 + O(\mu)$$

Доказательство. Всякое решение x' уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x' = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k'\varphi_k + y', \quad \alpha_k = (x, \psi_k), \quad (y, \psi_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{1.10}$$

В силу (2) вместе с x' решением уравнения (1.1) будет также $x = L_g x'$ при любом $g \in G$. Согласно условию 1.3 элемент g можно выбрать так, чтобы

$$L_g\left(\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k'\varphi_k\right) = \alpha\varphi_0 \qquad (\alpha > 0) \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) следует, что решение x имеет вид

$$x = \alpha\varphi_0 + y, \quad (y, \psi_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1) \quad (\alpha > 0) \tag{1.12}$$

В самом деле, из первого равенства (1.6) следует, что L_g^* коммутирует с A^*. Поэтому $L_g^*\psi_k$ есть собственный вектор оператора A^* и, значит, в силу (1.10)

$$(y, \psi_k) = (L_g y', \psi_k) = (y', L_g^*\psi_k) = 0$$

Таким образом, всякое решение x' получается преобразованием L_g из решения вида (1.12). Существование ненулевого решения уравнения (1.1) сразу следует из теоремы М. А. Красносельского [5] (в случае четного r переходим к подпространству E и используем условие (1.5)).

Применим теперь к отысканию решений вида (1.12) метод Ляпунова — Шмидта. Подставляя (1.12) в (1.2), получим

$$y - \lambda_0 A y = \mu\alpha / \lambda_0\varphi_0 + \mu A y + \sum_{k=2}^{\infty} R_k(\alpha\varphi_0 + y) \equiv Ry, \quad \mu = \lambda - \lambda_0 \tag{1.13}$$

Используя условия разрешимости уравнения Фредгольма, перепишем (1.13) в эквивалентной форме

$$y - \lambda_0 A y = Ry - \sum_{k=0}^{r-1} (Ry, \psi_k)\varphi_k, \quad (Ry, \psi_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots r, -1) \tag{1.14}$$

Малые решения уравнения (1.14) ищем в виде степенного ряда

$$y = \sum_{p,\, q=0}^{\infty} \alpha^p \mu^q y_{pq}, \qquad y_{00} = 0, \qquad (y_{pq}, \psi_k) = 0 \qquad (k = 0, \ldots, r-1) \tag{1.15}$$

Подставляя (1.15) в (1.14), выводим, что $y_{10} = y_{01} = y_{11} = y_{02} = y_{12} = y_{03} = 0$, а для определения коэффициентов y_{20}, y_{30}, y_{21} служат уравнения

$$\begin{gathered} y_{20} - \lambda_0 A y_{20} = P_0 R_{20} \varphi_0 \\ y_{30} - \lambda_0 A y_{30} = P_0 \{R_{20}^\circ (\varphi_0, y_{20}) + R_{30} \varphi_0\} \\ y_{21} - \lambda_0 A y_{21} = P_0 \{A y_{20} + R_{21} \varphi_0\} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Проекционный оператор P_0 определяется равенством

$$P_0 x = x - \sum_{k=0}^{r-1} (x, \psi_k) \varphi_k, \qquad x \in X \tag{1.17}$$

Таким образом, имеем

$$y = y_{20} \alpha^2 + y_{30} \alpha^3 + y_{21} \alpha^2 \mu + \ldots \tag{1.18}$$

где опущены члены выше третьей степени. Подставляя (1.18) во второе уравнение (1.14) при $k = 0$, получим уравнение разветвления в виде (1.19)

$$\mu / \lambda_0 \alpha + \alpha^2 (R_{20} \varphi_0, \psi_0) + \alpha^3 \, [(R_{20}^\circ (\varphi_0, y_{20}), \psi_0) + (R_{30} \varphi_0, \psi_0)] + \mu \alpha^2 (R_{21} \varphi_0, \psi_0) + \ldots = 0$$

Здесь тоже опущенные члены имеют степень больше трех. Ясно, что $(R_{20} \varphi_0, \psi_0) = 0$. В противном случае уравнение (1.19) имело бы лишь одно ненулевое решение α, тогда как из рассуждения в начале доказательства следует, что должно быть по крайней мере два корня (положительный и отрицательный). Таким образом, (1.19) можно переписать в виде (см. (1.8), где положено $v = y_{20}$)

$$\frac{1}{\lambda_0} \mu \alpha - \gamma \alpha^3 + \mu \alpha^2 (R_{21} \varphi_0, \psi_0) + \ldots = 0 \tag{1.20}$$

Пользуясь диаграммой Ньютона [6], заключаем, что уравнение (1.20) имеет одно (и только одно) положительное решение

$$\alpha = \sqrt{1 / \lambda_0 \gamma}\, \mu^{1/2} + O(\mu) \tag{1.21}$$

которое существует при любом малом положительном μ. Теорема доказана.

