Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Г. С. Шелементьев

(Свердловск)

Рассматривается задача о стабилизации неголономных систем в окрестности семейства неустойчивых положений равновесия, строится стабилизирующее управляющее воздействие, аналитическое по координатам и скоростям.

§ 1. Рассмотрим управляемую механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n + l)$, стесненными l неголономными связями. Примем, что связи линейны и стационарны и представляются, следовательно, в виде системы l неинтегрируемых дифференциальных равенств

$$\sum_{i=1}^{n+l} \varkappa_{ki}(q_1, \ldots, q_{n+l})\, q_i^{\cdot} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{1.1}$$

где $\varkappa_{ki}(q)$ — функции только обобщенных координат q_i. Предположим, что силы, действующие на систему, обладают силовой функцией. Тогда движение рассматриваемой системы можно описать уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями связи [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + b_i u + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \varkappa_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n + l) \tag{1.2}$$

Здесь $T(q^{\cdot})$ — кинетическая, $\Pi(q)$ — потенциальная энергии системы, u — скаляр, характеризующий величину управляющего воздействия, $b_i(q)$ — функции, определяющие направление воздействия u в пространстве $\{q_i\}$, функции T, Π, b_i заданы, λ_k — неопределенные множители. Рассмотрим здесь подробно лишь случай $l = 1$. Рассуждения переносятся и на более общие случаи без принципиальных затруднений.

При отсутствии управляющего воздействия $(u \equiv 0)$ положение равновесия системы описывается системой равенств

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \lambda \varkappa_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n + 1) \tag{1.3}$$

Отсюда следует, как известно [2, 3], что положения равновесия неголономной системы не являются изолированными точками, а образуют многообразие (в нашем случае — однопараметрическое), которое после исключения из (1.3) множителя связи λ, опишем для определенности уравнениями [1]

$$q_i^0 = q_i^0(q_{n+1}), \qquad q^{\cdot 0}_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n + 1) \tag{1.4}$$

[1] Здесь и ниже как и в статье [2], особые случаи отбрасываются.

Допустим, что положение равновесия (1.4) системы (1.2) при каждом значении $q_{n+1} = q$ из некоторого интервала $\alpha < q < \beta$ является неустойчивым. Тогда можно поставить задачу о стабилизации ([4], стр. 476) системы (1.1), (1.2), т. е. задачу о выборе такой управляющей силы $u(q_1, \ldots, q_{n+1}, q_1^\cdot, \ldots, q_{n+1}^\cdot)$, при действии которой положение равновесия становилось бы асимптотически устойчивым. Известно, что в случае отсутствия управляющей силы u, полной асимптотической устойчивости каждого выделенного положения равновесия (1.4) неголономной системы быть не может [2, 3]. Естественно напрашивается предположение, что и наложением управления $u = u(q, q^\cdot)$ такой устойчивости добиться нельзя.

Для полноты изложения рассмотрим, как это обстоятельство проявляется с позиций теории стабилизации, развитой в работе [5].

Примем одно из положений равновесия (1.4), соответствующее значению $q_{n+1} = q^*$ за невозмущенное и составим уравнение возмущенного движения [4,6] системы (1.1), (1.2) в окрестности этого положения $q_i^\circ = q_i^\circ(q^*)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Перейдя к новым координатам $s_i = q_i - q_i^\circ(q^*)$ и исключая множитель связи λ, получим следующие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_i^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial s_i} + b_i u - + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial s_{n+1}^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s_{n+1}} + \frac{\partial \Pi}{\partial s_{n+1}} - b_{n+1} u\right]\omega_i \qquad (1.5)$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

$$s_{n+1}^\cdot = \sum_{i=1}^{n} \omega_i s_i^\cdot \qquad (1.6)$$

причем при $u = 0$ система (1.5) обладает равновесием $s_j = 0$. Введем новую переменную

$$\xi = s_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \omega_i^\circ s_i$$

Здесь ω_i° суть значения функций $\omega_i(s_1, \ldots, s_{n+1})$ в (1.6) при нулевых значениях координат s_j. Тогда, учитывая, что кинетическая и потенциальная энергии системы

$$2T = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(s_1, \ldots, s_{n+1}) s_i^\cdot s_j^\cdot, \qquad 2\Pi = \sum_{i,j=1}^{n+1} b_{ij}(s_1, \ldots, s_{n+1}) s_i s_j$$

