К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ АМПЛИТУДНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. П. Проскуряков (Москва)

Построение периодических решений квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы изучалось в работах [1, 2]. В работе [1] рассмотрен случай простых корней амплитудных уравнений и частный случай двукратных корней, когда решения разлагаются в ряды по целым степеням μ. В работе [2] рассмотрен более подробно случай двукратных корней, включая разложения решений в ряды по $\mu^{1/2}$. В настоящей работе случай любых кратных корней для неавтономных систем приводится к аналогичному случаю для автономных систем, что упрощает расчет.

1. Рассмотрим квазилинейную неавтономную систему

$$\ddot{x} + m^2 x = f(t) + \mu F(t, x, x^{\cdot}, \mu) \tag{1.1}$$

Функция $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ — аналитическая от x, $x^{\cdot}$ и μ в некоторой области изменения x и $x^{\cdot}$ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$ (μ — малый положительный параметр). Кроме того, $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ и $f(t)$ — непрерывные периодические функции t с периодом 2π, причем $f(t)$ не содержит гармоник m-го порядка, где m — целое число.

Порождающая система при $\mu = 0$ имеет общее решение

$$x_0(t) = \varphi(t) + A_0 \cos mt + B_0 m^{-1} \sin mt \tag{1.2}$$

периодическое по времени t, зависящее от двух произвольных постоянных A_0 и B_0.

Будем искать периодические решения уравнения (1.1) по методу Пуанкаре. Начальные условия примем в виде

$$x(0) = \varphi(0) + A_0 + \beta, \qquad x^{\cdot}(0) = \varphi^{\cdot}(0) + B_0 + \gamma \tag{1.3}$$

Решение уравнения (1.1) является аналитической функцией $A_0 + \beta$, $B_0 + \gamma$ и μ. Поэтому оно может быть представлено в следующей форме:

$$x(t) = \varphi(t) + (A_0 + \beta)\cos mt + \frac{B_0 + \gamma}{m}\sin mt + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t, A_0 + \beta, B_0 + \gamma)\mu^n \tag{1.4}$$

или в развернутом виде

$$x(t) = \varphi(t) + (A_0 + \beta)\cos mt + \frac{B_0 + \gamma}{m}\sin mt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(t) + \frac{\partial C_n(t)}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_n(t)}{\partial B_0}\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n(t)}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right]\mu^n \tag{1.5}$$

Функции $C_n(t)$ определяются по формуле

$$C_n(t) = \frac{1}{m}\int_0^t H_n(t')\sin m(t - t')dt' \tag{1.6}$$

Величины $H_n(t)$ равны

$$H_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}F}{d\mu^{n-1}}\right)_{\beta=\gamma=\mu=0}$$

Производная $dF/d\mu$ является полной частной производной функции $F(t, x, x^{\cdot}, \mu)$ по μ. Значение трех первых функций $H_n(t)$ в раскрытом виде дано в работе [1].

Из условий периодичности, которые с учетом начальных условий можно представить в виде

$$x(2\pi) = \varphi(0) + A_0 + \beta, \qquad x^{\cdot}(2\pi) = \varphi^{\cdot}(0) + B_0 + \gamma \tag{1.7}$$

получим на основании формулы (1.4) следующие соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(2\pi, A_0 + \beta, B_0 + \gamma)\mu^n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\cdot}(2\pi, A_0 + \beta, B_0 + \gamma)\mu^n = 0 \tag{1.8}$$

Из этих соотношений находим уравнения основных амплитуд A_0 и B_0

$$C_1(2\pi, A_0, B_0) = 0, \qquad C_1^{\cdot}(2\pi, A_0, B_0) = 0 \tag{1.9}$$

а также уравнения для определения параметров β и γ, как неявных функций от μ. Группируя члены в этих уравнениях в виде однородных полиномов, получим

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\gamma + C_2\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2}\beta^2 + \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\beta\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\gamma^2 + \\ + \frac{\partial C_2}{\partial A_0}\beta\mu + \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\gamma\mu + C_3\mu^2 + \ldots = 0 \tag{1.10}$$

