

О НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗА ПРИ УДАРЕ И ДЕТОНАЦИИ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Э. И. Андрианкин (Москва)

Автомоделльные движения при ударе по газу поршнем были рассмотрены Л. И. Седовым [1]. Полученные уравнения использовались далее не только в задачах о поршне [2-4], но и для математического анализа распространения детонации в газах переменной плотности.

Ниже исследуются плоские ударные и детонационные волны в газе, плотность которого меняется по закону $\rho_0 = a_0 x_0^\omega$ (x_0 — начальная координата частицы), а калорийность на единицу массы $Q = Q_0 x_0^{2\beta}$ в отличие от [5,6], где $Q = \text{const}$.

Предположим одновременно, что за детонационной волной движется поршень со скоростью $\sim t^{\beta/1-\beta}$.

Наличие дополнительного параметра β значительно усложняет поле интегральных кривых по сравнению, например, со случаем [5], так как оно включает теперь одновременно сильный взрыв, поршень, решения типа диполя, детонацию от свободной границы и короткий удар [7].

В работе исследовано поведение интегральных кривых.

Отмечены случаи, когда детонация от свободной границы тем не менее должна быть пересжатой, а при ударе, наоборот, соответствовать точке Жуге. Найдено точное решение задачи о коротком ударе в среде с переменной плотностью, обобщающее известный случай $\gamma = 1.4$, $\rho_0 = \text{const}$ для ряда значений ω , зависящих от γ .

§ 1. Движение газа за фронтом сильной детонационной (или ударной, при $Q_0 = 0$) волны описывается уравнениями гидродинамики

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0}{\rho}, \quad p \rho^{-\gamma} = p_*(x_0) \rho_*^{-\gamma}(x_0) \quad (1.1)$$

Индексом * всюду будем отмечать величины на фронте волны. Граничными условиями для (1.1) служат законы сохранения на фронте $x_*(t)$

$$\rho_0 D = \rho_* (D - u_*), \quad p_* = \rho_0 D u_*$$

$$\frac{(D - u_*)^2}{2} + \frac{\gamma p_*}{\rho_* (\gamma - 1)} = \frac{D^2}{2} + Q_0 x_*^{2\beta}, \quad D = \frac{dx_*}{dt} \quad (1.2)$$

равенство скоростей газа и поршня $u(0, t) = v_0 x_*$ или равенство нулю давления $p(0, t) = 0$, когда расширение происходит в вакуум.

Решение ищем в виде

$$u = u_* v(x), \quad p = p_* f(x), \quad \rho = \rho_* q(x), \quad x = x_0 / x_*$$

$$u_* = u_0 x_*^\beta, \quad p_* = a_0 D_0 u_0 x_*^{2\beta + \omega}, \quad D = D_0 x_*^\beta, \quad \rho_* = \frac{a_0 D_0}{D_0 - u_0} x_*^\omega \quad (1.3)$$

Граничные условия (1.2) удовлетворяются, если константы D_0 , u_0 и Q_0 связаны соотношением

$$u_0^2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} - \lambda \right) = 2\lambda Q_0, \quad \lambda = \frac{\gamma u_0}{D_0 - u_0} \quad (1.4)$$

Физический смысл λ — квадрат отношения скорости звука к массовой скорости за фронтом волны в системе координат, где фронт покоится.

Параметр Q_0 считается заданным, а λ определяется, как собственное число краевой задачи с условиями при $x_0 = 0$ и $x_0 = x_*$, т. е. зависит от скорости поршня.