получим следующую систему уравнений движения

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} s_j^{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} s_j + \beta_i u + \gamma_i \xi + \varphi_i(\xi, s, s^\cdot, u) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1.7)$$

$$\xi^\cdot = \sum_{k+r=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}^{(kr)} \xi^k s_i^r s_j^\cdot \qquad (1.8)$$

Заметим, что разложение в ряд правой части уравнения (1.8) начинается членами не ниже второго порядка относительно координат и скоростей. Разрешив систему (1.7) относительно старших производных и выполнив замену $s_i = x_{2i-1}$, $s_i^\cdot = x_{2i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, приведем систему (1.7) к виду

$$x_{2i-1}^\cdot = x_{2i}, \qquad x_{2i}^\cdot = \sum_{j=1}^{n} a_{i,\,2j-1} x_{2j-1} + b_i u + c_i \xi + \varphi_i(\xi, x, u) \qquad (1.9)$$

Допустим, что подсистема

$$x^\cdot = A(q^*)\, x + b(q^*)\, u \qquad (x = \{x_1, \ldots, x_{2n}\}) \qquad (1.10)$$

получающаяся из (1.9) при $\xi = 0$ и при отбрасывании φ_i удовлетворяет условиям стабилизируемости [5,7]. Тогда ее невозмущенное движение можно сделать асимптотически устойчивым за счет управления

$$u_*(x) = \sum_{i=1}^{2n} p_i x_i \tag{1.11}$$

Будем искать для полной системы (1.8), (1.9) стабилизирующее воздействие u в виде

$$u(x, \xi) = u_*(x) + u(\xi, |\xi|) \tag{1.12}$$

допуская и неаналитические функции

$$u(\xi, |\xi|) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi^i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i |\xi|^i \tag{1.13}$$

Это иногда расширяет возможности стабилизации системы [5]. В соответствии с теорией критических случаев [6,8] введем преобразование Ляпунова

$$\xi = \xi, \qquad x_i = z_i + w_i(\xi) \tag{1.14}$$

Здесь z_i — новая переменная; функции $w_i(\xi)$ в достаточно малой окрестности начала координат $x = 0$, $\xi = 0$ удовлетворяют уравнениям

$$x_{2i} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{2n} a_{i,\,2j-1} x_{2j-1} + c_i\xi + b_i(u_*(x) + u(\xi, |\xi|)) + \varphi_i(\xi, |\xi|, x) = 0 \tag{1.15}$$

Преобразование (1.14) приводит систему (1.8), (1.9) к стандартному виду

$$z_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^{2n} d_{ij} z_j + \Phi_i(\xi, z_1, \ldots, z_{2n}), \qquad \xi^{\cdot} = \Phi(\xi, z_1, \ldots, z_{2n})$$

При этом выясняется, что функция $\Phi^\circ(\xi, z_1, \ldots, z_{2n}) = \Phi(\xi, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, каковы бы ни были α_{ij}, β_{ij} в (1.7). Таким образом, имеем особенный случай, когда стабилизация системы (1.8), (1.9) управлением (1.12) до асимптотической устойчивости не получается. Однако, как и всегда в таком случае при управлении $u = u_*(x)$ согласно (1.11) невозмущенное движение $x = 0$, $\xi = 0$ будет устойчивым по Ляпунову, и каждое возмущенное движение, достаточно близкое к нему, асимптотически приближается к некоторому установившемуся движению $\xi = q$, $x_i = 0$, близкому к точке $\xi = 0$, $x = 0$.

Таким образом, в данном случае целесообразно поставить вопрос о построении управления $u = u(q, q^{\cdot})$, которое стабилизирует до асимптотической устойчивости не отдельные точки $q = q^*$, $q_i = q_i^\circ(q^*)$, но сразу множество положений равновесия $q_i^\circ(q)$. Построение такого управления и составляет содержание этой статьи.