и аналогично

$$\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}\beta + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\gamma + C_2^{\cdot}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2}\beta^2 + \frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0}\beta\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\gamma^2 + \\ + \frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial A_0}\beta\mu + \frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0}\gamma\mu + C_3^{\cdot}\mu^2 + \cdots = 0 \tag{1.11}$$

Для простых корней амплитудных уравнений (1.9) функциональный определитель

$$D_1 = \frac{\partial C_1}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} \tag{1.12}$$

не равен нулю. В этом случае β и γ представляются рядами по целым степеням μ

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\mu^n, \qquad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\mu^n \tag{1.13}$$

Коэффициенты этих рядов A_n и B_n последовательно определяются из бесконечной системы пар линейных уравнений с общим определителем, равным D_1. Уравнения для первых трех коэффициентов A_n и B_n приведены в работе [1].

2. Рассмотрим подробно случай кратных корней (1.9). Необходимым условием существования кратных корней является

$$D_1 = 0 \tag{2.1}$$

Каждое из уравнений (1.9) определяет на плоскости амплитуд A_0 и B_0 некоторую кривую. Точки пересечения кривых представляют корни уравнений. Двукратные корни соответствуют двойным точкам пересечения, трехкратные — тройным и т. д.

Рассмотрим сначала точки, в которых кривые имеют простое касание одна с другой. Продифференцируем уравнения (1.9) по A_0, считая, что B_0 является неявной функцией A_0. Получим

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0} = 0, \qquad \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0} = 0 \tag{2.2}$$

Так как в точках касания кривых угловые коэффициенты касательных совпадают, то из формул (2.2) следует, что в этих точках $D_1 = 0$.

Продифференцируем уравнения (1.9) еще раз по A_0. Получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} + 2\frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)^2 + \frac{\partial C_1}{\partial B_0}\frac{d^2 B_0}{dA_0^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2} + 2\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0} + \frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)^2 + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\frac{d^2 B_0}{dA_0^2} = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Точки касания кривых, в которых помимо dB_0/dA_0 совпадают и вторые производные d^2B_0 / dA_0^2, представляют трехкратные корни уравнений (1.9). В этих точках

$$D_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} + 2\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial A_0 \partial B_0}\dfrac{dB_0}{dA_0} + \dfrac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\left(\dfrac{dB_0}{dA_0}\right)^2 & \dfrac{\partial C_1}{\partial B_0} \\ \dfrac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0^2} + 2\dfrac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial A_0 \partial B_0}\dfrac{dB_0}{dA_0} + \dfrac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\left(\dfrac{dB_0}{dA_0}\right)^2 & \dfrac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4}$$

Это условие является необходимым условием существования трехкратных корней уравнений (1.9), дополнительным к (2.1). Условие (2.4) можно представить в различных видах в зависимости от вида выражения для производной dB_0 / dA_0. Эту производную можно получить или из первого или из второго равенства (2.2) или из того и другого. При этом будем предполагать, что в соответствующих случаях выполняются или одно или оба неравенства

$$\frac{\partial C_1}{\partial B_0} \neq 0, \qquad \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} \neq 0$$

Условие трехкратности корней амплитудных уравнений может быть получено в другой форме, если уравнения (1.9) продифференцировать два раза по B_0, считая A_0 неявной функцией B_0. В результате вместо условия (2.4) будем иметь другое условие, в котором дифференцирование по A_0 заменится дифференцированием по B_0 и наоборот, а производные dB_0 / dA_0 заменятся на dA_0 / dB_0.

Таким образом, при неравенстве нулю хотя бы одной из первых частных производных от C_1 и $C_1^{\cdot}$ по A_0 и B_0 условия существования двукратных корней амплитудных уравнений (1.9) будут: выполнение условия (2.1) и невыполнение условия (2.4) или аналогичного ему, хотя бы в каком-либо одном виде.

