К ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Б. Куржанский (Свердловск)

Рассматривается задача о приведении в положение равновесия движения управляемой системы, описываемой линейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием времени.

Пусть дана система с запаздыванием

$$x^{\cdot}(t) = Ax(t) + Gx(t-\tau) + Bu(t) \tag{1}$$

Здесь A и G суть постоянные n-мерные квадратные матрицы. Постоянная матрица B — прямоугольная, порядка $n \times m$. Функция $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_m(t)\}$ означает m-мерное управление. Запаздывание τ — постоянное. Рассмотрим задачу об успокоении [1] системы (1). Последнее означает, что для рассматриваемой системы требуется найти управление $u(t)$, которое, во-первых, переводит систему из заданного начального состояния $x_0(t) = \varphi(t)$, $(-\tau \leqslant t \leqslant 0)$ в положение $x(T) = 0$ и, во-вторых, удерживает ее в этом положении на протяжении интервала времени $T \leqslant t \leqslant T + \tau$. (Отметим здесь, что задачи об управлении системами с запаздыванием изучались в ряде аспектов, например, в работах [2-4].)

Рассмотрим одну из наиболее простых ситуаций. Предположим, что матрица G неособая. Пусть векторы $b^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ означают столбцы матрицы B. Составим уравнение $Gc = b$. Это уравнение единственным образом определяет вектор c по заданному вектору b. В частности, каждому из векторов $b^{(i)}$ оно сопоставляет вектор $c^{(i)} = G^{-1}b^{(i)}$. Предположим, что $n \leqslant 2m$ и из множества векторов $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, можно выбрать n линейно независимых. Не ограничивая общности, векторы $b^{(i)}$ будем считать линейно независимыми. Тогда в качестве первых m векторов из общего числа указанных n линейно независимых можно взять векторы $b^{(i)}$ и занумеровать их так, что линейно независимыми будут как раз векторы $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$, $c^{(1)}, \ldots, c^{n-m}$. Примем эти векторы за базисные в пространстве[1] $\{x_1, \ldots, x_n\}$, так что $b_j^{(i)} = \delta_{ij}$, $c_j^{(k)} = \delta_{k+mj}$; $i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n - m$; $j = 1, \ldots, n$ ($b_j^{(i)}$, $c_j^{(k)}$ — компоненты векторов $b^{(i)}$, $c^{(k)}$, δ_{ij} — символ Кронеккера). В таких координатах матрицы G и B имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & E_{n-m} \\ G_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} E_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь E_{n-m} и E_m — суть единичные матрицы размерностей $n - m$ и m соответственно. Величина G_2 означает неособую $(m \times m)$ — матрицу. Введем еще следующие обозначения. Подпространство размерности m, порожденное векторами $b^{(i)}$, $(i = 1, \ldots, m)$, обозначим символом $F^{(a)}$, а порожденное векторами $c^{(k)}$ подпространство размерности $n - m$ — символом $F^{(b)}$. Прямая сумма $F^{(a)}$ и $F^{(b)}$ есть, очевидно, все пространство $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Условимся также, что $x^{(a)}$ есть m-мерный вектор с компонентами $x_i^{(a)} = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ и что $x^{(b)}$ есть вектор размерности $n - m$ с компонентами $x_j^{(b)} = x_{m+j}$ $(j = 1, \ldots, n - m)$. В последнем случае n — вектор с компонентами $(x_1^{(a)}, \ldots, x_m^{(a)}, 0, \ldots, 0)$ будет означать составляющую x, лежащую в $F^{(a)}$, а n — вектор с компонентами $(0, \ldots, 0, x_1^{(b)}, \ldots, x_{n-m}^{(b)})$—составляющую x, лежащую в $F^{(b)}$. Вектор размерности $n - m$ с компонентами $(u_1, \ldots, u_{n-m})$, полученный из u, обозначим знаком $u^{(1)}$, а полученный из u $2m - n$-мерный вектор с компонентами $(u_{n-m+1}, \ldots, u_m)$ — как $u^{(2)}$.