§ 2. Примем следующее определение. *Определение* 2.1. Многообразие положений равновесия

$$q^0{}_i = q_i^\circ(q) \qquad (\mu \leqslant q \leqslant \nu, \quad \alpha < \mu < \nu < \beta; \quad i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

неголономной системы (1.1), (1.2) будем называть асимптотически устойчивым, если любое из этих положений равновесия устойчиво по Ляпунову и если для каждого возмущенного движения, близкого какому-либо из этих равновесий $q_i^\circ(q^*)$, выполняется условие

$$\lim q_i = q_i^\circ(q^* + \varepsilon) \quad \text{при } t \to \infty, \qquad \lim q = q^* + \varepsilon \quad \text{при } t \to \infty$$

Здесь ε — величина сколь угодно малая, если малы начальные возмущения $q_i - q_i^\circ(q^*)$, $q - q^*$. Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача 2.1. Найти управление $u = u(q_i, q_i^{\cdot}, q, q^{\cdot})$ такое, чтобы многообразие положений равновесия $q_i = q_i^\circ(q)$ стало асимптотически устойчивым в смысле определения 2.1.

Выше было установлено, что для каждого фиксированного значения $q = q^*$, если система (1.10) стабилизируема, существует управление $u = u_*(x) = u(x, q^*)$, которое при малых отклонениях q от q^* и x от $x(q^*)$ приводит систему в положение равновесия, лежащее в малой окрестности точки $q = q^*$, $x = x(q^*)$. Для решения задачи 2.1 достаточно поэтому показать, что это управление u можно построить в виде достаточно хорошей функции от параметра q

$$u = \sum_{i=1}^{2n} p_i(q)\, x_i \tag{2.2}$$

Оказывается, что действительно при каждом q из отрезка $[\gamma, \vartheta]$, $(\alpha < \gamma < \mu < \nu < \vartheta < \beta)$ управление (2.2) можно построить в виде функции, аналитической по q. Для того чтобы показать это, воспользуемся методом функций Ляпунова в его связи с методом динамического программирования [9]. Итак, пусть система (1.10) удовлетворяет условиям стабилизируемости [5, 7] при каждом фиксированном q из отрезка $[\gamma, \vartheta]$. Будем искать функции $V(x, q)$ и $u(x, q)$, которые удовлетворяют критерию оптимальности [4] в задаче о минимуме интеграла

$$\int_0^\infty \Big(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 + u^2\Big) dt \tag{2.3}$$

на движениях системы (1.10). Важно, что эти функции оказываются аналитическими по q. В самом деле, имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть при $q = q^*$ задача об оптимальной стабилизации (1.10), (2.3) имеет решение. Обозначим символом

$$V(x, q^*) = \sum_{i,j=1}^{2n} \alpha_{ij}(q^*)\, x_i x_j$$

оптимальную функцию Ляпунова, которая удовлетворяет всем условиям критерия стабилизации. Тогда можно указать число $\delta > 0$ такое, что аналогичная задача об оптимальной стабилизации системы

$$x^{\cdot} = A(q)\, x + b(q) u \tag{2.4}$$

разрешима для всех q, лежащих в δ-окрестности точки q^*, и для этих q строятся оптимальные функции Ляпунова

$$V(x, q) = \sum_{i,j=1}^{2n} \alpha_{ij}(q)\, x_i x_j \tag{2.5}$$

причем коэффициенты $\alpha_{ij}(q)$ разлагаются в степенные ряды

$$\alpha_{ij}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(k)} (q - q^*)^k \tag{2.6}$$

сходящиеся в δ-окрестности точки q^*.

Доказательство. Разложим функции $a_{ij}(q)$ и $b_i(q)$ в (2.4) в ряд в окрестности точки $q = q^*$. Введя обозначение $q - q^* = y$, имеем

$$a_{ij}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} y^k, \qquad b_i(q) = \sum_{k=0}^{\infty} b_i^{(k)} y^k \tag{2.7}$$

Подставим теперь (2.7) в (2.4) и полученный результат запишем в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} a_{ij}^{(0)} x_j + b_i^{(0)} u + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} y^k a_{ij}^{(k)} x_j + \sum_{k=1}^{\infty} y^k b_i^{(k)} u \tag{2.8}$$