Подставляя (1.3) в (1.1), найдем систему уравнений для безразмерных функций

$$x^{-\omega} \frac{df}{dx} - x \frac{dv}{dx} + \beta v = 0, \quad \lambda \frac{dv}{dx} + \gamma x \frac{dq}{dx} x^\omega q^{-1} = 0$$

$$f = q^\gamma x^\mu, \quad \mu = 2\beta + \omega - \gamma\omega, \quad f(1) = 1, \quad v(1) = 1 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) допускают группу подобия; после замены переменных

$$f^{\gamma+1} = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\gamma} x^{\delta}, \quad \left(\frac{v}{w}\right)^{\gamma+1} = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\gamma} x^{2\beta+\gamma-1} \quad (\delta = \omega(\gamma+1) + 2\gamma + 2\beta) \quad (1.6)$$

они преобразуются к виду

$$(1-z) \frac{dz}{d\eta} = \Phi(z, w), \quad (1-z) \frac{dw}{d\eta} = \Psi(z, w), \quad \eta = \ln x, \quad z(1) = 1, \quad w(1) = 1 \quad (1.7)$$

Исключая переменную η , найдем

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\Phi}{\Psi}, \quad \Phi = 2z \left\{ \beta - 1 + [\delta + (\gamma + 1)\beta w] \frac{z}{2\gamma} \right\} \\ \Psi = \omega + 2\beta + (1 - \beta)w - (\omega + 1)wz - \beta w^2 z, \quad z|_{w=1} = \lambda \quad (1.8)$$

Эти выражения содержат четыре параметра γ , β , ω и λ , в зависимости от значений которых меняется характер решения.

Из физических соображений ограничим область изменения этих параметров.

Рассмотрим детонационные и ударные волны, удовлетворяющие необходимому условию устойчивости $c_* + u_* \geq D$, $c_*^2 \rho_* = \gamma p_*$, когда малые возмущения догоняют фронт сильного разрыва. Из (1.4) следует, что это условие выполняется, если $\lambda \geq 1$. С другой стороны, $\lambda \leq 2\gamma / (\gamma - 1)$, так как $Q_0 \geq 0$. Из термодинамики известно, что $c_p - c_v > 0$, поэтому $\gamma > 1$.

Условие конечности массы вещества за фронтом волны приводит к требованию $\omega > -1$. Заметим, что при $\beta \geq 1$ ударная волна не может отойти от начала координат даже за бесконечное время. Поэтому автомодельное решение существует при $\beta < 1$. Вблизи фронта волны существует область $x_1 < x \leq 1$, где $u > 0$, так как $D > 0$. При этом либо весь газ движется в сторону $x > 0$, либо $u(x_1) = 0$. Импульс газа, движущегося в сторону $x > 0$, пропорционален $x^{\omega+1+\beta}$ и не убывает со временем, так как $p(x, t) \geq 0$ ([8], стр. 605), следовательно, $\omega + \beta + 1 \geq 0$. В § 3 показано, что в случае знака равенства непрерывных решений для всей области $0 \leq x \leq 1$ не существует, поэтому будем считать $\omega + 1 + \beta > 0$. Непрерывные решения ограничены также изменением параметра $\beta \geq \beta_0 < -0.5(\omega + 1)$ вплоть до значения β_0 , соответствующего короткому удару.

Область изменения z и w также ограничена. Так как давление неотрицательно, то $z \geq 0$. Упрощая уравнение (1.7) вблизи фронта волны $w \rightarrow 1$, $0 < dw/d\eta = \omega + \beta + 1 + 0(w - 1)$, заключаем, что с уменьшением x должно падать и $w \leq 1$.

Выпишем принятые ограничения

$$z \geq 0, \quad w \leq 1, \quad \gamma > 1, \quad \omega + 1 > 0 \\ \omega + 1 + \beta > 0, \quad \beta < 1, \quad 1 \leq \lambda \leq 2\gamma / (\gamma - 1) \quad (1.9)$$

§ 2. Построим поле интегральных кривых уравнения (1.8). Изоклины нулей $z_0(w)$, бесконечностей $z_{\infty}(w)$ и особое решение $z \equiv 0$ пересекаются в особых точках:

$$A \left(w_1 = \frac{\omega + 2\beta}{\beta - 1}, \quad z_1 = 0 \right) \\ B \left(w_2 = -2 - \frac{\omega}{\beta}, \quad z_2 = 1 \right), \quad C \left(w_3 = \frac{\omega(\gamma - 1) + 2\gamma + 2\beta}{(\gamma - 1)(1 - \beta)}, \quad z_3 = \frac{2\gamma(1 - \beta)}{w_3(2\beta + \gamma - 1)} \right)$$