Проиллюстрируем применение теоремы на простом примере.

Пример. Поставим задачу отыскания 2π-периодического решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$-u'' = \lambda u + u u' \tag{1.22}$$

Обращая оператор $-d^2 / dx^2$ с помощью оператора Грина A, приведем уравнение (1.22) к виду (1.2), где

$$K_\lambda u = \lambda A u + R_{20} u, \qquad R_{20} u = A\, (u u') \tag{1.23}$$

Легко показать, что оператор K_λ вполне непрерывен в гильбертовом пространстве H, в котором плотны гладкие 2π-периодические функции с равным нулю средним на $(-\pi, \pi)$, а скалярное произведение определяется формулой

$$(u_1, u_2)_H = \int_{-\pi}^{\pi} u_1' u_2' dx \tag{1.24}$$

Оператор A — самосопряженный, строго положительный, его собственные числа и собственные функции суть

$$\lambda_{0k} = k^2, \qquad \varphi_{0k} = \frac{1}{k \sqrt{\pi}} \sin kx, \qquad \varphi_{1k} = \frac{1}{k \sqrt{\pi}} \cos kx \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.25}$$

Пусть G — группа вращений окружности. Для $g \in G$ положим (g есть поворот на угол g)

$$L_g u = u(x+g) \tag{1.26}$$

Условия 1.1—1.5 без труда проверяются, если в качестве E в (5) взять подпространство нечетных функций из H. Подсчитаем величину γ из (1.8). Уравнение (1.9) эквивалентно в данном случае краевой задаче

$$-v'' = k^2 v + \frac{1}{\pi k^2}\sin kx\cos kx, \qquad v(x+2\pi)\equiv v(x), \qquad v\perp \varphi_{0k}, \varphi_{1k} \tag{1.27}$$

Пользуясь уравнениями (1.27) и (1.8), находим

$$v = \frac{1}{6k^3\pi}\sin 2kx, \qquad \gamma = -\int_{-\pi}^{\pi}(v\varphi_{0k}' + v'\varphi_{0k})\varphi_{0k}\,dx = \frac{1}{12\pi k^4} > 0 \tag{1.28}$$

Согласно теореме 1.1, когда λ, возрастая, проходит одно из значений $\lambda_{0k} = k^2$ ($k = 1, 2, \ldots$), рождается новое решение

$$u_k = \frac{1}{k}\sqrt{12}\,(\lambda-\lambda_k)^{1/2}\sin kx + O(\lambda-\lambda_k) \tag{1.29}$$

Все остальные решения, ответвляющиеся от нулевого, получаются из (1.29) преобразованиями (1.26).

§ 2. Применение к задаче конвекции. Свободная конвекция в жидкости, заполняющей ограниченную область Ω, описывается системой

$$\nu\Delta\mathrm{v} - \nabla p = (\mathrm{v},\nabla)\,\mathrm{v} + \beta\, T\mathrm{g}, \quad \chi\Delta T - \mathrm{v}\cdot\nabla T = c v_3, \quad \operatorname{div}\mathrm{v} = 0 \tag{2.1}$$

