О КИНЕТИЧЕСКИХ ФОКУСАХ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

Э. Е. Пейсах (Ленинград)

Вопрос о характере экстремума действия по Лагранжу и связанный с ним вопрос о кинетических фокусах для изоэнергетических траекторий рассмотрен в книге Томсона и Тэта [1], в работе Д. К. Бобылева [2] и в книге Г. К. Суслова [3]. Теорию кинетических фокусов Томсон применил к исследованию орбитальной устойчивости заданного движения консервативной системы, чем после него занимались Раус и Жуковский.

Известный метод определения кинетических фокусов для изоэнергетических траекторий [2] исходит из того, что обобщенные координаты системы $q_2, \ldots, q_n$ выражены через координату q_1 из дифференциальных уравнений траекторий в форме Якоби

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_i'} - \frac{\partial \sqrt{R}}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{1}$$

причем функция R имеет выражение

$$R = 2(h - \Pi)\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{sk} q_s' q_k'$$

(штрихи обозначают дифференцирование по q_1). Здесь Π и h — соответственно потенциальная энергия и полная энергия системы ($h = \text{const}$); a_{sk} — коэффициенты квадратичной формы, которой является кинетическая энергия T в случае консервативной системы. Для реализации известного метода необходимо найти решение системы дифференциальных уравнений (1) в виде

$$q_i = f_i(q_1, h, c_3, \ldots, c_{2n}) \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Здесь $c_3, \ldots, c_{2n}$ — произвольные постоянные, и затем решить уравнение

$$\begin{vmatrix} (\partial f_2/\partial c_3)_0 & (\partial f_2/\partial c_4)_0 & \ldots & (\partial f_2/\partial c_{2n})_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\partial f_n/\partial c_3)_0 & (\partial f_n/\partial c_4)_0 & \ldots & (\partial f_n/\partial c_{2n})_0 \\ (\partial f_2/\partial c_3)_1 & (\partial f_2/\partial c_4)_1 & \ldots & (\partial f_2/\partial c_{2n})_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\partial f_n/\partial c_3)_1 & (\partial f_n/\partial c_4)_1 & \ldots & (\partial f_n/\partial c_{2n})_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

относительно $q_1^{(1)}$. В этом уравнении индекс 0 относится к начальному положению системы, а индекс «1» — к ее положению, являющемуся кинетическим фокусом, сопряженным начальному положению. Однако, получение функций вида (2) из уравнений траекторий (1) возможно лишь в наиболее простых случаях, что связано с трудностями интегрирования уравнений (1). Это ограничивает применимость известного метода [1].

Ниже приводится метод определения кинетических фокусов для изоэнергетических траекторий, основанный на непосредственном использовании уравнений движения консервативной системы [2].

[1] Отметим, что решение (2) системы дифференциальных уравнений траекторий (1), как правило, не может быть найдено и в тех случаях, когда известны уравнения движения $q_i = q_i(t, c_1, \ldots, c_{2n})$ $(i = 1, \ldots, n)$, получаемые путем интегрирования дифференциальных уравнений движения системы (уравнений Лагранжа второго рода). В этих случаях функции (2) могли бы быть получены из уравнений движения, для чего потребовалось бы исключить из них время t, а также выразить две постоянные (например, c_1 и c_2) через остальные и через h из уравнений: $q_1^{(0)} = q_1(t_0, c_1, \ldots, c_{2n})$, $h = h(c_1, \ldots, c_{2n})$. Однако, в связи с возникающими здесь математическими трудностями, этот способ получения функций (2) оказывается обычно невыполнимым.

[2] Отметим, что кинетические фокусы для единовременных путей (т. е. таких путей, которые рассматриваются в принципе Гамильтона) определяют, непосредственно используя уравнения движения системы.

Пусть совокупность функций

$$q_i = q_i\ (t,\ c_1,\ .\ .\ .\ c_{2n}) \qquad (i=1,\ .\ .\ .\ ,n) \tag{4}$$

есть общее решение системы дифференциальных уравнений движения консервативной системы (как более общий, рассмотрен сначала случай, когда решение содержит $2n$ постоянных, но не представляет собой интеграла Коши).