Точка A — всегда седло. Для изоклины бесконечностей $z_{\infty} = z_{\infty}(w)$, а также для наклона особого решения $z_1(w)$ в точке A имеется

$$\frac{dz_{\infty}}{dw} = \frac{(1 - \beta)^3}{(2\beta - 1)(\omega + 2\beta)(\omega + 1 + \beta)}, \quad \frac{dz}{dw} = \frac{1 - \beta + 2(1 - \beta)^3}{(2\beta - 1)(\omega + 2\beta)(\omega + 1 + \beta)}$$

Вблизи B уравнение (1.8) запишется так:

$$\frac{dy}{dr} = \frac{ar + by}{cr + ey}, \quad y = z - z_2, \quad r = w - w_2, \quad \gamma a = (\gamma + 1)\beta z_2^2 \quad (2.1) \\ b = 2(1 - \beta), \quad c = 1 - \beta - (\omega + 1)z_2 - 2\beta w_2 z_2, \quad e = -w_2(\omega + 1 + \beta w_2)$$

Особая точка B будет: седло, если $ae - bc > 0$; узел, если выполняется неравенство $0 < l < (b + c)^2$, $l = 4(ae - bc) + (b + c)^2$ фокус, если $l < 0$.

Наклоны изоклины нулей и бесконечностей в точке B будут

$$\left. \frac{dz_0}{dw} \right|_2 = \frac{(\gamma + 1)\beta}{2\gamma(\beta - 1)}, \quad \left. \frac{dz_\infty}{dw} \right|_2 = \frac{(\omega + 3\beta)\beta}{(2\beta - 1)(\omega + 2\beta)} \quad (2.2)$$

наклоны особых решений находятся из (2.1), если положить $y = Kr$.

Вблизи C уравнение (1.8) приводится к виду (2.1), если заменить w_2 и z_2 на w_3 и z_3 . Для анализа задачи удобно преобразовать выражение $ae - bc$ в точках B и C к виду

$$\begin{aligned} \gamma(ae - bc)_2 &= (\gamma - 1)\beta(1 - \beta)(w_2 - w_3) \\ (2\beta + \gamma - 1)(ae - bc)_3 &= 2(\gamma - 1)\beta(1 - \beta)^2 w_3(w_3 - w_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Исследование с учетом неравенств (1.9) сводится к рассмотрению десяти характерных случаев, представленных на фигуре, где кривые, имеющие одинаковый физический смысл, отмечены одинаковыми буквами. На фигуре проведены (пунктиром) изоклины, только существенные для анализа задачи. Возможные направления решений отмечены стрелками. Условиям на фронте волны соответствуют точки на отрезке KL , причем точки K (Жуге), точка L ($Q = 0$) и точка K_1 (пересжатая детонация) имеют координаты

$$K(w = 1; z = 1), \quad L\left(w = 1, z = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\right), \quad K_1(w = 1, z = \lambda > 1)$$

Из (1.8) находим асимптотику при $z \rightarrow \infty, w \rightarrow 0$ кривых между LQ и KN (или K_1N)

$$\begin{aligned} z \sim |w|^{-\alpha} \sim x^{-\alpha(\omega+1)}, \quad \gamma(\omega + 1)\alpha &= \omega(\gamma + 1) + 2\gamma + 2\beta \\ f(0) &\rightarrow \text{const}, \quad v(0) \rightarrow \text{const} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Следовательно, эти кривые отвечают течению с поршнем, движущемуся в сторону $x > 0$ или $x < 0$, если соответственно, они приближаются к оси z справа или слева. Кривая LQ соответствует сжатию недетонирующего газа. Кривые между DR также имеют асимптотику (2.4), причем $v(0) < 0$. Кривые BR или CR имеют асимптотику

$$\begin{aligned} z = \frac{K_1}{w} \sim x^{-\alpha(\omega+1)}, \quad (\omega + \gamma + 2\beta)K_1 &= -\omega - 2\beta \\ f &\rightarrow \text{const}, \quad v \sim x^{(\omega+1)(\alpha-1)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

т. е. соответствуют детонации от закрытого конца, или сильному взрыву.