Будем считать, что на (достаточно гладкой) границе S области Ω выполняются краевые условия

$$v = 0, \qquad T = 0 \tag{2.2}$$

Задача (2.1), (2.2) в [4,3] сводится к операторному уравнению

$$\mathrm{v} = K(\mathrm{v}, c) = c\,A\mathrm{v} + R\mathrm{v} \tag{2.3}$$

в гильбертовом пространстве H_1 соленоидальных векторов, исчезающих на границе S и принадлежащих $W_2^{(1)}$. Это сведение выполняется следующим образом. Пусть $\mathrm{v}\in H_1$, $f(x)\in L_{6/5}(\Omega)$. Обозначим через $T' = B_{\mathrm{v}} f$ обобщенное решение краевой задачи

$$\chi\Delta T' - v\cdot\nabla T' = f, \qquad T'|_S = 0 \tag{2.4}$$

Второе из уравнений (2.1) дает теперь

$$\mathrm{v} = cB_{\mathrm{v}}\, v_3 = cM\,\mathrm{v} \tag{2.5}$$

Принцип сжатых отображений позволяет получить при малых $\mathrm{v}\in H_1$, разложение

$$M\mathrm{v} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k\mathrm{v}, \qquad M_1\mathrm{v} = B_0 v_3, \qquad M_k\mathrm{v} = B_0(\mathrm{v}\cdot\nabla M_{k-1}\mathrm{v}) \tag{2.6}$$

Оператор M действует из H_1 в H_2-гильбертово пространство функций, исчезающих на S, со скалярным произведением

$$(T', T'')_{H_2} = \int_{\Omega}\nabla T'\cdot\nabla T''\,dx$$

Далее, введем оператор L, восстанавливающий обобщенное решение линеаризованных уравнений Навье — Стокса по их правой части

$$\nu \triangle \mathbf{v} - \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0, \qquad \mathbf{v} = L\mathbf{f} \tag{2.7}$$

Теперь уже легко перейти от (2.1) к (2.3), причем

$$K(\mathbf{v}, c) = L(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + \beta c L(\mathbf{g}M\mathbf{v})$$

$$A\mathbf{v} = \beta L(\mathbf{g}M_1\mathbf{v}), \qquad R\mathbf{v} = L(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + \beta c \sum_{k=2}^{\infty} L(\mathbf{g}M_k\mathbf{v}) \tag{2.8}$$

Оператор A — вполне непрерывный, самосопряженный, строго положительный [4]; его спектр состоит из положительных характеристических чисел. Обозначим наименьшее характеристическое число через c_0. Будем считать его простым; соответствующий собственный вектор обозначим через φ:

$$\varphi = c_0 A\varphi \tag{2.9}$$

Полагая $\tau = c_0 B_0 \varphi_3$, убеждаемся в том, что выполняются уравнения

$$\nu \triangle \varphi - \nabla q = \beta\tau\mathbf{g}, \qquad \operatorname{div} \varphi = 0$$
$$\chi\triangle\tau = c_0\varphi_3, \qquad \tau|_S = 0, \quad \varphi|_S = 0 \tag{2.10}$$

Введем еще вектор $\mathbf{w} \in H_1$, и функцию $\theta \in H_2$ как решение системы

$$\nu\triangle\mathbf{w} - \nabla p = (\varphi, \nabla)\varphi + \beta\theta\mathbf{g}, \qquad \chi\triangle\theta = c_0 w_3 + \varphi\cdot\nabla\tau$$
$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{w}|_S = 0, \qquad \theta|_S = 0, \qquad \mathbf{w} \perp \varphi \tag{2.11}$$

Лемма 2.1. Задача (2.1) разрешима, и решение ее единственно.

Доказательство. Перейдем от (2.11) к операторному уравнению в H_1. Имеем

$$\theta = c_0 B_0 w_3 + B_0(\varphi\cdot\nabla\tau) = c_0(M_1\mathbf{w} + M_2\varphi), \; \mathbf{w} = c_0 A\mathbf{w} + L(\varphi_1\nabla)\varphi, \; \mathbf{w}\perp\varphi \tag{2.12}$$

Если второе из уравнений (2.12) имеет единственное решение, то функция θ определяется первым уравнением. Далее, из результатов [7, 8, 4] следует, что $\mathbf{w}$, θ являются сколь угодно гладкими в $\bar\Omega$, если граница S достаточно гладкая.

Остается, таким образом, проверить условие разрешимости уравнения, определяющего $\mathbf{w}$ — ортогональность свободного члена уравнения к собственному вектору φ. Имеем

$$(L(\varphi, \nabla)\varphi, \varphi)_{H_1} = -\int_\Omega \triangle L(\varphi, \nabla)\varphi\cdot\varphi\, dx = -\frac{1}{\nu}\int_\Omega [(\varphi, \nabla)\varphi + \nabla p]\cdot\varphi\, dx = 0 \tag{2.13}$$

Лемма доказана.