При фиксированных значениях постоянных $c_1, \ldots, c_{2n}$ уравнения (4) определяют некоторый истинный путь системы. Задавая постоянным бесконечно малые приращения (вариации) δc_k, получим путь

$$q_i^* = q_i(t,\ c_1 + \delta c_1, \ldots, c_{2n} + \delta c_{2n}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

бесконечно близкий к пути (4) и также истинный. Вариации обобщенных координат при переходе от пути (4) к пути (5) равны

$$\delta q_i = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial q_i}{\partial c_k}\delta c_k \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{6}$$

Пусть в момент времени $t = t_0$ оба пути (4) и (5) пересекаются в некотором положении M_0. Тогда вариации δc_k должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial c_k}\right)_{t=t_0}\delta c_k = 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{7}$$

Если исключить время t из уравнений движения (4), то получим уравнения траектории системы. Выразим t через координату q_1 из первого уравнения системы (4)

$$t = \tau\ (q_1,\ c_1,\ .\ .\ .\ ,\ c_{2n}) \tag{8}$$

После подстановки из (8) в остальные $(n-1)$ уравнений (4) получаем уравнения траектории, соответствующей пути (4)

$$q_i = q_i[\tau(q_1,\ c_1,\ \ .\ .\ .\ ,\ c_{2n}),\ c_1,\ .\ .\ .\ ,\ c_{2n}] \equiv \varphi_i(q_1, c_1,\ .\ .\ .\ ,\ c_{2n}) \quad (i=2,\ .\ .\ .\ ,n) \tag{9}$$

Исключая аналогичным образом время t из уравнений движения для пути (5), получаем уравнения траектории, соответствующей пути (5)

$$q_i^* = \varphi_i(q_1,\ c_1 + \delta c_1, \ldots, c_{2n} + \delta_{c2n}) \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{10}$$

Вариации координат при переходе от траектории (9) к траектории (10) равны

$$\delta q_i = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_k}\delta c_k \qquad (i=2,\ldots,\ n) \tag{11}$$

Так как пути (4) и (5) пересекаются при $t = t_0$, то и соответственные траектории (9) и (10) также пересекаются при $q_1 = q_{10}$ в положении M_0 (здесь q_{10} — значение константы] q_1 при $t = t_0$). Приходим к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_k}\right)_{q_1=q_{10}}\delta c_k = 0 \qquad (i=2,\ldots,\ n) \tag{12}$$

Система $(n-1)$ уравнений (12) и уравнение

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_k}\right)_{t=t_0}\delta c_k = 0 \tag{13}$$

эквивалентны системе n уравнений (7), т. е. они выполняются при одних и тех же значениях вариаций δc_k.

Допустим, что, кроме положения M_0, бесконечно близкие траектории (9) и (10) пересекаются еще в некотором другом положении M_1. Если при этом на обеих траекториях сохраняется одно и то же постоянное значение полной механической энергии h, то положения M_0 и M_1 консервативной системы называют сопряженными кинетическими фокусами для изоэнергетических траекторий.

Так как полная механическая энергия h на исходной траектории (9) является функцией постоянных

$$h = h(c_1, \ldots, c_{2n}) \tag{14}$$

то траектории (9) и (10) являются изоэнергетическими, если

$$\delta h = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial h}{\partial c_k} \delta c_k = 0 \tag{15}$$

Траектории (9) и (10) пересекутся в положении M_1 (при $q_1 = q_{11}$), если выполняются условия

$$\delta q_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_k}\right)_{q_1=q_{11}} \delta c_k = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{16}$$

Таким образом, два положения M_0 и M_1 являются сопряженными кинетическими фокусами, если существуют значения вариаций $\delta c_1, \ldots, \delta c_{2n}$, удовлетворяющие однородной системе $2n$ линейных уравнений (12), (13), (15) и (16).