Тогда $u_i^{(1)} = u_i$ при $i = 1, \ldots, n - m$, и $u_j^{(2)} = u_{j+n-m}$ при $j = 1{,}2m - n$.

Примем, наконец, обозначения

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)}, & A^{(3)} \\ A^{(2)}, & A^{(4)} \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} G_2^{(1)} \\ G_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

---

[1] Для упрощения письма сохраняем старые обозначения для фазовых координат.

Здесь $A^{(1)}$ и $A^{(4)}$ — суть соответственно $(m\times m)$ и $(n-m)\times(n-m)$ — матрицы, а прямоугольная матрица $G_2^{(2)}$ имеет порядок $(m\times n-m)$. Примем, что $T=\tau+\varepsilon$ $(0<\varepsilon\leqslant\tau)$. Для того чтобы на промежутке $T\leqslant t\leqslant T+\tau$ вектор $x(t)$ был тождественным нулем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$Bu(t)+Gx(t-\tau)=0,\qquad (T\leqslant t\leqslant T+\tau) \tag{2}$$

$$x(T)=0 \tag{3}$$

Равенство (2) запишем еще в следующем виде:

$$u^{(1)}(t)+G_1x^{(a)}(t-\tau)+x^{(b)}(t-\tau)=0,\qquad u^{(2)}(t)+G_2^{(1)}x^{(a)}(t-\tau)=0 \tag{4}$$

$$G_2^{(2)}x^{(a)}(t-\tau)=0 \tag{5}$$

Здесь уравнение (5) определяет условия, необходимые и достаточные для того, чтобы равенству (2) можно было удовлетворить за счет подбора $u(t)$. При этом из вида уравнение (5) следует, что равенству (2) можно удовлетворить во всяком случае, если $x^{(a)}(t)=0$ при $T-\tau\leqslant t\leqslant T$. Иными словами, условие (2) осуществимо тогда, когда вектор $x(t)$ лежит при всех t из промежутка $T-\tau\leqslant t\leqslant T$ в подпространстве $F^{(b)}$ Если последнее требование выполняется, то из условий (4) можно найти управление $u(t)$ на промежутке $T\leqslant t\leqslant T+\tau$. Именно, получим, что

$$u^{(1)}(t)=-x^{(b)}(t-\tau),\qquad u^{(2)}(t)=0$$

Итак, при $T-\tau\leqslant t\leqslant T$ вектор $x(t)$ должен лежать в $F^{(b)}$. Но последнее условие выполняется в том и только том случае, если

$$x^{\cdot}(t)\in F^{(b)}\ \text{при}\ T-\tau\leqslant t\leqslant T,\qquad x(T-\tau)\in F^{(b)}$$

В более подробной записи сказанное означает, что

$$x^{\cdot(a)}(t)=A^{(3)}x^{(b)}(t)+\begin{pmatrix} G_1 & E_{n-m}\\ G_2^{(1)} & 0\end{pmatrix}x(t-\tau)+u(t)\doteq 0 \tag{6}$$

$$x^{\cdot(b)}(t)=A^{(4)}x^{(b)}(t)+G_2^{(2)}x^{(a)}(t-\tau)\qquad (T-\tau\leqslant t\leqslant T)$$

$$x^{(a)}(T-\tau)=x^{(a)}(\varepsilon)=0 \tag{7}$$

Равенство (6) позволяет определить $u(t)$ на промежутке $T-\tau\leqslant t\leqslant T$.