При $y = 0$ (т. е. при $q = q^*$) система (2.8) перейдет в (2.4) и, следовательно, задача об оптимальной стабилизации разрешима и существует оптимальная функция Ляпунова $V_0(x, q^*)$. Покажем, что для полной системы (2.8) при достаточно малых y существует также оптимальная функция Ляпунова

$$V(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i,\, j=1}^{2n} y^k \alpha_{ij}^{(k)} x_i x_j = \sum_{k=0}^{\infty} y^k V_k(x) \tag{2.9}$$

Для этого запишем уравнения Ляпунова — Беллмана

$$\begin{aligned} \min_u \Bigg[\sum_{i,\, j=1}^{2n} a_{ij}^{(0)} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} + u \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 + u^2 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,\, j=1}^{2n} y^k a_{ij}^{(k)} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} + u \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n} y^k b_i^{(k)} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Bigg] = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$u = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n} y^k b_i^{(k)} \frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) получаем для определения функции Ляпунова $V(x)$ следующие уравнения в частных производных:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i,\, j=1}^{2n} y^k a_{ij}^{(k)} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n} y^k b_i^{(k)} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.12) ищем в виде ряда (2.9)

$$V(x, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{2n} y^k \alpha_{ij}^{(k)} x_i x_j$$

При $y = 0$ это уравнение по условию леммы имеет решение $V = V_0(x, q^*)$, которое определяется из уравнения

$$\sum_{i,\, j=1}^{2n} a_{ij}^{(0)} x_j \frac{\partial V_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

и оптимальное управление $u^{(0)}$ равно

$$u^{(0)}(x, q^*) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_i}$$

при этом будет асимптотически устойчива система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} a_{ij}^{(0)} x_j - \frac{1}{2} b_i^{(0)} \sum_{j=1}^{2n} b_j^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_j} \qquad (i = 1, \ldots, 2n) \tag{2.13}$$

Подставим (2.9) в (2.11), и приравняв в полученном уравнении нулю коэффициенты при различных степенях y, получим следующие уравнения для определения функций $V_k(x)$:

$$\sum_{i,\,j=1}^{2n} a_{ij}^{(0)} x_j \frac{\partial V_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_i}\Big)^2 = 0$$

$$\sum_{s=0}^{k} \sum_{i,\,j=1}^{2n} a_{ij}^{(s)} x_j \frac{\partial V_{k-s}}{\partial x_i} - \frac{1}{4} \sum_{p,\,q\geqslant 0}^{p+q=k} \Big(\sum_{s=0}^{p} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(s)} \frac{\partial V_{p-s}}{\partial x_i}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{q} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(m)} \frac{\partial V_{q-m}}{\partial x_i}\Big) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots .)$$

Учитывая, что производная по времени от функции $V_k(x)$ в силу уравнений (2.13) имеет вид

$$\left[\frac{dV_k}{dt}\right]_{(2.13)} = \sum_{i,\,j=1}^{2n} a_{ij}^{(0)} x_j \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_i}\Big) \qquad (2.14)$$

для определения членов ряда (2.9) получаем зависимости

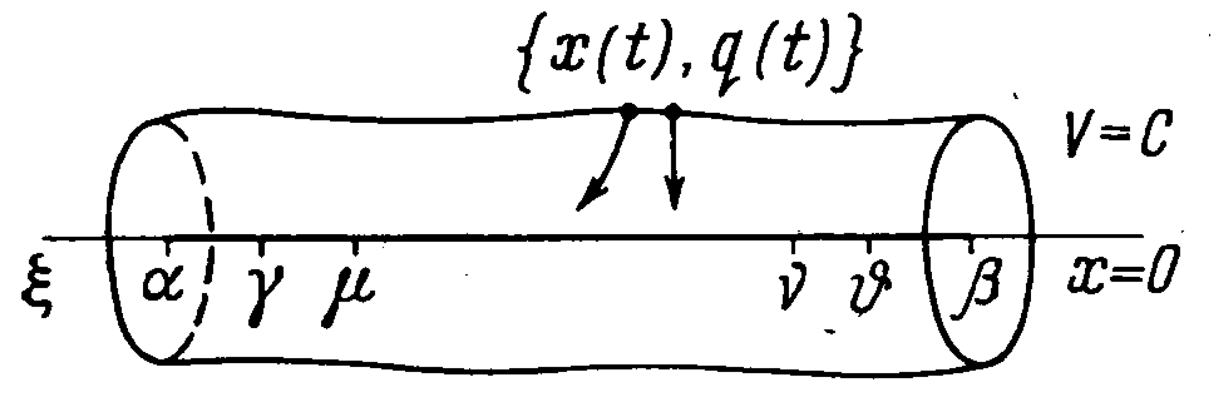
$$\left[\frac{dV_0}{dt}\right]_{(2.13)} = -\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_i}\Big)^2$$

