СТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ю. П. Иванилов, Г. Н. Яковлев

(Москва)

Задача о равновесии жидкости, заключенной в сосуд при подогреве снизу, рассматривалась В. С. Сорокиным [1], В. И. Юдовичем, М. Р. Уховским [2], Вельтом [3]. Было установлено, что если число Релея λ превзойдет некоторое критическое значение λ_0, то в жидкости возникают вторичные стационарные течения.

Устойчивость проводящей жидкости при подогреве снизу исследовалась многими авторами. Наиболее полно и в общем виде такое исследование проведено В. С. Сорокиным и И. В. Сушкиным [4], в работе которых приведена соответствующая библиография, а также М. И. Шлиомисом [5]. Из результатов [4,5] ясна физическая картина явлений, возникающих при подогреве проводящей жидкости, и возможность существования вторичных стационарных и периодических течений.

Ниже доказывается существование стационарных конвективных течений в проводящей жидкости. В работе принята методика, предложенная в работе [2].

1. Примем, что плотность жидкости ρ^* связана с температурой T^* линейным соотношением

$$\rho^* = \rho_0 (1 - \alpha \Delta T^*), \qquad \Delta T^* = T^* - T_0^*$$

Здесь α — коэффициент объемного расширения, ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0^*.

Известно, что нагретая жидкость может находиться в равновесии только в том случае, когда температура T^* в точке $\mathbf{r}^*$ имеет вид $T^* = T_0^* + \beta \mathbf{l}\mathbf{r}^*$, где $\mathbf{l}$ — единичный вектор в направлении, обратном направлению силы тяжести.

В дальнейшем предполагаем β положительным, а местную температуру в жидкости запишем в форме

$$T^* = T_0^* + \beta \mathbf{l}\mathbf{r}^* + \theta^*$$

Будем рассматривать стационарные движения жидкости в ограниченной области Ω при постоянном температурном градиенте и постоянном магнитном поле во внешней среде. Введем безразмерные переменные

$$\mathbf{u}^* = \frac{\nu}{L}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{h}^* = \left(\frac{\rho_0\nu^3}{\mu_e L^2 \eta}\right)^{1/2}\mathbf{h}, \qquad T^* = \frac{\beta L \nu}{\varkappa} T, \qquad \theta^* = \frac{\beta L\nu}{\varkappa}\theta, \qquad x_i^* = L x_i$$

$$\left(\varkappa = \frac{k\rho_0}{c_v}, \quad \eta = (\mu_e\sigma)^{-1}\right)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость; L — характерный линейный размер; $\mathbf{u}, \mathbf{h}$ — векторы скорости жидкости и напряженности магнитного поля, индуцированного движением жидкости; x_i — декартовы координаты; k — коэффициент теплопроводности, c_v — удельная теплоемкость; η — коэффициент магнитной вязкости; σ — электропроводность; μ_e — магнитная проницаемость. Звездочкой отмечены размерные величины. Уравнения стационарного движения жидкости [6] примут вид,

$$\triangle \mathbf{u} = -\lambda\theta\mathbf{l} - R_m \mathbf{h}_{x_3} + \nabla\Phi + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - R_\sigma(\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathbf{h}, \qquad \triangle\theta = -\mathbf{u}_l + P(\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta$$

$$\triangle\mathbf{h} = -R_m\mathbf{u}_{x_3} + R_\sigma(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{h} - R_\sigma(\mathbf{h}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{h} = 0$$

$$\Phi = \frac{L^2}{\nu^2}\left[\frac{p^*}{\rho_0} + \frac{\mu_e H}{2\rho_0} - g\mathbf{l}\mathbf{r}^* + \frac{1}{2}\alpha\beta g(\mathbf{l}\mathbf{r}^*)^2\right] \tag{1.1}$$

$$\lambda = \frac{\alpha\beta g L^4}{\varkappa\nu}, \qquad P = \frac{\nu}{\varkappa}, \qquad R_m = HL\left(\frac{\mu_e}{\rho_0\nu\eta}\right)^{1/2}, \qquad \mathbf{u}_{x_3} \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_3}, \qquad u_l = \mathbf{u}\cdot\mathbf{l}$$

Здесь λ — число Релея, P — число Прандтля, R_σ — магнитное число Рейнольдса, R_m — число магнитного давления, p — давление, g — ускорение силы тяжести, H — величина напряженности внешнего магнитного поля, — u_l — проекция скорости на направление силы тяжести. Ось x_3 выбрана в направлении внешнего магнитного поля; кроме того принято обычное соглашение о пропуске знака суммирования по повторяющемуся индексу.