Рассмотрим некоторые особые случаи. Пусть одна из кривых, определяемых уравнениями (1.9), имеет двойные ветви. Например

$$C_1(A_0, B_0) = f_1^2(A_0, B_0)\, f_2(A_0, B_0) = 0 \tag{2.5}$$

Тогда любая точка пересечения двойной ветви с кривой, определяемой уравнением $C_1^{\cdot}(A_0, B_0) = 0$, соответствует кратным корням системы. При этом условие (2.1) всегда выполняется. Однако, в данном случае условие (2.1) не является условием касания кривых. Последнее условие выражается в форме

$$D_1^* = \frac{\partial f_1}{\partial A_0}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial f_1}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} = 0 \tag{2.6}$$

Таким образом, условием двукратности корней уравнений (1.9) для указанной двойной ветви является невыполнение условия (2.6).

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть амплитудные уравнения имеют вид

$$C_1(A_0) = 0, \qquad C_1^{\cdot}(B_0) = 0 \tag{2.7}$$

На плоскости A_0B_0 эти уравнения представляют две прямые, перпендикулярные одна другой и параллельные осям координат. Эти прямые имеют двойную точку пересечения, если одно из уравнений (2.7) имеет двукратные корни, например, первое

$$\frac{\partial C_1}{\partial A_0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 C_1}{\partial A_0^2} \neq 0, \qquad \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} \neq 0 \tag{2.8}$$

Из этих условий следует выполнение условия (2.1). Условия (2.8) являются условиями существования двукратных корней.

3. Параметры β и γ определяются из соотношений (1.8) с учетом амплитудных уравнений (1.9) или из развернутых уравнений (1.10) и (1.11). Преобразуем эти уравнения, считая, что

$$\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} \neq 0 \tag{3.1}$$

Из второго соотношения (1.8), учитывая (1.9), можно выразить величину $B_0 + \gamma$ в виде аналитической функции $A_0 + \beta$ и μ

$$B_0 + \gamma = f^*(A_0 + \beta, \mu)$$

Подставляя эту величину в первое соотношение (1.8) и сокращая его на μ, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n[A_0 + \beta, f^*(A_0 + \beta, \mu)]\,\mu^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(A_0 + \beta)\,\mu^{n-1} = 0 \tag{3.2}$$

Легко видеть, что $Q_1 = C_1(A_0, B_0) = 0$. Если сгруппировать члены в виде однородных полиномов, то соотношение (3.2) в развернутом виде будет

$$\Phi(\beta, \mu) = \frac{dQ_1}{dA_0}\beta + Q_2\mu + \frac{1}{2}\frac{d^2Q_1}{dA_0^2}\beta^2 + \frac{dQ_2}{dA_0}\beta\mu + Q_3\mu^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{d^3Q_1}{dA_0^3}\beta^3 + \frac{1}{2}\frac{d^2Q_2}{dA_0^2}\beta^2\mu + \frac{dQ_3}{dA_0}\beta\mu^2 + Q_4\mu^3 + \cdots = 0 \tag{3.3}$$

При этом обозначено

$$\frac{dQ_n}{dA_0} = \frac{\partial Q_n}{\partial A_0} + \frac{\partial Q_n}{\partial B_0}\frac{dB_0}{dA_0} \tag{3.4}$$

Вычислим две первые производные от Q_1 по A_0. Получим

$$\frac{dQ_1}{dA_0} = D_1\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1}, \qquad \frac{d^2Q_1}{dA_0^2} = D_2\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1} \tag{3.5}$$

Чтобы вычислить коэффициенты $Q_n (n = 2, 3, \ldots)$, определим параметр γ из уравнения (1.11) в виде двойного ряда по β и μ. Это всегда возможно в силу неравенства (3.1). Группируя члены этого разложения по тому же принципу, как и в разложении (3.3), получим

$$\gamma = \frac{dP_1}{dA_0}\beta + P_2\mu + \frac{1}{2}\frac{d^2P_1}{dA_0^2}\beta^2 + \frac{dP_2}{dA_0}\beta\mu + P_3\mu^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{d^3P_1}{dA_0^3}\beta^3 + \frac{1}{2}\frac{d^2P_2}{dA_0^2}\beta^2\mu + \frac{dP_3}{dA_0}\beta\mu^2 + P_4\mu^3 + \ldots \tag{3.6}$$