Сведем указанную систему $2n$ уравнений к системе $(2n-2)$ уравнений, исключив вариации δc_1 и δc_2 из уравнений (13) и (15):

$$\delta c_1 = \left[\frac{\partial h}{\partial c_2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_1}\right)_{t=t_0} - \frac{\partial h}{\partial c_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_2}\right)_{t=t_0}\right]^{-1} \sum_{k=3}^{2n} \left[\frac{\partial h}{\partial c_k}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_2}\right)_{t=t_0} - \frac{\partial h}{\partial c_2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_k}\right)_{t=t_0}\right]\delta c_k$$

$$\delta c_2 = \left[\frac{\partial h}{\partial c_2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_1}\right)_{t=t_0} - \frac{\partial h}{\partial c_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_2}\right)_{t=t_0}\right]^{-1} \sum_{k=3}^{2n} \left[\frac{\partial h}{\partial c_k}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_1}\right)_{t=t_0} - \frac{\partial h}{\partial c_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial c_k}\right)_{t=t_0}\right]\delta c_k$$

Подставив эти значения δc_1 и δc_2 в уравнения (12) и (16), получим после преобразований однородную систему $(2n-2)$ линейных уравнений

$$\sum_{k=3}^{2n} D_{ik}^{(0)} \delta c_k = 0, \qquad \sum_{k=3}^{2n} D_{ik}^{(1)} \delta c_k = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{17}$$

Здесь $D_{ik}^{(0)}$ и $D_{ik}^{(1)}$ — значения якобиана

$$D_{ik} = \begin{vmatrix} \partial\varphi_i / \partial c_k & \partial\varphi_i / \partial c_2 & \partial\varphi_i / \partial c_1 \\ \partial h / \partial c_k & \partial h / \partial c_2 & \partial h / \partial c_1 \\ (\partial q_1 / \partial c_k)_{t=t_0} & (\partial q_1 / \partial c_2)_{t=t_0} & (\partial q_1 / \partial c_1)_{t=t_0} \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{matrix} i = 2, \ldots, n \\ k = 3, \ldots, 2n \end{matrix}\right) \tag{18}$$

при $q_1 = q_{10}$ и $q_1 = q_{11}$.

Для дальнейшего преобразования якобиана D_{ik} используем тождества

$$q_1 [\tau(q_1, c_1, \ldots, c_{2n}), c_1, \ldots, c_{2n}] \equiv q_1, \tag{19}$$

$$q_i [\tau(q_1, c_1, \ldots, c_{2n}), c_1, \ldots, c_{2n}] \equiv \varphi_i(q_1, c_1, \ldots, c_{2n}) \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{20}$$

Дифференцируя левые и правые части этих тождеств по произвольной постоянной c_k, получаем

$$\frac{\partial q_1}{\partial c_k} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial c_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 2n) \tag{21}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial c_k} + \frac{\partial q_i}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial c_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial c_k} \qquad (i = 2, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, 2n) \tag{22}$$

Из уравнений (21) определим $\partial\tau / \partial c_k$ и затем подставим эти величины в уравнения (22). Тогда получим

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_k} = \frac{\partial q_i}{\partial c_k} - \frac{\partial q_1}{\partial c_k}\frac{\partial q_i}{\partial \tau}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \tau}\right)^{-1} \qquad (i = 2, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, 2n) \tag{23}$$

Если теперь в выражении (18) якобиана D_{ik} заменить $\partial\varphi_i / \partial c_k$ на основании равенств (23), перейдя в них от независимой переменной q_1 к независимой переменной

t заменой τ на t, и затем подставить преобразованное таким образом выражение D_{ik} в уравнения (17), то последние принимают вид

$$\sum_{k=3}^{2n} B_{ik}^{(0)}\delta c_k = 0, \qquad \sum_{k=3}^{2n} B_{ik}^{(1)}\delta c_k = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{24}$$