Первое уравнение (1.1) дает динамические уравнения, второе — уравнения теплопроводности, третье — уравнения индукции, четвертое — несжимаемости.

Если сосуд наполнен полностью и стенкой сосуда является идеальный проводник, то граничные условия при постоянном температурном градиенте во внешней среде будут следующими:

$$\theta = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{h}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль, $\boldsymbol{\tau}$ — произвольный вектор, касательный к стенке сосуда $\partial\Omega$.

Уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2) имеют тривиальное решение, соответствующее покоящейся жидкости

$$\mathbf{u} = \mathbf{h} = 0, \quad \theta = 0 \qquad (T^* = T_0^* + \beta \mathbf{lr}^*) \tag{1.3}$$

Наряду с задачей (1.1), (1.2) будем рассматривать соответствующую ей линеаризованную стационарную задачу

$$\Delta\mathbf{u} = -\lambda\theta\mathbf{l} - R_m\mathbf{h}_{x_3} + \nabla\Phi, \quad \Delta\mathbf{h} = -R_m\mathbf{u}_{x_3}, \quad \Delta\theta = -u_l, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{h} = 0 \tag{1.4}$$

в Ω с граничным условием (1.2) на $\partial\Omega$.

2. Определим некоторые функциональные пространства. Через H_u обозначим гильбертово пространство, являющееся замыканием множества достаточно гладких финитных в Ω соленоидальных векторов в норме, порожденной скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_u} = \int_\Omega \mathbf{u}_{x_i}\mathbf{v}_{x_i}\,dx = \int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}\,dx \tag{2.1}$$

Пространством H_h назовем подпространство, являющееся замыканием в норме, порожденной скалярным произведением (2.1), множества непрерывно дифференцируемых соленоидальных векторов, у которых $\mathbf{h}\cdot\mathbf{n} = 0$ на $\partial\Omega$.

Пространством H_0 назовем замыкание множества достаточно гладких финитных в Ω функций, в норме, порожденной скалярным произведением

$$(\theta, \Phi)_{H_\theta} = \int_\Omega \nabla\theta\cdot\nabla\Phi\,dx \tag{2.2}$$

Известно [7,8], что H_u, H_h, H_θ вкладываются в L_2. Таким образом, выше введенные нормы в соответствующих пространствах эквивалентны обычной норме W_2^1.

Введем еще гильбертово пространство H, элементами $\mathbf{f}$ которого являются пары $\mathbf{u} \in H_u$, $\mathbf{h} \in H_h$, а скалярное произведение $\mathbf{f} = \{\mathbf{u},\mathbf{h}\}$ и $\varphi = \{\mathbf{v},\boldsymbol{\psi}\}$ определено формулой

$$(\mathbf{f}, \varphi)_H = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_u} + (\mathbf{h}, \boldsymbol{\psi})_{H_h} \tag{2.3}$$

Назовем обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) тройку $\mathbf{u} \in H_u$, $\mathbf{h} \in H_h$, $\theta \in H_\theta$, удовлетворяющую интегральным тождествам

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_u} = \lambda\int_\Omega \theta u_l\,dx + R_m\int_\Omega \mathbf{h}_{x_3}\mathbf{v}\,dx - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{uv}\,dx + R_\sigma\int_\Omega (\mathbf{h}\cdot\nabla)\,\mathbf{hv}\,dx$$

$$(\mathbf{h}, \boldsymbol{\psi})_{H_h} = R_m\int_\Omega \mathbf{u}_{x_3}\boldsymbol{\psi}\,dx - R_\sigma\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{h}\boldsymbol{\psi}\,dx + R_\sigma\int_\Omega (\mathbf{h}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\boldsymbol{\psi}\,dx \tag{2.4}$$

$$(\theta, \Phi)_{H_\theta} = \int_\Omega u_l\Phi\,dx - P\int_\Omega (u\cdot\nabla)\,\theta\Phi\,dx, \quad \mathbf{v} \in H_u, \quad \boldsymbol{\psi} \in H_h, \quad \Phi \in H_\theta$$