Подсчитаем теперь величину γ, определенную в (1.8). Ввиду самосопряженности оператора A, в (1.8) надо взять $\psi_0 = \varphi_0 = \varphi$. Положим

$$\mathbf{u} = R_{20}(\mathbf{w}, \varphi) + R_{30}\varphi \tag{2.14}$$

При помощи (2.8) получим (2.15)

$$\mathbf{u} = L[(\mathbf{w},\nabla)\varphi + (\varphi, \nabla)\mathbf{w}] + \beta c_0 L[\mathbf{g}B_0(\mathbf{w}\cdot\nabla B_0\varphi_3 + \varphi\cdot\nabla B_0 \mathbf{w}_3 + \varphi\cdot\nabla M_2\varphi)]$$

Согласно (1.8), (2.14), (2.15) имеем

$$\gamma = -(\mathbf{u}, \varphi)_{H_1} = \int_\Omega \triangle\mathbf{u}\cdot\varphi\, dx = \frac{1}{\nu}\int_\Omega (\varphi, \nabla)\mathbf{w}\cdot\varphi\, dx +$$
$$+\frac{\beta g c_0}{\nu}\int_\Omega \varphi_3 B_0(\mathbf{w}\cdot\nabla B_0\varphi_3 + \varphi\cdot\nabla B_0 w_3 + \varphi\cdot\nabla M_2\varphi)\, dx \tag{2.16}$$

Здесь и далее пользуемся следующими равенствами, которые легко вывести интегрированием по частям с использованием соленоидальности векторов $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\varphi}$

$$\int_\Omega (\mathbf{w}, \nabla)\,\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx = 0, \qquad \int_\Omega (\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\,\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx = -\int_\Omega \mathbf{w}\cdot(\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\,\boldsymbol{\varphi}\,dx \tag{2.17}$$

$$\int_\Omega \tau\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla\tau\,dx = 0$$

Теперь, используя самосопряженность оператора B_0 и равенства (2.10), (2.12), (2.17), приведем (2.16) к виду

$$\gamma = -\frac{1}{\nu}\int_\Omega \mathbf{w}\cdot(\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\,\boldsymbol{\varphi}\,dx - \frac{\beta g}{\nu c_0}\int_\Omega \theta\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla\tau\,dx \tag{2.18}$$

Наконец, если подставить в (2.18) вместо $(\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla\tau$ их выражения, вытекающие из (2.11), и проинтегрировать по частям, получим

$$\gamma = \|\mathbf{w}\|_{H_1}^2 + \frac{\beta g\chi}{\nu c_0}\|\theta\|_{H_2}^2 + \frac{2\beta g}{\nu}\int_\Omega \theta w_3\,dx \tag{2.19}$$

Лемма 2.2. Пусть $\mathbf{v}\in H_1$, $T\in H_2$. Тогда справедливо неравенство

$$J(\mathbf{v}, T) = \nu\|\mathbf{v}\|_{H_1}^2 + \frac{\beta g\chi}{c_0}\|T\|_{H_2}^2 + 2\beta g\int_\Omega T v_3\,dx \geqslant 0 \tag{2.20}$$

причем равенство имеет место только при условии

$$\mathbf{v} = \alpha\boldsymbol{\varphi}, \qquad T = \alpha\tau, \qquad \alpha = \mathrm{const} \tag{2.21}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$, τ — собственное решение задачи (2.10).

Доказательство. Согласно классическому вариационному принципу, эквивалентному первой краевой задаче для уравнения Пуассона, функционал $J(\mathbf{v}, T)$ при фиксированном $\mathbf{v}\in H_1$, достигает минимума, когда T есть решение краевой задачи

$$\chi\,\Delta T = c_0 v_3, \qquad T\,|_S = 0 \tag{2.22}$$

или, другими словами, при $T = c_0 B_0 v_3$. Таким образом, выполняется неравенство

$$J(\mathbf{v}, T) \geqslant J(\mathbf{v}, c_0 B_0 v_3) = \nu\|\mathbf{v}\|_{H_1}^2 - \beta g\chi c_0\|B_0 v_3\|_{H_2}^2 \tag{2.23}$$

