ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Оптимальные системы. Статистические методы. Труды Второго международного конгресса ИФАК, т. 2. М., «Наука», 1965.
2. Ogüztorelli M. N. A time optimal control problem for systems described by differential-difference equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Contr., 1963, A1, N 3.
3. Ожиганова И. А. Об условиях инвариантности для одной линейной задачи с запаздыванием. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965, т. 3.
4. Чуракова С. В. Одна задача оптимального управления в системах с последействием. Тезисы докладов Всесоюзн. межвуз. конф. по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1965.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз. 1961.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. Б. Невельсон (Москва)

Развивается метод исследования асимптотической устойчивости в среднеквадратичном линейной стохастической системы с гауссовскими «белыми шумами», предложенный в работе [1]. В п. 1 дается интерпретация результата, полученного в [1] в терминах критерия качества устойчивости, применяемого в теории управляемых систем. В п. 2 приведены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднеквадратичном в форме Рауса—Гурвица линейной стохастической системы для случая, когда интенсивности шумов, действующих по различным направлениям, пропорциональны между собой. Этот результат обобщает условия устойчивости, данные в [1, 2] [1].

1. Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{1.1}$$

которое заменой

$$y = X_1, \qquad y' = X_2, \ldots, y^{(n-1)} = X_n \tag{1.2}$$

сводится к системе

$$dX_1 = X_2\,\mathrm{dt}, \qquad dX_2 = X_3\,\mathrm{dt}, \ldots, dX_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n-i+1}\,\mathrm{dt} \tag{1.3}$$

Предположим, что система (1.3) асимптотически устойчива.

В теории управляемых систем с каждой неотрицательно определенной квадратичной формой

$$a(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1}$$

---

[1] Пользуясь случаем, заметим, что в работе [1] допущены следующие опечатки, затрудняющие чтение. На стр. 406 в правой части формулы (2.5) в показателе степени при λ пропущено число 2. На стр. 407, четвертая строка сверху, вместо $(-1)^{i+j-1}\lambda^{i-2}$ следует читать $(-1)^{j-1}\lambda^{i+j-2}$.

связывают (см., например, [3, 4]) интегральный критерий качества устойчивости решения $X^x(t)$ системы (1.3) с начальным условием $X^x(0) = x$

$$I_a(x) = \int_0^\infty a(X^x(t))\,dt \tag{1.4}$$

Рассмотрим наряду с (1.1) стохастическую систему

$$y^{(n)} + [a_1 + \eta_1^{\cdot}(t)]\,y^{(n-1)} + \ldots + [a_n + \eta_n^{\cdot}(t)]\,y = 0 \tag{1.5}$$

Здесь гауссовские «белые шумы» $\eta_1^{\cdot}(t), \ldots, \eta_n^{\cdot}(t)$ имеют нулевое математическое ожидание, но могут, вообще говоря, быть зависимыми, так что

$$M\eta_i^{\cdot}(t)\,\eta_j^{\cdot}(s) = 2a_{ij}\delta\,(t - s)$$

Из результатов работы [1] следует, что для асимптотической устойчивостив реднеквадратичном системы (1.5) необходимо и достаточно, чтобы критерий качества устойчивости решения $X^x(t)$ детерминированной системы (1.1) с начальным условием $X^x(0) = \delta_{in}$ удовлетворял условию

$$I_a(0, \ldots, 0, 1) < {}^1/_2 \tag{1.6}$$

Из (1.2) и (1.4) при $x = (0, \ldots, 0, 1)$ имеем

$$I_a(x) = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_{n-i+1}^x(t)\,X_{n-j+1}^x(t)\,dt = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty y_0^{(n-i)}(t)\,y_0^{(n-j)}(t)\,dt$$

Здесь $(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ решение уравнения (1.1) с начальным условием $(0, \ldots, 0, 1)$

Интегрированием по частям легко убеждаемся, что при $i + j$ нечетном

$$\int_0^\infty y^{(n-i)}(t)\,y^{(n-j)}(t)\,dt = 0$$

и, следовательно, в условие устойчивости (1.6) входят лишь те коэффициенты корреляции a_{ij}, для которых сумма $i + j$ четна. Этот факт был отмечен также в [1].

Заметим, что в пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ направление $(0, \ldots, 0, 1)$ является особенным, так как именно по этому направлению действует диффузия (см. формулу (1.4) работы [1]).

2. Пусть теперь дана общая линейная стохастическая система

$$X_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^n [b_{ij} + \eta_{ij}^{\cdot}(t)]\,X_j \tag{2.1}$$

где, как и ранее, шумы $\eta_{ij}^{\cdot}(t)$ имеют нулевое математическое ожидание, причем

$$N\dot\eta_{ik}(t)\,\dot\eta_{jl}(s) = 2a_{kl}^{ij}\,\delta\,(t - s)$$

Исследование системы (2.1) представляет большие трудности и, по-видимому, необходимые и достаточные условия устойчивости в среднеквадратичном в общем случае не могут быть даны в достаточно эффективной форме через параметры b_{ij}, a_{kl}^{ij}.

Будем предполагать, что

$$a_{kl}^{ij} = c_{ij}a_{kl} \tag{2.2}$$

т. е. что матрицы корреляции шумов $\eta_{ik}^{\cdot}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $\eta_{jl}^{\cdot}$ $(l = 1, \ldots, n)$, действующих по направлениям x_i и x_j соответственно, пропорциональны одной и той же матрице $\|a_{kl}\|$. При этом, очевидно, квадратичные формы

$$a(x) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$$

неотрицательно определенны.