Из результатов О. А. Ладыженской и В. А. Солонникова [7,9] следует, что обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) дважды непрерывно дифференцируемы [1] в Ω и удовлетворяют граничным условиям (1.2).

Аналогично определяется обобщенное решение для линейной задачи (1.4).

3. Сведем задачу (2.4) к операторным уравнениям. Для достаточно гладких функций $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_h$, θ,$\mathbf{F}$ определим операторы K_u, K_h, K_θ, K_f требованием, чтобы интегральные тождества

$$(K_u \mathbf{F}_u, \mathbf{v})_{H_u} = \int_\Omega \mathbf{F}_u \mathbf{v}\, dx, \quad (K_h \mathbf{F}_h, \boldsymbol{\psi})_{H_h} = \int_\Omega \mathbf{F}_h \boldsymbol{\psi}\, dx, \quad (K_\theta\ \theta, \Phi)_{H_\theta} = \int_\Omega \theta\Phi\, dx \tag{3.1}$$

$$(K_f \mathbf{F}, \mathbf{f})_H = (K_u \mathbf{F}_u, \mathbf{v})_{H_u} + (K_h \mathbf{F}_h, \boldsymbol{\psi})_{H_h} \tag{32}$$

выполнялись для любых $\mathbf{v} \in H_u$, $\psi \in H_h$, $\Phi \in H_\theta^{\cdot}$, $\mathbf{f} \in H$.

Лемма 3.1. Операторы K_f, K_u, K_h, K_θ ограничены и вполне непрерывны. Докажем это для оператора K_u. Ограниченность оператора следует из оценки

$$|(K_u \mathbf{F}, \mathbf{v})_{H_u}| = \left| \int_\Omega \mathbf{F}\mathbf{v}\, dx \right| \leqslant \left(\int_\Omega \mathbf{F}^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \mathbf{v}^2 dx \right)^{1/2} \tag{3.3}$$

и вложения H_u в L_2. Из вполне непрерывности [8,10] вложения из H_u в L_2 и оценки (3.3) следует вполне непрерывность K_u.

Уравнение теплопроводности перейдет в операторное уравнение

$$\theta + PK_\theta (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \theta = K_\theta u_l \tag{3.4}$$

При $u_l = 0$ однородное уравнение $\theta + PK_\theta(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\theta = 0$ имеет в H_θ только тривиальное решение. Действительно, умножив его скалярно на θ, имеем

$$(\theta, \theta)_{H_\theta} + P\,(K_\theta (\mathbf{u}\cdot\nabla)\ \theta, \theta)_{H_\theta} = (\theta, \theta)_{H_\theta} + P \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla) \theta\theta dx =$$

$$= (\theta, \theta)_{H_\theta} - P \int_\Omega {}^1/_2 \theta^2 \nabla \cdot \mathbf{u}\, dx = (\theta, \theta)_{H_\theta} = 0$$

Из теоремы Фредгольма следует, что (3.4) разрешимо при любых $\mathbf{u} \in H_u$. Уравнение (3.4) определяет оператор

$$\theta = A\mathbf{u}.$$

Покажем, что A — ограниченный оператор, действующий из H_u в H_θ.

Для этого, умножая (3.4) скалярно на θ, как и выше, получим

$$(\theta, \theta)_{H_\theta} = \int_\Omega \mathbf{u}_l \theta\, dx \leqslant \|\mathbf{u}\|_{L_2} \|\theta\|_{L_2}$$

Из вложения H_θ в L_2 следует ограниченность оператора A.