Но для наименьшего характеристического числа c_0 оператора A из (2.9) справедлив вариационный принцип (см. [4]):

$$\frac{1}{c_0} = \max_{\mathbf{v}\in H_1}\frac{(A\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_1}}{\|\mathbf{v}\|_{H_1}^2} = \frac{\beta g\chi}{\nu}\max_{\mathbf{v}\in H_1}\frac{\|B_0 v_3\|_{H_2}^2}{\|\mathbf{v}\|_{H_1}^2} \tag{2.24}$$

причем максимум достигается при $\mathbf{v} = \alpha\boldsymbol{\varphi}$ и только в этом случае. Из (2.23), (2.24) следует, что минимум функционала $J(\mathbf{v}, T)$ равен нулю и достигается при $\mathbf{v} = \alpha\boldsymbol{\varphi}$, $T = c_0 B_0 v_3 = \alpha\tau$. Лемма доказана.

Так как $\gamma = J(\mathbf{w}, \theta)\,/\,\nu$, из леммы 2.2 немедленно следует, что $\gamma \geqslant 0$. Покажем, что γ строго положительно. Так как, согласно определению (2.11), $\mathbf{w}\perp\boldsymbol{\varphi}$, из равенства $\mathbf{w} = \alpha\boldsymbol{\varphi}$ следовало бы, что $\alpha = 0$, а значит $\mathbf{w} = 0$; $\theta = 0$. Тогда из (2.11) вытекают равенства

$$(\boldsymbol{\varphi}, \nabla)\,\boldsymbol{\varphi} = -\nabla p, \qquad \boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla\tau = 0 \tag{2.25}$$

Лемма 2.3. Пусть $\boldsymbol{\varphi}$, τ — решение системы (2.10) и пусть для него выполняется второе из уравнений (2.25). Тогда $\boldsymbol{\varphi} = 0$, $\tau = 0$.

Доказательство. В силу (2.25) имеем

$$0=\int_\Omega x_3\varphi\cdot\nabla\tau\,dx=-\int_\Omega\tau\varphi_3\,dx \tag{2.26}$$

Теперь умножая первое и третье уравнения системы (2.10) на φ и на τ соответственно и интегрируя по области Ω, с использованием (2.26), получаем

$$\nu\|\varphi\|_{H_1}^2=-\beta g\int_\Omega\tau\varphi_3dx=0,\qquad \chi\|\tau\|_{H_2}^2=-c_0\int_\Omega\tau\varphi_3\,dx=0 \tag{2.27}$$

Итак, $\varphi=0$, $\tau=0$. Лемма доказана

Из леммы 2.3, как показывает предшествующее рассуждение, следует, что $\gamma>0$. Пользуясь замечанием к теореме 1.1, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.1. Пусть наименьшее собственное число c_0 линеаризованной задачи (2.10) — простое. Тогда при $c>c_0$ и достаточно близких к c_0 существует два ненулевых решения операторного уравнения (2.3) или задачи (2.1)

$$\mathbf{v}=\mp\sqrt{(c-c_0)/c_0\gamma}\,\varphi+O(c-c_0),\qquad T=\mp\sqrt{(c-c_0)/c_0\gamma}\,\tau+O(c-c_0) \tag{2.28}$$

Здесь положительная постоянная γ определяется посредством f (2.18) или (2.19)[1].

При любом $c\leqslant c_0$ задача (2.1) имеет единственное решение $\mathbf{v}=0$, $T=0$, а при $c>c_0$ и близком к c_0 имеет ровно три решения: нулевое и пару решений (2.28). Весь интервал (c_0, c_1), где c_1 — второе собственное число, принадлежит спектру уравнения (2.3).

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение теоремы. Разобьем его на несколько лемм.

Лемма 2.4. Все решения уравнения (2.3) находятся внутри шара пространства H_1, радиуса m, зависящего только от области Ω и параметров, входящих в (2.1).