Найдем сначала величину dP_1 / dA_0. Для этого подставим параметр γ в уравнение (1.11) и сделаем приведение подобных членов. Полученное разложение по β и μ тождественно равно нулю. Из равенства нулю коэффициента при β имеем

$$\frac{dP_1}{dA_0}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} + \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0} = 0$$

Отсюда находим

$$\frac{dP_1}{dA_0} = -\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1} = \left(\frac{dB_0}{dA_0}\right)_* \tag{3.7}$$

Звездочка у производной dB_0 / dA_0 означает, что эта величина взята в точке касания кривых $C_1(A_0, B_0) = 0$ и $C_1^{\cdot}(A_0, B_0) = 0$.

Для определения коэффициентов P_n $(n = 2, 3, \ldots)$ поступим так же, как и при определении величины dP_1/dA_0. Получим уравнения

$$P_2\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} + C_2^{\cdot} = 0$$

$$P_3\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} + \frac{1}{2}P_2^2\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2} + P_2\frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0} + C_3^{\cdot} = 0 \tag{3.8}$$

$$P_4\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} + P_3\left(P_2\frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2} + \frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0}\right) + \frac{1}{6}P_2^3\frac{\partial^3 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^3} + \frac{1}{2}P_2^2\frac{\partial^2 C_2^{\cdot}}{\partial B_0^2} + P_2\frac{\partial C_3^{\cdot}}{\partial B_0} + C_4^{\cdot} = 0$$

Затем подставим параметр γ из формулы (3.6) в уравнение (1.10), перегруппируем члены и сравним коэффициенты в полученном равенстве с коэффициентами разложения (3.3). Найдем

$$Q_2 = P_2\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + C_2, \quad Q_3 = P_3\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + \frac{1}{2}P_2^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} + P_2\frac{\partial C_2}{\partial B_0} + C_3 \tag{3.9}$$

$$Q_4 = P_4\frac{\partial C_1}{\partial B_0} + P_3\left(P_2\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2} + \frac{\partial C_2}{\partial B_0}\right) + \frac{1}{6}P_2^3\frac{\partial^3 C_1}{\partial B_0^3} + \frac{1}{2}P_2^2\frac{\partial^2 C_2}{\partial B_0^2} + P_2\frac{\partial C_3}{\partial B_0} + C_4$$

Введем следующие определители:

$$\Delta_1 = \frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_2^{\cdot} - \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}C_2, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial A_0}C_2 - \frac{\partial C_1}{\partial A_0}C_2^{\cdot} \tag{3.10}$$

Учитывая формулы (3.8) для коэффициентов P_n, получим окончательно

$$Q_2 = -\Delta_1\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-1} \tag{3.11}$$

$$Q_3 = \left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\right)^{-3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial^2 C_1^{\cdot}}{\partial B_0^2}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)C_2^{\cdot 2} -\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial C_2}{\partial B_0}\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0} - \frac{\partial C_2^{\cdot}}{\partial B_0}\frac{\partial C_1}{\partial B_0}\right)\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}C_2^{\cdot} + \left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}C_3 - \frac{\partial C_1}{\partial B_0}C_3^{\cdot}\right)\left(\frac{\partial C_1^{\cdot}}{\partial B_0}\right)^2\right] \tag{3.12}$$

Коэффициент Q_4 удобнее вычислять непосредственно по формуле (3.9) с учетом (3.8), не составляя для него окончательной формулы.