Система (2.4) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - R_m K_u \mathbf{h}_{x_3} &= \lambda K_u A\mathbf{u} - K_u (\mathbf{u}\cdot\nabla)\, \mathbf{u} + R_\sigma K_u (\mathbf{h}\cdot\nabla)\, \mathbf{h} \\ \mathbf{h} - R_m K_h \mathbf{u}_{x_3} &= -R_\sigma K_h (\mathbf{u}\cdot\nabla)\, \mathbf{h} + R_\sigma K_h (\mathbf{h}\cdot\nabla)\, \mathbf{u} \end{aligned} \tag{3.5}$$

или в пространстве H в уравнение

$$\mathbf{f} - R_m K_1 \mathbf{f} = \lambda K_2 \mathbf{f} + K_3 \mathbf{f} \qquad (K_2 \mathbf{f} \equiv K_u A\mathbf{u})$$

---

[1] Следуя И. И. Воровичу и В. И. Юдовичу [8], можно доказать, что производные любого заданного порядка функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$, θ будут непрерывны в замкнутой области Ω, если граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая.

Лемма 3.2. Операторы K_1, K_2, K_3 ограничены и вполне непрерывны.

Утверждение леммы следует из вполне непрерывности операторов K_u и K_h. Покажем, например, вполне непрерывность оператора $Bf \equiv K_h (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{h}$, действующего из H в H_h. Имеем

$$(B\mathbf{f}, \psi)_{H_h} \equiv (K_h\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{h}, \psi)_{H_h} = \int\limits_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{h}\psi\,dx = -\int\limits_\Omega \mathbf{h}\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\psi\,dx \tag{3.6}$$

Отсюда следует оценка

$$(B\mathbf{f}, \psi)_{H_h} \leqslant C_1 \|\psi\|_{H_h} \|\mathbf{u}\|_{L_4} \|\mathbf{h}\|_{L_4}$$

Заменяя φ на $B\mathbf{f}$, получим

$$\|B\mathbf{f}\|_H \leqslant C \|\mathbf{u}\|_{H_u} \|\mathbf{h}\|_{H_h} \leqslant C \|\mathbf{f}\|_H^2 \tag{3.7}$$

из которой вытекает ограниченность оператора B.

Из (3.6) имеем [1] для некоторой последовательности $\mathbf{f}^{(n)}$

$$|(B\mathbf{f}^{(n)} - B\mathbf{f}^{(m)}, \psi)_{H_h}| \leqslant C\,(\|\mathbf{f}^{(n)}\|_{L_4} + \|\mathbf{f}^{(m)}\|_{L_4}) \|\psi\|_{H_h} \|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}^{(m)}\|_{L_4}$$

После замены ψ на $B\mathbf{f}^{(n)} - B\mathbf{f}^{(m)}$ из вполне непрерывности операторов вложения [8,10] из H_h в L_4 следует вполне непрерывность оператора B.

Оператор в левой части (3.5) обратим.

Действительно, умножая (3.5) скалярно на $\mathbf{f}$ и полагая правую часть равной нулю, получим

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_H - R_m (K_1\,\mathbf{f}, \mathbf{f})_H = 0$$

но

$$(K_1\mathbf{f}, \mathbf{f})_H \equiv (K_u \mathbf{h}_{x_3}, \mathbf{u})_{H_u} + (K_h \mathbf{u}_{x_3}, \mathbf{h})_{H_h} = \int\limits_\Omega (\mathbf{h}_{x_3}\mathbf{u} + \mathbf{u}_{x_3}\mathbf{h})\,dx = 0 \tag{3.8}$$

Поэтому

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_H = 0, \qquad \mathbf{f} \equiv 0$$

По теореме Фредгольма вполне непрерывный оператор $I - R_m K_1$ имеет обратный L. Он ограничен. В самом деле, в силу (3.8)

$$\|\mathbf{f} - R_m K_1 \mathbf{f}\|_H = (\|\mathbf{f}\|_H^2 + R_m^2 \|K_u \mathbf{h}_{x_3}\|_{H_u}^2 + R_m{}^2 \|K_h \mathbf{u}_{x_3}\|_{H_h}^2)^{1/2} \geqslant \|\mathbf{f}\|_H$$

Отсюда следует [11] ограниченность, а в силу линейности и непрерывность оператора L.