Доказательство. Для любого $\mathbf{v}\in H_1$, $\varphi\in H_2$ справедливы неравенства типа теорем вложения С. Л. Соболева

$$\|\mathbf{v}\|_{L_p}\leqslant m_p\|\mathbf{v}\|_{H_1},\qquad \|\varphi\|_{L_p}\leqslant m_p\|\varphi\|_{H_2}\qquad (1\leqslant p\leqslant 6) \tag{2.29}$$

Определим функцию $\psi(x)$, дважды непрерывно дифференцируемую в Ω и такую, что $\psi|_S=cx_3$. Можно считать, кроме того, что выполняется неравенство

$$\|\psi\|_{L_4}\leqslant\varepsilon \tag{2.30}$$

где ε сколь угодно мало. Функцию ψ легко построить явно, считая ее в пограничной полоске полиномом относительно $\rho(x)$ — расстояния точки x до границы S, а вне пограничной полоски, полагая $\psi=0$. Сделаем в уравнениях (2.1) замену

$$T=T_0+\psi-cx_3 \tag{2.31}$$

Функция T_0 удовлетворяет условиям

$$\chi\Delta T_0-\mathbf{v}\cdot\nabla T_0=-\chi\Delta\psi+\mathbf{v}\cdot\nabla\psi,\qquad T_0|_S=0 \tag{2.32}$$

---

[1] На возможность существования пары вторичных конвекционных течений при сверхкритических значениях градиента температуры указывалось в [9].

Умножая (2.32) на T_0 и интегрируя по Ω, получим

$$\chi \| T_0 \|_{H_2}{}^2 = -\chi \int\limits_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla T_0 dx - \int\limits_{\Omega} \psi \mathbf{v} \cdot \nabla T_0 dx \tag{2.33}$$

Из (2.33), применяя неравенство Гельдера и теорему вложения (2.29), выводим

$$\chi \| T_0 \|_{H_2} \leqslant \chi \| \nabla\psi \|_{L_2} + m_4 \| \psi \|_{L_4} \cdot \| \mathbf{v} \|_{H_1} \tag{2.34}$$

Теперь умножим первое из уравнений (2.1) на $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по Ω. В результате получим

$$\nu \| \mathbf{v} \|_{H_1}{}^2 = -\beta g \int\limits_{\Omega} (T_0 + \psi)\, v_3 dx \tag{2.35}$$

Из (2.35) при помощи (2.29) выводим

$$\nu \| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant \beta g m_4{}^2 \| T_0 \|_{H_2} + \beta g m_2 \| \psi \|_{L_2} \tag{2.36}$$

Теперь нужная оценка легко следует из (2.30), (2.35), (2.36), если положить $\varepsilon = \chi\nu \,/\, 2\beta g m_4{}^3$, и имеет вид

$$\| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant \frac{2\beta g}{\nu} (m_4{}^2 \| \nabla\psi \|_{L_2} + m_2 \| \psi \|_{L_2}) = m \tag{2.37}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5. При $c \leqslant c_0$ задача (2.1), (2.2) имеет лишь нулевое решение.

Доказательство. Так как случай $c < c_0$ рассмотрен в [9, 4], будем считать $c = c_0$. Умножая первое из уравнений (2.1) на $\mathbf{v}$, второе на $\beta g T \,/\, c_0$, интегрируя по Ω и складывая, получим

$$J(\mathbf{v}, T) = 0 \tag{2.38}$$

Из (2.38), согласно лемме 2.2, следует, что $\mathbf{v} = \alpha\varphi$, $T = \alpha\tau$ ($\alpha = \text{const}$). Но тогда должны выполняться соотношения (2.25) (где вместо p стоит новая функция). А это, согласно лемме 2.3, означает, что $\alpha = 0$. Лемма доказана.

Из общей теории ветвления решений операторных уравнений [6] следует существование таких чисел μ_0, m_0, что при $| c - c_0 | < \mu_0$, уравнение (2.3) не имеет в шаре $\| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant m_0$ других решений, кроме нулевого и (2.28). Введем обозначения

$$\inf \| \mathbf{v} - K(\mathbf{v}, c_0) \|_{H_1} = \delta_1, \ \sup \| A\mathbf{v} \|_{H_1} = \delta_2 > 0 \tag{2.39}$$

$$(m_0 \leqslant \| \mathbf{v} \|_{H_1} < m_1, \ m_1 = \max m, \ c_0 \leqslant c \leqslant c_1)$$