где $B_{ik}^{(0)}$ и $B_{ik}^{(1)}$ — значения якобиана

$$B_{ik} = \begin{vmatrix} \partial q_i / \partial c_1 & \partial q_i / \partial c_2 & \partial q_i / \partial c_k & \partial q_i / \partial t \\ \partial q_1 / \partial c_1 & \partial q_1 / \partial c_2 & \partial q_1 / \partial c_k & \partial q_1 / \partial t \\ (\partial q_1 / \partial c_1)_{t=t_0} & (\partial q_1 / \partial c_2)_{t=t_0} & (\partial q_1 / \partial c_k)_{t=t_0} & 0 \\ \partial h / \partial c_1 & \partial h / \partial c_2 & \partial h / \partial c_k & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 2, \ldots, n \\ k = 3, \ldots, 2n \end{pmatrix} \tag{25}$$

при $t = t_0$ и $t = t_1$. (Заметим, что t_1 — это момент времени, в который система достигает кинетического фокуса M_1, следуя по исходной траектории (9); время движения от M_0 до M_1 по траектории (10) может, вообще говоря, не совпадать со временем движения по исходной траектории.)

Система однородных уравнений (24) допускает нетривиальное решение относительно $\delta c_3, \ldots, \delta c_{2n}$ при обращении в нуль ее определителя

$$\Delta(t_1, t_0) = \begin{vmatrix} B_{2,3}^{(0)} & B_{2,4}^{(0)} & \ldots & B_{2,2n}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,3}^{(0)} & B_{n,4}^{(0)} & \ldots & B_{n,2n}^{(0)} \\ B_{2,3}^{(1)} & B_{2,4}^{(1)} & \ldots & B_{2,2n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,3}^{(1)} & B_{n,4}^{(1)} & \ldots & B_{n,2n}^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

Определив корень t_1 уравнения (26), ближайший к t_0 ($t_1 > t_0$), получим момент времени, в который достигается кинетический фокус[1] для изоэнергетических траекторий, сопряженный положению консервативной системы при $t = t_0$. Для определения координат кинетического фокуса нужно подставить найденное значение t_1 в уравнения движения системы (4).

Пример 1. Материальная точка массы $m = 1$ движется в поле постоянной силы тяжести. Уравнения движения точки имеют вид

$$q_1 = c_1 + c_2 t, \qquad q_2 = c_3 + c_4 t - {}^1/_2\, g t^2 \tag{27}$$

Полная механическая энергия равна

$$h = {}^1/_2\,(c_2^2 + c_4^2 + 2gc_3) \tag{28}$$

Найдем кинетический фокус, сопряженный начальному положению точки в момент $t = t_0$. Уравнение (26) в данном случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} B_{23}^{(0)} & B_{24}^{(0)} \\ B_{23}^{(1)} & B_{24}^{(1)} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{aligned} B_{23}^{(0)} &= c_2^2, \\ B_{24}^{(0)} &= c_2^2 t_0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_{23}^{(1)} &= c_2^2 + g(c_4 - gt_1)(t_1 - t_0) \\ B_{24}^{(1)} &= c_2^2 t_1 + c_4(c_4 - gt_1)(t_1 - t_0) \end{aligned} \tag{29}$$

Так как

$$B_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & (c_4 - gt) \\ 1 & t & 0 & c_2 \\ 1 & t_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & g & 0 \end{vmatrix}, \qquad B_{24} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & t & (c_4 - gt) \\ 1 & t & 0 & c_2 \\ 1 & t_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_{23} = c_2^2 + g(c_4 - gt)(t - t_0), \qquad B_{24} = c_2^2 t + c_4(c_4 - gt)(t - t_0)$$

Решая уравнение (29) относительно t_1, получаем

$$t_1 = \frac{c_2^2 + c_4^2 - c_4 g t_0}{g(c_4 - gt_0)} \tag{30}$$

[1] Если уравнение (26) не имеет корня $t_1 > t_0$, то кинетический фокус не существует.