Система (3.5) или (1.1) эквивалентна, таким образом, операторному уравнению

$$\mathbf{f} = \lambda L K_2 \mathbf{f} + L K_3 \mathbf{f} \equiv K\,(\mathbf{f}, \lambda) \tag{3.9}$$

Аналогично линейная система (1.4) перейдет в систему

$$\mathbf{u} - R_m K_u \mathbf{h}_{x_3} = \lambda K_u\,(K_\theta u_l)\,\mathbf{l}, \qquad \mathbf{h} - R_m K_h \mathbf{u}_{x_3} = 0 \tag{3.10}$$

которой соответствует операторное уравнение

$$\mathbf{f} = \lambda L K_u\,(K_\theta u_l)\,\mathbf{l} \tag{3.11}$$

Так как оператор L непрерывен, а операторы K_2 и K_3 вполне непрерывны, то оператор K в (3.9) вполне непрерывен. Покажем, что правая часть (3.11) является диффе-

---

[1] Обозначено $\|\mathbf{f}\|_{L_4} = \|\mathbf{u}\|_{L_4} + \|\mathbf{h}\|_{L_4}$.

ренциалом Фреше оператора K. Для этого надо показать, что

$$\| K(\mathbf{f}, \lambda) - \lambda L K_u (K_\theta u_l) \mathbf{l} \|_H = \| \lambda L K_2 \mathbf{f} - \lambda L K_u (K_\theta u_l) \mathbf{l} + L K_3 \mathbf{f} \|_H \leqslant C \| \mathbf{f} \|_H^2$$

В силу линейности операторов L и K_u достаточно оценить

$$\| A\mathbf{u} - K_\theta u_l \|_{H_\theta}, \qquad \| K_3 \mathbf{f} \|_H$$

Оценка оператора K_3 следует из (3.7), а для разности $A\mathbf{u} - K_\theta u_l$ имеем из (3.4)

$$|(A\mathbf{u} - K_\theta u_l, \Phi)_{H_\theta}| = P \left| \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \Phi \, dx \right| \leqslant C_1 \| \theta \|_{H_\theta} \| \mathbf{u} \|_{H_u} \| \Phi \|_{H_\theta}$$

Полагая $\Phi = A\mathbf{u} - K_\theta u_l$ и заменяя $\theta = A\mathbf{u}$ в силу ограниченности оператора A, имеем

$$\| A\mathbf{u} - K_\theta u_l \|_{H_\theta} \leqslant C \| \mathbf{u} \|_{H_u}^2 \leqslant C \| \mathbf{f} \|_H^2$$

4. Рассмотрим возможность существования стационарных решений задачи (1.1), (1.2), отличных от (1.4). Пусть

$$\lambda_0 = \inf \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H_u}}{(K_\theta u_l, K_\theta u_l)_{H_\theta}} \tag{4.1}$$

где нижняя грань берется по всем соленоидальным вектор-функциям $\mathbf{u} \in H_u$.

В [2,3] показано, что λ_0 является критическим числом Релея для уравнений стационарной конвекции. В случае, когда наложено внешнее магнитное поле, имеет местс следующая теорема.

Теорема 4.1. Если задача (1.1), (1.2) имеет нетривиальное решение, то $\lambda > \lambda_0$.

Пусть задача (1.1), (1.2) имеет нетривиальное решение. Умножая (1.1) скалярно на $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$, λ, θ и складывая, получим

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H_u} + (\mathbf{h}, \mathbf{h})_{H_h} + \lambda [(\theta, \theta)_{H_\theta} - 2(u_l, \theta)] = 0 \tag{4.2}$$

Как видно из (4.2) и однозначной разрешимости (3.4), решение задачи (1.1), (1.2) отлично от нуля только при $u_l \neq 0$.

Хорошо известно [12], что

$$\min [(\theta, \theta)_{H_\theta} - 2(u_l, \theta)] = -(K_\theta u_l, K_\theta u_l)_{H_\theta}$$

где минимум берется по всем $\theta \in H_\theta$.