Так как при $c = c_0$ уравнение (2.3) не имеет ненулевых решений, а оператор K вполне непрерывен, $\delta_1 > 0$. Поэтому уравнение (2.3) вне шара $\| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant m_0$ не может иметь решений, если

$$0 < c - c_0 < \delta_1 \,/\, \delta_2 \tag{2.40}$$

Действительно, вне шара $\| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant m_1$, решений нет, согласно лемме (2.4), а в слое $m_0 \leqslant \| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant m_1$ их нет ввиду простой оценки

$$\| \mathbf{v} - K(\mathbf{v}, c) \|_{H_1} \geqslant \| \mathbf{v} - K(\mathbf{v}, c_0) \|_{H_1} - (c - c_0) \| A\mathbf{v} \|_{H_1} \geqslant$$
$$\geqslant \delta_1 - (c - c_0)\delta_2 > 0 \tag{2.41}$$

Итак, при условии (2.40), все решения уравнения (2.3) лежат в шаре $\| \mathbf{v} \|_{H_1} \leqslant m_0$, а в этом шаре их ровно три. Наконец, из леммы 2.4 следует,

что вращение векторного поля $\mathbf{v} - K(\mathbf{v}, c)$ на больших сферах равно $+1$. Так как индекс нулевого решения при $c_0 < c < c_1$ равен -1, должны существовать ненулевые решения (см. [5,1]). Теорема 2.1 полностью доказана.

Пример 1. *Конвекция в вертикальном цилиндре.* Укажем здесь без подробного обоснования один случай, когда спектральную задачу (2.10) можно решить асимптотическим методом. Пусть область Ω представляет собой цилиндр с вертикальной осью и нормальным сечением ω. Будем интересоваться тем случаем, когда высота цилиндра h велика.

Сделаем в (2.10) замену переменных $z = h\zeta / d$, где d — диаметр области ω. Будем искать решение системы (2.10), отвечающее n-му собственному числу c_n, в виде ряда по степеням малого параметра[1] $\varepsilon = d / h$

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_k, \qquad \tau = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_k, \qquad q = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k q_{k+1}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_{nk} \tag{2.42}$$

Подставляя (2.42) в (2.10), легко выводим, что

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0, \qquad q_0 = q_0(\zeta) = a\zeta + \text{const}, \qquad \varphi_{03} = w(x_1, x_2), \qquad \tau_0 = \tau_0(x_1, x_2)$$

а для определения c_{n0} получается спектральная задача

$$\nu \bigtriangleup w = a + \beta g \tau_0, \qquad \chi \bigtriangleup \tau_0 = c_{n0} w, \qquad w|_{S_0} = 0, \qquad \tau_0|_{S_0} = 0, \qquad \int\limits_{\omega} w\,dx_1\,dx_2 = 0 \tag{2.43}$$

Последнее из условий (2.43) означает, что поток скорости сквозь поперечное сечение ω равен нулю и является следствием условия прилипания на границе S; S_0 — граница области ω; a — неизвестная постоянная.

В ряде случаев можно получить явное решение задачи (2.43) (например, если ω — круг). Рассмотрим подробнее плоскую задачу конвекции в прямоугольнике. В этом случае $w = w(x)$, $\tau_0 = \tau_0(x)$, $x = x_1$, и задача (2.43) принимает вид ($d = 2$)

$$\nu w'' = a + \beta g \tau_0, \qquad \chi \tau_0'' = c_{n0} w, \qquad w = \tau = 0 \quad (x = \mp 1); \quad \int\limits_{-1}^{1} w(x)\,dx = 0 \tag{2.44}$$

Решения задачи (2.44) делятся на четные и нечетные. Четные имеют вид

$$w(x) = \cos\rho\,\mathrm{ch}\,\rho x - \mathrm{ch}\rho\cos\rho x \tag{2.45}$$

Функция τ_0 определяется из первого уравнения (2.44); постоянная a определяется условием $\tau_0(1) = 0$; соответствующее собственное значение находим из уравнения

$$\mathrm{tg}\rho = \mathrm{th}\rho, \qquad c = \varkappa\nu\rho^4 / \beta g, \qquad \rho \neq 0 \tag{2.46}$$