Кривые BD или CD при $z \rightarrow \infty, w \rightarrow w_4 = -(\omega + 1)/\beta$ возрастают, как

$$\begin{aligned} z = \frac{K_2}{w - w_4} \sim x^{-\varepsilon}, \quad \gamma\varepsilon = 2\beta + \gamma - 1, \quad \beta(1 + \varepsilon)K_2 &= (\omega + 1)(1 - 2\beta) \\ f &\sim x^{\omega+1} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \text{const} < 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

и соответствуют детонации от свободной границы.

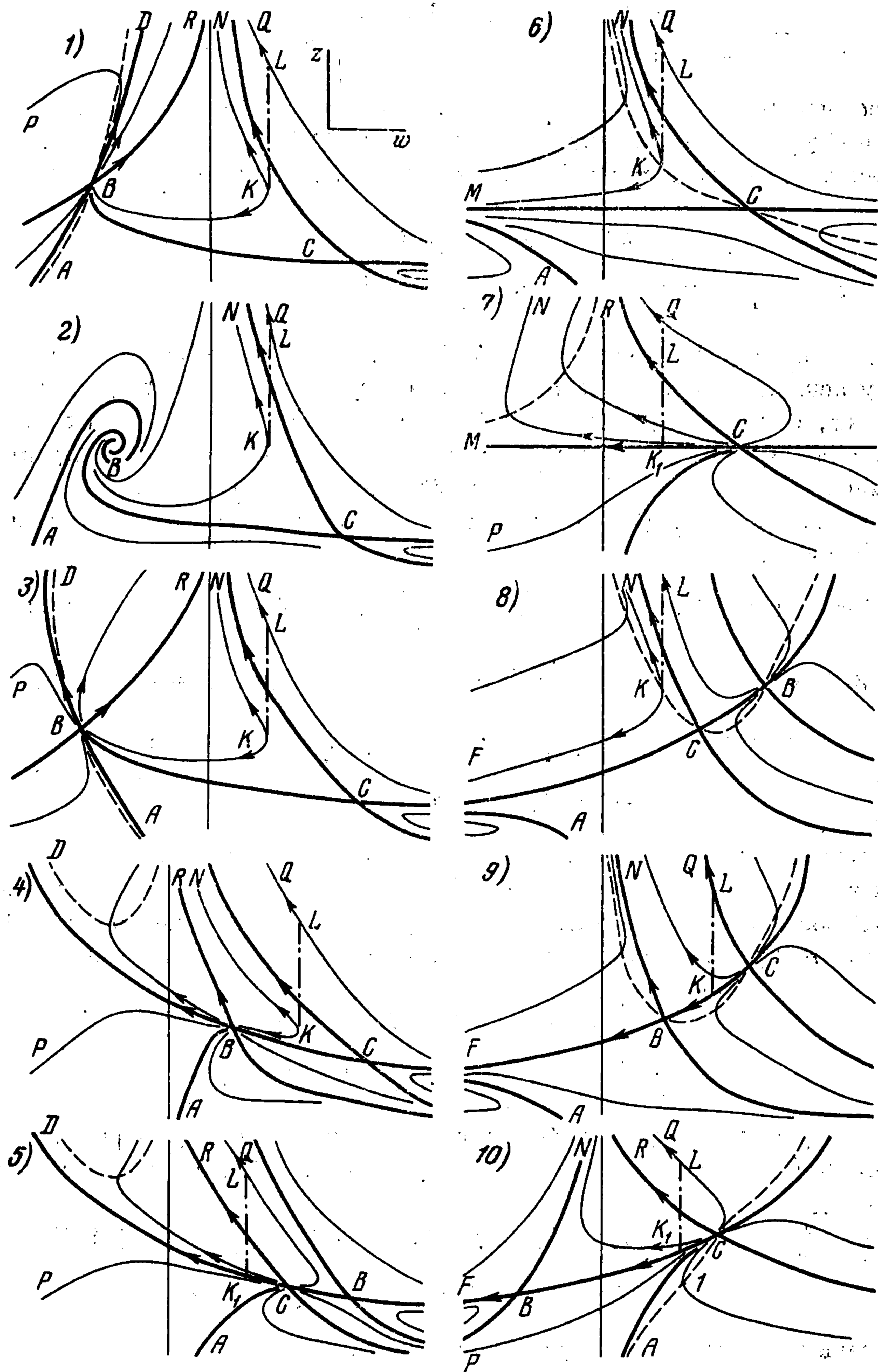
Асимптотика KF или K_1F при $w \rightarrow -\infty$ имеет вид