Таким образом, остается задача распорядиться управлением $u(t)$ на промежутке $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ так, чтобы выполнялись условия (3) и (7). Выпишем сначала условие (7). Заметим, что при $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ уравнение (1) имеет вид

$$x^{\cdot}(t)=Ax(t)+G\varphi(t-\tau)+Bu(t)\qquad (x(0)=\varphi(0)) \tag{8}$$

Пользуясь формулой Коши [5], тогда найдем, что равенство $x^{(a)}(\varepsilon)=0$ эквивалентно следующему:

$$\int_0^{\varepsilon}X^{(1)}(\varepsilon-\vartheta)\,u(\vartheta)\,d\vartheta\doteq\gamma^{(a)} \tag{9}$$

Здесь $X^{(1)}(t-\vartheta)$ означает m-мерную квадратную матрицу, связанную с фундаментальной матрицей $X(t-\vartheta)$ $(X(0)=E)$ n-мерной линейной однородной системы

$$x^{\cdot}(t)=Ax(t)$$

таким образом, что

$$X(t-\vartheta)=\begin{pmatrix} X^{(1)}(t-\vartheta) & X^{(3)}(t-\vartheta)\\ X^{(2)}(t-\vartheta) & X^{(4)}(t-\vartheta)\end{pmatrix}$$

Величина $\gamma^{(a)}$ есть m-мерный постоянный вектор, который выражается следующим образом:

$$\gamma^{(a)}=-\Big[(X^{(1)}(\varepsilon)\,X^{(3)}(\varepsilon)),\varphi(0)+\int_0^{\varepsilon}(X^{(1)}(\varepsilon-\vartheta),X^{(3)}(\varepsilon-\vartheta))\,G\varphi(\vartheta-\tau)\,d\vartheta)\Big]$$

Перейдем к условию (3). Ввиду (6) и (7) оно означает, что $x^{(b)}(T) = x^{(b)}(\tau + \varepsilon) = 0$. Величину $x^{(b)}(\tau + \varepsilon)$ можно найти, пользуясь снова формулой Коши. При этом следует учесть, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ вектор $x(t)$ удовлетворяет системе (8), а на отрезке $\varepsilon \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon$ вектор $x^{(b)}(t)$ удовлетворяет второму из уравнений (6). Но тогда, вычисляя, с одной стороны, полное выражение для $x^{(b)}(\tau + \varepsilon)$ и полагая, с другой, что $x^{(b)}(\tau + \varepsilon) = 0$, найдем, что условие (3) сводится к уравнению:

$$X^{(b)}(\tau)\int_0^{\varepsilon} X^{(2)}(\varepsilon - \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta + \int_0^{\varepsilon} X^{(b)}(\varepsilon - \xi)\, G_2^{(2)}\left[\int_0^{\xi} X^{(1)}(\xi - \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta\right] d\xi = \gamma^{(b)} \tag{10}$$

Здесь $X^{(b)}(t - \vartheta)$ $(X^{(b)}(0) = E)$ означает фундаментальную матрицу $(n - m)$-мерной системы

$$\dot{x}^{(b)}(t) = A^{(4)} x^{(b)}(t)$$

а постоянный $(n - m)$-вектор $\gamma^{(b)}$ находится из равенства

$$-\gamma^{(b)} = X^{(b)}(\tau)\,(X^{(2)}(\varepsilon), X^{(4)}(\varepsilon)\,\varphi^{(b)}(0) +$$

$$+ X^{(b)}(\tau)\int_0^{\varepsilon} (X^{(2)}(\varepsilon - \vartheta), X^{(4)}(\varepsilon - \vartheta))\, G\varphi(\vartheta - \tau)\, d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{\tau} X^{(b)}(\tau + \varepsilon - \vartheta)\, G_2^{(2)}\varphi^{(a)}(\vartheta - \tau)\, d\tau + \int_0^{\varepsilon} X^{(b)}(\varepsilon - \vartheta)\, G_2^{(2)}\,(X^{(1)}(\vartheta), X^{(3)}(\vartheta))\,\varphi(0)\, d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon} X^{(b)}(\varepsilon - \vartheta)\, G_2^{(2)} \int_0^{\vartheta} (X^{(1)}(\vartheta - \xi), X^{(3)}(\vartheta - \xi))\, G\varphi(\xi - \tau)\, d\xi\Big]\, d\vartheta$$