$$\left[\frac{dV_k}{dt}\right]_{(2.13)} = -\sum_{s=1}^{k} \sum_{i,\,j=1}^{2n} a_{ij}^{(s)} x_j \frac{\partial V_{k-s}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_0}{\partial x_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^{(0)} \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\Big) + \qquad (2.15)$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{p,\,q\geqslant 0}^{p+q=k} \Big(\sum_{s=0}^{p} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(s)} \frac{\partial V_{p-s}}{\partial x_i}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{q} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(m)} \frac{\partial V_{q-m}}{\partial x_i}\Big)$$

Так как система (2.13) асимптотически устойчива, то по теореме Ляпунова ([4], стр. 67) существует единственное решение уравнений (2.15) при любом $k \geqslant 1$. Таким образом, зная $V_k(x)$, найдем $u_k(x)$, следовательно, можно определить последовательно члены любого порядка в ряду (2.9). При этом на каждом шаге существует единственное решение задачи. Сходимость ряда доказывается методом мажорант подобно тому, как это сделано для аналогичного случая в работе [10, 11].

После построения ряда (2.9) можно найти функцию $u^\circ(x, y)$ из условия (2.11). Следовательно, ряд для u° имеет вид



$$u^\circ(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k u_k^\circ(x) \qquad (2.16)$$

Здесь

$$u_k^\circ(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} b_i^{(k)} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \qquad (2.17)$$

Вследствие сходимости ряда (2.9) будет сходиться и ряд (2.16), (2.17) для u°.

После того, как доказана аналитичность управления $u(x, q)$, стабилизирующего систему (2.4) при каждом фиксированном q, далее обычными в таких случаях приемами (см. [2-4, 6]), опираясь на построенную функцию $V(q_i, q_i^{\cdot}, q)$, полная производная которой dV / dt в силу уравнений движения при $u = u(x, q)$ оказывается отрицательной, доказывается асимптотическая устойчивость многообразия $q_i = q_i^\circ(q)$ в смысле определения 2.1. Так как это делается по тому же плану, что и, например, в работе [2], на этом рассуждении здесь останавливаться не будем. Поясним лишь геометрическую картину явления. В пространстве $\{x, q\}$ поверхности $V(x, q) = C$ вследствие аналитической зависимости V от q и x, образуют гладкие трубки, охватывающие линию $x = 0$ (фигура).

Из свойства гладкости этих трубок, из того условия, что при фиксированном $q = q^*$ выполняется

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{q=q^*} = -\left(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 + u^2\right)$$

а также из равенства $\Phi(\xi, 0, \ldots, 0) = 0$ вытекает, что движение $\{x(t), q(t)\}$ направлено внутрь трубки, причем сдвиг его внутрь трубки за время dt имеет первый порядок по $\| x(t) \|$. Отсюда и следует справедливость сделанного утверждения. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Если при всех фиксированных q из отрезка $[\gamma, \vartheta]$ система (1.10) удовлетворяет условиям стабилизируемости [4], то при достаточно малых значениях y существует управление $u = u(q_i, q_i^{\cdot}, q)$, решающее задачу 2.1, и это управление имеет вид (2.16), (2.17).

Автор приносит глубокую благодарность Н. Н. Красовскому за постановку задачи и замечания.

Поступила 15 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость состояний равновесия неголономных систем. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Об устойчивости состояний равновесия неголономных систем. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, вып. 4.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд-во Наука, 1966.
5. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.
7. Кириллова Ф. М. К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
8. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня. Матем. сб. (новая серия), 1955, т. 37.
9. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Метод динамического программирования. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, вып. 4.
10. Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени. Сибирск. матем. ж., 1963, т. 4, вып. 2.
11. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.