$$z = \frac{\gamma(1 - \beta)}{\beta w} \sim x^{(1-\beta)(\gamma-1)}, \quad f \sim x^q \rightarrow 0, \quad v \sim -x^\beta, \quad q = \omega + \beta + 1 + (\gamma - 1)(1 - \beta), \quad \beta < 0$$

и соответствует истечению газа в вакуум.

Интегральные кривые, соответствующие непрерывным решениям, не могут пересекать линию $z = 1$, ни в одной точке $w = w_5$, кроме $w_5 = w_2$. Из (1.7) вблизи $z = 1, w = w_5$ найдем $d(w - w_5)^2 / d\eta > 0$. Следовательно, после перехода через линию $z = 1$ величина x снова возрастает, и $x \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow -\infty$, что противоречит физическому смыслу.

На фигуре приведены поля интегральных кривых для всех возможных случаев изменения параметров γ , ω , β и λ , удовлетворяющих неравенствам (1.9)



1. Случай $0.5 \leq \beta < 1$, $l_2 = (\omega + 5\beta - 2)^2 - 4(1 + 1/\gamma)(2\beta - 1)(\omega + 2\beta) \geq 0$. Согласно (2.3) $(ac - bc)_2 < 0$, так как еще и $l_2 \geq 0$, то B — узел. Из точки B решение выходит ниже изоклины нулей. Вблизи B уравнение (1.7) запишется так;

$$k \frac{dw}{d\eta} = A_1 + kA_2, \quad \left(\frac{dz_\infty}{dw} \right)_2 = -\frac{A_1}{A_2}, \quad k = \left(\frac{dz}{dw} \right)_2 \quad (2.8)$$

$$A_1 = \omega + \beta + 2\beta w_2, \quad A_2 = (\omega + 1 + \beta w_2) w_2$$

Так как $k < dz_\infty / dw$, то из (2.8) следует, что $dw / d\eta < 0$ и решение в этих направлениях может быть продолжено. Из фигуры видно, что точке Жуге соответствует детонация не только от открытого конца, но и при движении поршня со скоростью, не превышающей некоторую заданную величину $v(0) \leq v_1 > 0$. Кривая KN имеет асимптотику (2.4).

2. Случай $0.5 < \beta < 1$, $l_2 < 0$. Точка B — фокус. При подходе к B кривые пересекают $z = 1$ в точках $w \neq w_2$ и x становится неоднозначным. Поэтому непрерывные решения существуют только при сжатии поршнем $v(0) > v_0 > 0$.

3. Случай $0 < \beta < 0.5$, $\omega + 2\beta \geq 0$. Точка B — узел, так как $w_2 - w_3 < 0$, а минимальное значение $l_2 = 8\beta(1 - 2\beta) > 0$ (при $\gamma \rightarrow 1$ и $\omega = 3\beta - 2$).

4. Случай $0 < \beta < 0.5$, $-\delta \leq \omega + 2\beta < 0$, $(2\beta + \gamma - 1)\delta = 2\gamma\beta(1 - \beta)$. Точка B (узел) переходит в правую полуплоскость. Точка Жуге соответствует, как детонации от свободной границы (2.6), так и детонации с поршнем $v(0) \leq v_1 \geq 0$.