При подстановке найденного выражения t_1 в уравнения (27) определим координаты кинетического фокуса (при $t_0 = 0$):

$$q_{11} = c_1 + \frac{c_2(c_2^2 + c_4^2)}{gc_4}, \qquad q_{21} = c_3 + \frac{c_4^4 - c_2^4}{2gc_4^2} \tag{31}$$

Тот же результат получается при использовании известного метода (см. книгу А. И. Лурье [4], стр. 729).

В случае, когда известно общее решение системы дифференциальных уравнений движения консервативной системы, представляющее собой интеграл Коши

$$q_i = q_i(t, q_{10}, \ldots, q_{n0}, q_{10}^{\cdot}, \ldots, q_{n0}^{\cdot}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{32}$$

момент $t = t_1$ достижения кинетического фокуса находится как ближайший к t_0 корень следующего уравнения (приводим без вывода):

$$\Delta(t, t_0) = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n2} & A_{n3} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} \partial q_1/\partial q_{10}^{\cdot} & \partial h/\partial q_{10}^{\cdot} & \partial q_i/\partial q_{10}^{\cdot} \\ \partial q_1/\partial t & 0 & \partial q_i/\partial t \\ \partial q_1/\partial q_{k0}^{\cdot} & \partial h/\partial q_{k0}^{\cdot} & \partial q_i/\partial q_{k0}^{\cdot} \end{vmatrix} \qquad (i, k = 2, \ldots, n) \tag{34}$$

Пример 2. Две материальные точки масс $m_1 = m_2 = 1$, соединенные невесомым жестким стержнем длиной $l = 1$, движутся в вертикальной плоскости в поле постоянной силы тяжести. Заданы начальные условия (при $t = t_0 = 0$). Требуется определить кинетический фокус, сопряженный начальному положению системы.

За обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 принимаем две декартовы координаты одной из точек и угол поворота стержня. Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} q_1 &= -{}^1/_2 \cos(q_{30}^{\cdot} t + q_{30}) + (q_{10}^{\cdot} - {}^1/_2 q_{30}^{\cdot} \sin q_{30})\, t + (q_{10} + {}^1/_2 \cos q_{30}) \\ q_2 &= -{}^1/_2 \sin(q_{30}^{\cdot} t + q_{30}) - {}^1/_2 g t^2 + (q_{20}^{\cdot} + {}^1/_2 q_{30}^{\cdot} \cos q_{30})\, t + (q_{20} + {}^1/_2 \sin q_{30}) \\ q_3 &= q_{30}^{\cdot} t + q_{30} \end{aligned} \tag{35}$$

Полная механическая энергия равна

$$h = {}^1/_2 (q_{10}^{\cdot 2} + q_{20}^{\cdot 2}) + \frac{1}{2}\left[(q_{10}^{\cdot} - q_{30}^{\cdot} \sin q_{30})^2 + (q_{20}^{\cdot} + q_{30}^{\cdot} \cos q_{30})^2\right] + g(2q_{20} + \sin q_{30})$$

Уравнение (33) в данном случае имеет вид

$$\Delta(t, t_0) = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{36}$$

где A_{ik} ($i, k = 2, 3$) — определитель вида (34). Корень уравнения (36) равен

$$t_1 = \frac{(q_{10}^{\cdot 2} + q_{20}^{\cdot 2}) + (q_{10}^{\cdot} - q_{30}^{\cdot} \sin q_{30})^2 + (q_{20}^{\cdot} + q_{30}^{\cdot} \cos q_{30})^2}{g(2q_{20}^{\cdot} + q_{30}^{\cdot} \cos q_{30})} \tag{37}$$

Подставив найденное значение $t = t_1$ в уравнения движения (34), получим координаты искомого кинетического фокуса.

Поступила 6 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson W., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. Part I, Cambridge, 1890, v. 1.
2. Бобылев Д. К. О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа. СПБ. Акад. наук, 1889.
3. Суслов Г. К. Теоретическая механика, Изд. 3-е, перераб., М.—Л., Гостехиздат, 1944.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.