Уравнение (3.3) имеет такую же структуру, как и соответствующее уравнение в случае автономной системы с одной степенью свободы. Поэтому анализ различных случаев двукратных и трехкратных корней амплитудного уравнения автономной системы [3] целиком переносится на неавтономную систему.

Подставим $\mu = 0$ в левую часть уравнения (3.3). Получим

$$\Phi(\beta, 0) = \frac{dQ_1}{dA_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{d^2Q_1}{dA_0^2}\beta^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3Q_1}{dA_0^3}\beta^3 + \ldots \tag{3.13}$$

Согласно теореме Вейерштрасса о неявных функциях, число ветвей параметра β, определяемых уравнением (3.3), равно наименьшему показателю в разложении $\Phi(\beta, 0)$ по степеням β, что, в свою очередь, равно кратности корней амплитудных уравнений. Если кратность корней равна r, то все r ветвей параметра β представляются сходящимися рядами по целым степеням $\mu^{1/k}$, где k может равняться любому целому числу от 1 до r включительно. При этом для одних и тех же корней амплитудных уравнений могут существовать разложения β по различным дробным степеням параметра μ, но сумма различных k не может превышать числа r.

Таким образом, параметры β и γ представляются рядами

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n/k}\mu^{n/k}, \qquad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n/k}\mu^{n/k} \tag{3.14}$$

Вид ряда для β, а также коэффициенты этого ряда определяются из уравнения (3.3), учитывая кратность корней амплитудных уравнений. Например, при двукратных корнях и $Q_2 \neq 0$ имеем $k = 2$. Коэффициент $A_{1/2}$ находится из квадратного уравнения

$$\frac{1}{2}\frac{d^2Q_1}{dA_0^2}A_{1/2}^2 + Q_2 = 0 \text{ и т. д.} \tag{3.15}$$

Вид ряда для γ такой же, как у ряда для β. Для определения коэффициентов $B_{n/k}$ нужно подставить величину β из формулы (3.14) в формулу (3.6) и расположить в ней все члены по степеням $\mu^{1/k}$, а затем приравнять соответствующие коэффициенты этого разложения коэффициентам ряда во второй формуле (3.14). Для $k = 2$ получим

$$\begin{gathered}
B_{1/2} = \frac{dP_1}{dA_0}A_{1/2}, \qquad B_1 = \frac{dP_1}{dA_0}A_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2P_1}{dA_0^2}A_{1/2}^2 + P_2 \\
B_{3/2} = \frac{dP_1}{dA_0}A_{3/2} + \frac{d^2P_1}{dA_0^2}A_{1/2}A_1 + \frac{1}{6}\frac{d^3P_1}{dA_0^3}A_{1/2}^3 + \frac{dP_2}{dA_0}A_{1/2} \\
B_2 = \frac{dP_1}{dA_0}A_2 + \frac{d^2P_1}{dA_0^2}\left(A_{1/2}A_{3/2} + \frac{1}{2}A_1^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3P_1}{dA_0^3}A_{1/2}^2A_1 + \\
+ \frac{dP_2}{dA_0}A_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2P_2}{dA_0^2}A_{1/2}^2 + P_3
\end{gathered} \tag{3.16}$$

Для $k = 3$ найдем

$$\begin{gathered}
B_{1/3} = \frac{dP_1}{dA_0}A_{1/3}, \qquad B_{2/3} = \frac{dP_1}{dA_0}A_{2/3} + \frac{1}{2}\frac{d^2P_1}{dA_0^2}A_{1/3}^2 \\
B_1 = \frac{dP_1}{dA_0}A_1 + \frac{d^2P_1}{dA_0^2}A_{1/3}A_{2/3} + \frac{1}{6}\frac{d^3P_1}{dA_0^3}A_{1/3}^3 + P_2 \\
B_{4/3} = \frac{dP_1}{dA_0}A_{4/3} + \frac{d^2P_1}{dA_0^2}\left(A_{1/3}A_1 + \frac{1}{2}A_{2/3}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3P_1}{dA_0^3}A_{1/3}^2A_{2/3} + \frac{dP_2}{dA_0}A_{1/3}
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Если, кроме неравенства (3.1), выполняется еще неравенство $\partial C_1^{\cdot}/\partial A_0 \neq 0$, то можно выразить величину $A_0 + \beta$ из второго соотношения (1.8) с учетом (1.9) и подставить ее в первое соотношение (1.8). Получим уравнение для γ такого же вида, как и уравнение (3.3) для β. Все остальные выкладки остаются аналогичными. В этом случае коэффициенты $B_{n/k}$ будут определяться независимо от $A_{n/k}$ и формулы для них будут в известном смысле симметричны формулам для $A_{n/k}$. Например, величина $A^2_{1/2}$ пропорциональна определителю Δ_1, а величина $B^2_{1/2}$ будет пропорциональна Δ_2.