Из (4.2) следует:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H_u} + (\mathbf{h}, \mathbf{h})_{H_h} - \lambda (K_\theta u_l, K_\theta u_l)_{H_\theta} \leqslant 0$$

и в силу (4.1) имеем $\lambda_0 - \lambda < 0$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что при $\lambda \leqslant \lambda_0$ задача (1.1), (1.2) имеет только тривиальное решение. Таким образом, при наложении внешнего магнитного поля критическое число Релея не уменьшается. Постоянное магнитное поле стабилизирует равновесие жидкости.

Применим к отысканию стационарных решений (3.9), отличных от (1.3), теорию бифуркации нелинейных операторных уравнений [13].

Вещественное число λ_1 называется точкой бифуркации оператора K, если по любым ε, $\delta > 0$ можно указать характеристическое число λ оператора K, такое, что $|\lambda - \lambda_1| < \delta$ и уравнение (3.9) имеет хотя бы один собственный вектор $\mathbf{f}$ такой, что $\| \mathbf{f} \|_H < \varepsilon$.

Из результатов М. А. Красносельского [13] следует, что точками бифуркации оператора K могут быть только характеристические числа его дифференциала Фреше (3.10).

Если λ_1 — характеристическое число задачи (3.10), нечеткой кратности [1], то λ_1 — точка бифуркации оператора K, причем этой точке бифуркации отвечает непрерывная ветвь собственных векторов оператора K. Параметр λ действителен и положителен.

5. Докажем существование положительных собственных значений (3.11). Операторное уравнение (3.11) эквивалентно системе (3.10).

Заменяя в динамическом уравнении $\mathbf{u}$ его значением, определенным из уравнения индукции, сведем (3.10) к операторному уравнению для $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} - R_m{}^2 K_u \frac{\partial}{\partial x_3} K_h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = \lambda K_u (K_\theta u_l)\,\mathbf{l} \tag{5.1}$$

После определения $\mathbf{u}$ из (5.1) находим $\mathbf{h}$ и θ из уравнений индукции и теплопроводности

$$\mathbf{h} = R_m K_h \mathbf{u}_{x_3}, \qquad \theta = K_\theta u_l$$

Операторы в правой и левой частях (5.1) линейные, положительные, вполне непрерывные и самосопряженные в H_u. В самом деле

$$-\left(K_u \frac{\partial}{\partial x_3} K_h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}, \mathbf{v}\right)_{H_u} = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_3} K_h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \mathbf{v}\, dx = \int_\Omega K_h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3}\, dx =$$

$$= \left(K_h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3},\ K_h \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3}\right)_{H_h}$$

$$(K_u (K_\theta u_l)\,\mathbf{l}, \mathbf{v})_{H_u} = \int_\Omega K_\theta u_l v_l\, dx = (K_\theta u_l,\ K_\theta v_l)_{H_\theta}$$

Отсюда вытекают следующие теоремы и лемма.

Теорема 5.1. Существует счетное число характеристических значений системы (1.4) $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \to +\infty$. Соответствующая им система функций $(\mathbf{u}_n, \mathbf{h}_n)$ полна в H. (Система θ_n полна в H_θ).

Лемма 5.1. Собственные функции, отвечающие различным собственным числам λ и λ^* уравнений (1.4) удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_{H_u} + (\mathbf{h}, \mathbf{h}^*)_{H_h} = (\mathbf{f}, \mathbf{f}^*)_H = 0, \qquad (\theta, \theta^*)_{H_\theta} = 0 \tag{5.2}$$

Всякое собственное число λ_k, которому соответствует нечетное число собственных векторов, является точкой бифуркации уравнения (1.1).

Задачу отыскания характеристических чисел и собственных функций (5.1) можно аналогично тому, как это делалось в [2,12], свести к задаче минимизации функционала [2]

$$\lambda = J(\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H_u} + R_H{}^2 (K_h \mathbf{u}_{x_3}, K_h \mathbf{u}_{x_3})}{(K_\theta u_l, K_\theta u_l)} \qquad (u \in H_u) \tag{5.3}$$

Теорема 5.2. Задача о нахождении характеристических чисел и собственных функций системы (1.4) эквивалентна задаче на минимум функционала (5.3).