5. Случай $0 < \beta < 0.5$, $\omega + 2\beta < -\delta$. Точки B и C меняются местами. Согласно (2.3), точка C — не седло. Но она и не фокус, так как

$$l_3 / w^2 = (a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(1 + 1/\gamma)a_1b_1 > (a_1 + 2b_1)^2 - 8a_1b_1 > 0$$

$$c_1 = 1 - \beta > a_1 = \beta z_3 w_3 > 0, \quad c_1 > b_1 = z_3(\omega + 1 + \beta w_3) > 0$$

Следовательно C — узел. Возможные непрерывные решения ограничены кривой K_1D , соответствующей пересжатой детонации от открытого конца (2.6).

6. Случай $\beta = 0$, $\omega > 0$. Точка B бесконечно удалена; точка C — седло. Особое решение $z \equiv \lambda_0$, $[(\gamma + 1)\omega + 2\gamma]\lambda_0 = 2\gamma$ неустойчиво, так как $\lambda_0 < 1$. Кривые KM имеют асимптотику

$$z \rightarrow \lambda_0, \quad w \rightarrow -\infty, \quad f \sim x^{\omega+2\gamma/(\gamma+1)} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \text{const} < 0 \quad (2.9)$$

случай соответствует детонации от открытого конца.

7. Случай $\beta = 0$, $-1 < \omega \leq 0$. Точка C — узел. Особое решение $z \equiv \lambda_0 \geq 1$ и детонация даже от открытого конца (K_1M) пересжата.

8. Случай $\omega + 2\beta \geq -\beta > 0$. Точка Жуге соответствует детонации от свободной границы или сжатию поршнем $u(0, t) > 0$. Особые точки B и C расположены правее линии KL , причем из (2.3) следует:

а) если $\omega + 2\beta \geq -\delta$, $2\beta + \gamma - 1 > 0$, то $w_2 \geq w_3 > 1$, точка B — узел, точка C — седло; при знаке равенства точки сливаются;

б) если $-\beta < \omega + 2\beta < -\delta$, $2\beta + \gamma - 1 > 0$, то $w_3 > w_2 \geq 1$; точка C — узел, точка B — седло;

в) если $\omega + 2\beta \geq -\beta$, $2\beta + \gamma - 1 \leq 0$, то $w_2 \geq 1$; точка B — седло, а C переходит в нижнюю полуплоскость.

9. Случай $0 \leq \omega + 2\beta < -\beta > 0$. Точка B — седло ($0 < w_2 < 1$). Сепаратриса из точки B при $w = 1$ проходит выше, чем $z = 1$. Поэтому непрерывные решения лежат выше точки Жуге. Детонация даже от свободной границы (K_1BF) пересжата. Согласно (2.8), решение из B можно продолжить только в направлениях, указанных стрелками. Точка C ($w_3 > 1$) — узел при $2\beta + \gamma - 1 > 0$. Если $2\beta + \gamma - 1 \leq 0$, то C переходит в нижнюю полуплоскость.

10. Случай $\omega + 2\beta < 0$, $\beta < 0$. Точка B — седло, C — узел, $w_2 < 0$, $w_3 > 1$. При $2\beta + \gamma - 1 > 0$, $z_3 > 0$, когда $2\beta + \gamma - 1 \leq 0$, точка C переходит в нижнюю полуплоскость.

В зависимости от закона изменения полной энергии газа, которая пропорциональна x^v , $v = \omega + 2\beta + 1$, характерны следующие решения.

а) При $v > 0$ из точки K_1 возможна детонация (пересжатая) со свободной границей K_1BF и поршнем, движущимся в отрицательную сторону оси x K_1BN .

б) При $v = 0$ кривая LQ , совпадающая теперь с сепаратрисой CR , соответствует сильному взрыву. Кривые ниже LQ соответствуют детонации с поршнем, который отбирает логарифмически бесконечную долю энергии у детонирующей смеси при $t \rightarrow 0$, оставляя далее полную энергию газа постоянной. Возможно также истечение в вакуум K_1BF с бесконечной энергией (2.8), но в отличие от [7] при $Q_0 > 0$.