Для нечетных решений имеем

$$a = 0, \qquad w = \beta g \sin\rho x, \qquad \tau = -\nu\rho^2 \sin\rho x, \qquad \rho = k\pi \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.47}$$

Из (2.45) — (2.47) следует, что все собственные числа c_{0n} — простые. Действительно, уравнение (2.46) имеет по одному корню внутри каждого отрезка $(k\pi, (2k+1)\pi/2)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и никаких других корней. В частности, наименьший корень $\rho_1 = 3.9264$. Но $c_n \to c_{0n}$ при $\varepsilon \to 0$ (подчеркиваем, что сходимость неравномерна по n). Поэтому первые собственные числа $c_0, c_1, \ldots c_k$ (k — любое заданное число) — простые, если ε достаточно мало.

---

[1] Разложение (2.42) справедливо вдали от доньев $\zeta = 0,1$, где имеют место явления типа пограничного слоя. Важно, однако, что c_{n0} определяется независимо от построения погранслойных решений.

Итак, теорема 2.1 применима к конвекции в вертикальном прямоугольном сосуде, когда его высота много больше ширины.

Замечание. Аналогичный результат нетрудно получить и в случае круглого цилиндра (соответствующие вычисления проделаны в [10], стр. 50). Вероятно, первое собственное число задачи (2.44) всегда простое. Следующие собственные числа уже могут быть кратными, как показывает пример, когда ω — прямоугольник. Но, как и в периодической задаче [2,3], кратные собственные числа появляются редко, лишь при выполнении специальных соотношений между сторонами.

Пример 2. *Двумерная конвекция в горизонтальном канале.*

Рассмотрим двумерную задачу (2.1) в полосе $0 \leqslant z \leqslant h$. Будем считать, что скорость $\mathbf{v}$ периодична по $x = x_1$ с периодом $2\pi / \alpha_0$ и что поток скорости сквозь поперечное сечение равен нулю. Как показано в [3], для всех α_0, кроме некоторого счетного множества, собственные значения соответствующей линеаризованной задачи (2.10) двукратны: им отвечают собственные решения

$$\tau_1(x, z) = \pi(z)\cos\alpha x, \quad \tau_2(x, z) = \pi(z)\sin\alpha x, \quad \varphi_i = L(\beta\tau_i\, \mathbf{g}) \ (i = 1, 2) \tag{2.48}$$

Задача инвариантна относительно сдвига вдоль оси x. Введем операторы L_g и $\mathbf{L}_g$:

$$\tau_g = L_g\tau(x, z) = \tau(x + g, z), \quad \varphi_g = \varphi(x + g, z) = \mathbf{L}_g\varphi \tag{2.49}$$

Для периодических по x функций τ и векторов φ можно считать, что g — элемент группы G вращений окружности. Условия 1.1—1.5 теоремы 1.1, очевидно, выполняются. Справедливость условия (1.8) следует из теоремы 2.1.

Итак, двумерная конвекция в канале определяется периодом $2\pi / \alpha_0$ однозначно (с точностью до сдвига вдоль оси x) для всех α_0, кроме счетного множества.

Пример 3. *Ячеистая конвекция в слое.* Рассмотрим теперь задачу о двоякопериодической или гексагональной конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу [3]. В тех же условиях, что и в статье [3], пользуясь теоремой 2.1, получаем, что при переходе градиента температуры через первое критическое значение рождается пара решений. Напомним, что речь здесь идет о течениях, удовлетворяющих условиям периодичности (или гексагональности) и некоторым дополнительным условиям четности. Заметим, что в данном примере легко показать, что ветвление происходит аналогичным образом не только для первого, но и для всех последующих собственных значений. Однако при этом рождаются уже неустойчивые решения.

Следует еще указать, что вторичные течения здесь отличаются несущественно: они получаются одно из другого смещением в плоскости $x_1 x_2$.

Поступила 9 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Пример рождения втричного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 453—467.
2. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
3. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
4. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 295—300.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, 1956.
6. Вайнберг М.М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. наук, 1962, т. XVII, вып. 2 (104), стр. 13—75.
7. Ворович И. И., Юдович В. И. Стационарное течение вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 2, стр. 542—545.
8. Ворович И. И., Юдович В. И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, т. 5 (95) вып. 4. стр. 393—428.
9. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2. стр. 197—204.
10. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952.