Покажем, что функционал (5.2) ограничен снизу.

Действительно, по неравенству Коши—Буняковского

$$(K_\theta u_l, K_\theta u_l)^2_{H_\theta} \leqslant \left(\int_\Omega K_\theta u_l u_l\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_\Omega u_l{}^2\, dx\right)\left(\int_\Omega \theta^2\, dx\right)$$

используя неравенство Пуанкаре

$$\int_\Omega \theta^2\, dx \leqslant C_1 \int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla\theta\, dx = C_1 (K_\theta u_l, K_\theta u_l)_{H_\theta}$$

---

[1] Кратностью характеристического числа λ оператора K называется размерность подпространства натянутого на собственные и присоединенные векторы, отвечающие характеристическому числу λ.

[2] Эквивалентность задачи (1.4) вариационной задаче (несколько отличающейся от (5.3)) показана в [4].

и теорему вложения H_u в L_2, получим

$$(K_\theta u_l, K_\theta u_l) \leqslant C (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H_u} \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) следует:

$$J (\mathbf{u}) \geqslant C^{-1}$$

Из задачи о минимуме функционала (5.3) следует [12].

Теорема 5.3. Пусть λ_1 — точная нижняя грань функционала $J (\mathbf{u})$, тогда существует вектор-функция $\mathbf{u}_1 \in H_u$ такая, что $J (\mathbf{u}_1) = \lambda_1$, причем λ_1 есть наименьшее собственное число, а $\mathbf{u}_1$ (соответственно $\mathbf{h}_1$, θ_1) — собственная функция системы (1.4).

Теорема 5.4. Пусть $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ собственные числа (1.4), а (u_m, h_m) — соответствующие им ортонормированные в смысле (5.2) собственные функции [2], тогда существует функция $\mathbf{u}_{n+1} \in H_u$, реализующая минимум функционала (5.2) при дополнительных условиях

$$(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_m)_{H_u} + (\mathbf{h}_{n+1}, \mathbf{h}_m)_{H_h} = 0, \qquad (\theta_{n+1}, \theta_m)_{H_\theta} = 0 \qquad (m = 1, 2 \ldots n)$$

$\mathbf{h}_{n+1}$, θ_{n+1} определяется по $\mathbf{u}_{n+1}$ из уравнений индукции и теплопроводности.

Тройка $\mathbf{u}_{n+1}$, $\mathbf{h}_{n+1}$, θ_{n+1} будет собственной функцией (1.4), соответствующей числу

$$\lambda_{n+1} = J (\mathbf{u}_{n+1})$$

Для конкретных вычислений удобнее записывать (5.2) в форме

$$\lambda = J (\mathbf{u}) = \Big(\int_\Omega \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{u}_{x_i} dx + \int_\Omega \mathbf{h}_{x_i} \mathbf{h}_{x_i} dx \Big) \Big(\int_\Omega \theta_{x_i} \theta_{x_i} dx \Big)^{-1}$$

Здесь $\mathbf{h}$ и θ — решения линейных уравнений индукции и теплопроводности (1.4) при граничных условиях (1.2). Аналогичные результаты получаются и в том случае, если жидкость помещена в диэлектрик.

Поступила 10 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
2. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 295—300.
3. Velt W. Stäbilitätsverhalten und Verzweigung stationarer Lösungen der Navier—Stokesschen Gleichungen, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1964, 16, No. 2.
4. Сорокин В. С., Сушкин И. В. Устойчивость равновесия подогреваемой снизу проводящей жидкости в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, вып. 2, стр. 616—620.
5. Шлиомис М. И. О-колебательной конвективной неустойчивости проводящей жидкости в магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, стр. 678—683.
6. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. «Мир», 1964.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, 1960, т. 59, стр. 115—173.
8. Ворович И. И., Юдович В. М. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Матем. сб., 1961, т. 53 (95), № 4, стр. 393—427.
9. Солонников В. А. О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1960, т. 59, стр. 174—187.
10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
11. Канторович А. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
12. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.
13. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных операторных уравнений. Гостехиздат, 1956.