в) При $v < 0$ кривая LQ расположена ниже сепаратрисы CR . Поршень сообщает газу бесконечную энергию при ударе ($t = 0$) и тут же начинает ее отбирать, двигаясь назад. В любой конечный момент времени энергия также конечна даже в случае $Q_0 > 0$ (кривые между LQ и K_1BN); эти решения напоминают решение типа диполя для уравнения нелинейной теплопроводности [9].

г) При $v = v_0 < 0$ точка L , опускаясь все ниже по мере уменьшения v , попадает, наконец, на линию CB и сливается с точкой K_1 . В этом случае существует решение либо типа диполя (с поршнем $u(0, t) < 0$), либо типа импульса K_1BF , когда энергия газа бесконечна.

д) При $v < v_0$ для всей области $0 \leq x \leq 1$ непрерывных решений нет, так как кривые CP пересекают линию $z = 1$ в точках $w \neq w_2$. Однако можно себе представить короткий удар с поглощением энергии на фронте, $\lambda_0^2 > 2\gamma / (\gamma - 1)$. При $\beta > 1$ можно рассматривать автомодельные решения, как предел неавтомодельных (например, если $Q = Q_* + Q_0 x_0^{2\beta}$). Оказывается, что в этом случае непрерывные решения возможны только при движении поршня со скоростью $u(0, t) \geq v > 0$ больше некоторой заданной.

§ 3. Частные решения уравнений (1.5) можно, например, получить, когда скорость волны постоянна, когда существуют интегралы энергии или импульса и, если давление зависит от x степенным образом.

При $\beta = 0$ уравнение (1.8) становится линейным и выражается через z при помощи квадратуры, а зависимость z от x находится из (1.7)

$$w \sqrt{\frac{z}{\lambda} \left| \frac{z - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} \right|^x} = \frac{\omega \lambda_0}{2\lambda} \int_{\lambda}^z \sqrt{\frac{\lambda}{z} \left| \frac{z - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} \right|^x \frac{dz}{z - \lambda_*}} + 1$$

$$zx = \lambda \left| \frac{z - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} \right|^{1-\lambda_0}, \quad \lambda_0 = \frac{2\gamma}{2\gamma + \omega(\gamma + 1)}, \quad \kappa = \frac{1}{2}(\omega + 1)\lambda_0 - \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

Интегральные кривые $z = z(w)$ уравнения (3.1) показаны на фигуре, случай 6 и 7. При $\omega \leq 0$ существует еще частное решение, при котором (1.8) тождественно удовлетворяется, а (1.7) интегрируется в конечном виде

$$z \equiv \lambda_*, \quad x = \left| \frac{\omega + w(1 - \alpha\lambda_0)}{\alpha(1 - \lambda_0)} \right|^{\frac{1-\lambda_0}{1-\alpha\lambda_0}}, \quad \alpha = \omega + 1$$

$$f = x^{\frac{2\gamma\lambda_0}{\gamma+1}}, \quad v = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)\lambda_0} x^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \alpha \quad (3.2)$$

Это решение соответствует пересжатой детонации от открытого конца (2.9). Если $\omega = 0$, то существует еще решение (1.5) $v = \text{const}$ и $f = \text{const}$, которое может быть приклеено к (3.2). Этот случай подробно исследован в литературе [1,10,11].

При $\omega + 2\beta + 1 = 0$ интеграл энергии [5], который существует и для течений типа диполя, с учетом работы поршня запишется так:

$$(fx)^{1-1/\gamma} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \lambda v^2 x^{\omega+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \lambda v f + \frac{\gamma-1}{\gamma} \lambda v_0 f_0 = 0 \quad (3.3)$$

$$u(0, t) = u_0 v_0 x_*, \quad p(0, t) = a_0 D_0 u_0 f_0 x_*^{\omega+2\beta}$$

Из условий на фронте $2v_0 f_0 = 1 - 2\gamma / (\gamma - 1) \lambda$. Зная скорость поршня $u(0, t)$ и Q_0 и используя (3.3) при интегрировании второго из уравнений (1.5), получим однозначное решение, из которого определяется постоянная энергия газа.