4. В качестве примера рассмотрим задачу Дюффинга в квазилинейной постановке. Имеем уравнение колебаний

$$\ddot{x} + x = \mu\,(ax + bx^3 + \nu\cos t + \lambda\sin t) \tag{4.1}$$

Составим уравнения основных амплитуд

$$C_1\,(2\pi) = -\pi\,[\lambda + aB_0 + {}^3/_4 bB_0\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0$$

$$C_1^{\cdot}\,(2\pi) = \pi\,[\nu + aA_0 + {}^3/_4 bA_0\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0$$

Ищем периодические решения, отвечающие кратным корням этих уравнений. Для этого составим определитель D_1 и приравняем его нулю. Получим

$$D_1 = \pi^2\,[a + {}^3/_4 b\,(A_0^2 + B_0^2)]\,[a + {}^9/_4 b\,(A_0^2 + B_0^2)] = 0$$

Обращение первого множителя в нуль приводит к условиям: $\nu = 0$, $\lambda = 0$. Этот случай не представляет интереса, так как система становится автономной.

Обращение в нуль второго множителя приводит к следующему соотношению между коэффициентами уравнения (4.1)

$$16a^3 + 81b\,(\nu^2 + \lambda^2) = 0 \tag{4.2}$$

При этом амплитуды A_0 и B_0 принимают значения

$$A_0 = -\frac{3}{2}\frac{\nu}{a}, \qquad B_0 = -\frac{3}{2}\frac{\lambda}{a} \tag{4.3}$$

При этих значениях A_0 и B_0 определитель $D_2 \neq 0$. Следовательно, эти корни амплитудных уравнений являются двукратными. Так как $Q_2 \neq 0$, то очевидно, что параметры β и γ разлагаются в ряды по степеням $\mu^{1/2}$, а периодические решения уравнения 4.1) представляются рядами вида

$$x\,(t) = x_0\,(t) + \mu^{1/2} x_{1/2}\,(t) + \mu x_1\,(t) + \ldots \tag{4.4}$$

Определим коэффициент $A_{1/2}$ из уравнения (3.15), а коэффициент $B_{1/2}$ из первого соотношения (3.16). Тогда функция $x_{1/2}\,(t)$ будет равна

$$x_{1/2}\,(t) = \mp\,(-96a)^{-1/2}(\nu\cos t + \lambda\sin t) \tag{4.5}$$

Таким образом, если $a < 0$ и выполняется условие (4.2), то существуют два вещественных периодических решения, разлагающихся в ряды по $\mu^{1/2}$. Коэффициенты этих рядов $x_0\,(t)$ и $x_{1/2}(t)$ найдены. Вычислим еще коэффициент $x_1\,(t)$. Получим

$$x_1\,(t) = \frac{7}{432}(\nu\cos t + \lambda\sin t) + \frac{27}{256}\frac{b}{a^3}\,[\nu\,(\nu^2 - 3\lambda^2)\cos 3t + \lambda\,(3\nu^2 - \lambda^2)\sin 3t] \tag{4.6}$$

Поступила 10 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Плотникова Г. В. О построении периодических решений неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы вблизи резонанса в случае двукратных корней уравнений основных амплитуд. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.