Переходя, как обычно, от шумов $\eta_{ij}^{\cdot}(t)$ к независимым «белым шумам», уравнения (2.1) можно записать в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито, описываемой оператором

$$L = L_0 + a(x) \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Здесь L_0 — оператор Ляпунова.

Как известно, для асимптотической устойчивости детерминированной системы

$$X_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j \tag{2.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Рауса—Гурвица [1]

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$$

Предположим сначала, что квадратичная форма $a(x)$ определенно положительна. Тогда, опираясь на теорему 3.2 работы [5], можно доказать (аналогично тому, как это сделано в [1]) следующее утверждение: для асимптотической устойчивости в среднеквадратичном системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы существовала определенно положительная квадратичная форма

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$$

для которой

$$L_0 V(x) = -a(x), \qquad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} d_{ij} < \frac{1}{2}$$

Далее, в работе [6] показано, что коэффициент d_{ij} формы $V(x)$ можно представить в виде

$$d_{ij} = \frac{1}{2\Delta_n} \sum_{r=0}^{n-1} q_{ij}^{(r)} \Delta^{1, r+1}$$

где $\Delta^{1,r+1}$ — алгебраическое дополнение элемента первой строки и $r+1$ столбца последнего определителя Гурвица Δ_n, а числа $q_{ij}^{(r)} (r = 0, 1, \ldots, n-1)$ связаны с коэффициентами a_{kl} формулой

$$(-1)^n \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} D_{ik}(\lambda) D_{jl}(-\lambda) = \sum_{r=0}^{n-1} q_{ij}^{(r)} \lambda^{2(n-r-1)} \tag{2.4}$$

Здесь $D_{ik}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента i-й строки и j-го столбца определителя системы (2.3).

Итак, для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \Delta_{ij} \tag{2.5}$$

причем, определитель Δ_{ij} получается из последнего определителя Гурвица Δ_n заменой его первой строки строкой $(q_{ij}^{(1)}, q_{ij}^{(2)}, \ldots, q_{ij}^{(n-1)})$ а числа $q_{ij}^{(r)}$ определяются из полиномов (2.4).

[1] Конструкции определителей Δ_i, элементами которых являются коэффициенты характеристического уравнения системы (2.3), описаны в работе [1].

Покажем, что условия (2.4), (2.5) остаются в силе и без предположения о невырожденности формы $a(x)$. Для этого наряду с системой (2.1) рассмотрим другую линейную систему

$$X_i^{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} [b_{ij} + \eta_{ij}^{\cdot}(t) + \zeta_{ij}^{\cdot}(t)] X_j \tag{2.6}$$

Здесь «белые шумы» $\zeta_{ij}(i, j = 1, \ldots, n)$ имеют нулевое среднее, не зависят от совокупности $\eta_{ij}^{\cdot}$ и, кроме того,

$$M\zeta_{ik}^{\cdot}(t)\,\zeta_{jl}^{\cdot}(s) = 2\varepsilon^2 c_{ij}\,\delta_{kl}\delta(t-s) \qquad (\varepsilon \text{ — малый параметр})$$

Производящий оператор системы (2.6) определяется формулами

$$L_\varepsilon = L_0 + a_\varepsilon(x) \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}, \qquad a_\varepsilon(x) = a(x) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Так как $a_\varepsilon(x)$ определенно положительна, то условия асимптотической устойчивости в среднеквадратичном системы (2.6) имеют вид

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0, \qquad \Delta_n > \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\Delta_{ij}^{(\varepsilon)}$$

(определители $\Delta_{ij}^{(\varepsilon)}$ строятся очевидным образом).

Воспользовавшись далее представлением функции Ляпунова системы] (2.3) через ее фундаментальную систему решений $\overset{\circ}{X}_{sj}(t)$ с начальным условием $\overset{\circ}{X}_{sj}(0) = \delta_{sj}$ (см. [7]), нетрудно получить, что

$$\Delta_{ij}^{(\varepsilon)} = \Delta_{ij} + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \overset{\circ}{X}_{ki}(t)\, \overset{\circ}{X}_{kj}(t)\, dt, \text{ или } \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\Delta_{ij}^{(\varepsilon)} > \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\Delta_{ij} \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.7), теорем 5.1 и 5.2 работы [5] следует, что условия (2.4), (2.5) являются необходимыми и достаточными для устойчивости системы (2.1) и при $a(x) \geqslant 0$.

Определители Δ_i, Δ_{ij} легко вычисляются по способу, указанному в работах [8,9].

В заключение заметим, что условие (2.2) выполнено, в частности, для случая, когда все $\eta_{ij}^{\cdot}(t) \equiv 0$, кроме некоторого одного $\eta_{kl}^{\cdot}(t)$. Именно такой случай, но при более частных предположениях относительно системы (2.3) рассматривался в [2].

Автор благодарит Р. З. Хасьминского за полезные замечания.

Поступила 1 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Работников Ю. Л. О невозможности стабилизации системы в среднем квадратичном случайными возмущениями ее параметров. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. Фельдбаум А. А. Интегральные критерии качества регулирования. Автоматика и телемеханика, 1948, т. III, № 1.
4. Красовский А. А. О степени устойчивости линейных систем. Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1948, вып. 281.
5. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Пробл. передачи информ., 1966, т. 2, № 3.
6. Бедельбаев А. К. О построении функций Ляпунова в виде квадратичной формы и их применение к устойчивости регулируемых систем. Автоматика (Киев), 1958, № 1.
7. Малкин И. Г. О построении функций Ляпунова для системы линейных уравнений. ПММ, 1952, т. 15, вып. 2.
8. Кац А. М., Чекмарев А. И. О вычислении определителей Гурвица. Инж. сб., 1952, т. 12.
9. Кац А. М. К вопросу о вычислении квадратичного критерия качества регулирования. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.