Частное решение также можно получить, считая давление степенной функцией координаты. Из (1.5) следует, что f удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\omega} \frac{df}{dx} + \frac{\gamma}{\lambda} x^2 \frac{d}{dx} (x^{\omega+2\beta} f^{-1})^{1/\gamma} \right] = \frac{\gamma\beta}{\lambda} x \frac{d}{dx} (x^{2\beta+\omega} f^{-1})^{1/\gamma}$$

$$f(1) = 1, \quad (1 - \lambda) \frac{df}{dx} \Big|_1 = 2\beta + \lambda\beta + \omega \quad (3.4)$$

Если $f = x^\mu$, то из (3.4) следует, как принято в работе [12]:

$$(\omega + 2\beta - \mu)(\gamma\beta + \mu - \gamma - \omega - 2\beta) x^{(\omega+2\beta-\mu)/\gamma} = \mu(\mu - \omega - 1) x^{\mu-\omega-2} \quad (3.5)$$

$$\lambda\mu + \lambda\beta + \omega + 2\beta = \mu \quad (3.6)$$

Уравнению (3.5) можно удовлетворить двумя способами: приравнявая нулю коэффициенты при разных степенях x , либо требуя равенства степеней и приравнявая нулю сумму коэффициентов. Условию $\omega > -1$ совместно с равенством (3.6) удовлетворяет только первый способ, поэтому

$$f = x^\mu, \quad v = \left(1 + \frac{\mu}{\beta}\right) x^\beta - \frac{\mu}{\beta}, \quad \mu = \omega + 1, \quad \beta = \frac{1 - \gamma}{2 - \gamma}$$

$$\omega = \frac{(3 - 2\gamma)\lambda - \gamma}{\lambda(\gamma - 2)}, \quad 1 < \gamma < 2 \quad (3.7)$$

При $\lambda = 2\gamma / (\gamma - 1)$ имеем точное решение задачи об импульсе в среде с переменной плотностью, обобщая известный случай [13], когда $\omega = 0$.

Если $1 \leq \lambda < 2\gamma / (\gamma - 1)$, то (3.7) описывает движение газа при детонации.

Используя (1.6), можно проверить, что решение проходит через особую точку B на фигуре, (случай 10), причем $x_2^\beta = \lambda$.

Если $\omega + \beta + 1 = 0$, то второе уравнение (1.7) дает интеграл (импульса [5]) $w \equiv 1$, а первое интегрируется в квадратурах

$$x^{2(1-\beta)} z = \lambda \left| \frac{z + b_0}{\lambda + b_0} \right|^{1+b_0}, \quad b_0 = \frac{2\gamma(\beta - 1)}{2\beta + \gamma - 1}$$

Это решение соответствует кривым CP на фигуре и не может быть непрерывным для всех $0 \leq x \leq 1$. Осуществить такое решение в области непрерывности можно, например, искусственно отбирая газ при помощи резервуара [12], движущегося по определенному закону.

Поступила 8 III 1966

Институт химической физики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
2. К р а ш е н и н н и к о в а Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 8.
3. К о ч и н а Н. Н., М е л ь н и к о в а Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодействия. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Г р и г о р я н С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
5. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 5-е. М., «Наука», 1965.
6. Я в о р с к а я И. М. Решение некоторых задач о детонации в среде с переменной плотностью. Докл. АН, 1956, т. 111, № 4.
7. З е л ь д о в и ч Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
8. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматиздат, 1963.
9. З е л ь д о в и ч Я. Б., Б а р е н б л а т т Г. И. О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме. ПММ, 1957, т. 21, вып. 55.
10. З е л ь д о в и ч Я. Б., К о м п а н е ц А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.
11. С т а н ю к о в и ч К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
12. А д а м с к и й В. Б., П о п о в Н. А. Движение газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону, ПММ, 1959, т. 23, вып. 31.
13. Ж у к о в А. И., К а ж д а н Я. М. Движение газа под действием кратковременного импульса. Акустич. ж., 1956, т. 2, вып. 4.