Уравнения (9) и (10) объединим в систему вида

$$\int_0^{\varepsilon} h^{(i)}(\varepsilon, \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta = \gamma_i$$

Здесь $h^{(i)}(\varepsilon, \vartheta)$, $i = 1, \ldots, n$, означают k — мерные векторы-строки, совпадающие с соответствующими строками матрицы $X^{(1)}(\varepsilon - \vartheta)$ при $i = 1, \ldots, m$ и матрицы

$$X^{(b)}(\tau)\, X^{(2)}(\varepsilon - \vartheta) + \int_{\vartheta}^{\varepsilon} X^{(b)}(\varepsilon - \xi)\, G_2^{(2)} X^{(1)}(\xi - \vartheta)\, d\xi$$

при $i = m + 1, \ldots, n$. Величины γ_i — суть числа, причем

$$\gamma_i^{(a)} = \gamma_i, \text{ если } i = 1, \ldots, m, \quad \gamma_j^{(b)} = \gamma_{j+m}, \text{ если } j = 1, \ldots, n - m$$

Таким образом, задача свелась к проблеме моментов [6]. При любых γ_i она имеет решение тогда и только тогда, когда векторы $h^{(i)}(\varepsilon, \vartheta)$ — линейно независимы. Определение управления производится тогда известным способом, причем задача решается неоднозначно. Выделение какой-нибудь одной функции $u^{\circ}(t)$ из множества решений задачи осуществляется наложением на $u(t)$ еще дополнительного требования в виде какого-либо условия оптимальности в смысле, например, минимума некоторой нормы $u(t)$. Последнее осуществляется стандартным образом [6]. Упомянем, наконец, что в обсуждаемом случае функции $h^{(i)}(\varepsilon, \vartheta)$ будут линейно независимыми всегда, если $|A| \neq 0$, а для матриц A и B выполняются условия общего положения [7].

Поступила 21 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Оптимальные системы. Статистические методы. Труды Второго международного конгресса ИФАК, т. 2. М., «Наука», 1965.
2. Oğüztorelli M. N. A time optimal control problem for systems described by differential-difference equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math. Contr., 1963, A1, N 3.
3. Ожиганова И. А. Об условиях инвариантности для одной линейной задачи с запаздыванием. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965, т. 3.
4. Чуракова С. В. Одна задача оптимального управления в системах с последействием. Тезисы докладов Всесоюзн. межвуз. конф. по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1965.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз. 1961.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. Б. Невельсон (Москва)

Развивается метод исследования асимптотической устойчивости в среднеквадратичном линейной стохастической системы с гауссовскими «белыми шумами», предложенный в работе [1]. В п. 1 дается интерпретация результата, полученного в [1] в терминах критерия качества устойчивости, применяемого в теории управляемых систем. В п. 2 приведены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднеквадратичном в форме Рауса—Гурвица линейной стохастической системы для случая, когда интенсивности шумов, действующих по различным направлениям, пропорциональны между собой. Этот результат обобщает условия устойчивости, данные в [1, 2] [1].

1. Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{1.1}$$

которое заменой

$$y = X_1, \qquad y' = X_2, \ldots, y^{(n-1)} = X_n \tag{1.2}$$

сводится к системе

$$dX_1 = X_2\, dt, \qquad dX_2 = X_3\, dt, \ldots, dX_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i X_{n-i+1}\, dt \tag{1.3}$$

Предположим, что система (1.3) асимптотически устойчива.

В теории управляемых систем с каждой неотрицательно определенной квадратичной формой

$$a(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1}$$

[1] Пользуясь случаем, заметим, что в работе [1] допущены следующие опечатки, затрудняющие чтение. На стр. 406 в правой части формулы (2.5) в показателе степени при λ пропущено число 2. На стр. 407, четвертая строка сверху, вместо $(-1)^{i+j-1}\lambda^{i-2}$ следует читать $(-1)^{j-1}\lambda^{i+j-2}$.