ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

В. А. Самсонов (Москва)

В работе В. В. Румянцева [1] доказана теорема, по которой для устойчивости положения равновесия твердого тела с полостью, заполненной двумя однородными несмешивающимися жидкостями, обладающими поверхностным натяжением, достаточно, чтобы функционал

$$F = V + \alpha S + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2, \qquad V = V_0 + \iiint\limits_{\tau_1} \rho_1 V_1 d\tau + \iiint\limits_{\tau_2} \rho_2 V_2 d\tau$$

имел изолированный минимум F_0 для положения равновесия.

Здесь V — потенциальная энергия внешних сил, приложенных к телу (V_0) и жидкостям; τ_1, τ_2 — объемы, занимаемые соответственно первой и второй жидкостями; S — площадь поверхности раздела жидкостей; σ_1, σ_2 — площади контакта жидкостей со стенкой полости; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ — соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения; ρ_1, ρ_2 — плотности, $\rho_1 > \rho_2$.

Необходимым условием минимума функционала будет наличие у него слабого минимума. В данной заметке получены достаточные условия слабого минимума F, когда тело представляет собой тяжелый физический маятник с цилиндрической полостью, заполненной двумя тяжелыми жидкостями. При этом задача слабого минимума F сводится к отысканию условий минимума функции G координат тела. Такой прием использовался Г. К. Пожарицким [2] при решении аналогичной задачи минимума для тела с жидкостью, не обладающей поверхностным натяжением.

Пусть существует такое положение равновесия, при котором поверхность раздела находится на конечном расстоянии от торцов полости и пересекается с боковыми стенками, которые для простоты примем вертикальными. Пусть более тяжелая жидкость находится ниже поверхности раздела.

Введем неподвижные оси координат $x_1y_1z_1$ следующим образом: оси z_1 — по верикали вверх, ось y_1 — ось маятника, ось x_1 — ортогонально плоскости z_1y_1. Подвижными осями xyz, связанными с твердой частью маятника, будут: ось z — параллельно стенке полости, ось x — в плоскости качания, ось y — по оси y_1.

Для сокращения записи введем обозначения

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \Phi^x(f_i) = \frac{f_{i,x}}{\sqrt{1 + f_{i,x}^2 + f_{i,y}^2}}$$

$$P^x(\zeta) = \frac{(1 + f_{1,y}^2)\zeta_x - f_{1,x}f_{1,y}\zeta_y}{(1 + f_{1,x}^2 + f_{1,y}^2)^{3/2}} \qquad (i = 0, 1), \quad (xy)$$

1. Укажем способ получения функции G. В положении равновесия поверхность раздела $z = f_0(x, y)$ определяется из уравнения

$$g(\rho_1 - \rho_2) f_0 - \alpha\{[\Phi^x(f_0)]_x + [\Phi^y(f_0)]_y\} = \text{const} = c_0 \qquad (1)$$

с граничным условием

$$\Phi^x(f_0)\frac{dy}{dl} - \Phi^y(f_0)\frac{dx}{dl} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$$

на линии l пересечения стенок полости с плоскостью xy.

Пусть тело отклонено на малый угол ϑ от положения равновесия. Уравнение поверхности раздела $z = f_1(x, y, \vartheta)$, для которой $\delta F = 0$ при фиксированном ϑ

$$g(\rho_1 - \rho_2)(f_1\cos\vartheta - x\sin\vartheta) - \alpha\{[\Phi^x(f_1)]_x + [\Phi^y(f_1)]_y\} = \text{const} = C_1 \qquad (2)$$

с граничным условием

$$\Phi^x(f_1)\frac{dy}{dl} - \Phi^y(f_1)\frac{dx}{dl} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha}$$

Предположим, что $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y, \vartheta)$ — однозначные функции своих координат с ограниченными производными, разности $(f_1 - f_0)$, $(f_{1,x} - f_{0,x})$, $(f_{1,y} - f_{0,y})$ малы при малых ϑ, точнее, $\sim\vartheta$.

Теперь нужно доказать, что функционал F имеет слабый минимум при фиксированном ϑ, если поверхность раздела определяется уравнением (2). Для этого можно воспользоваться второй вариацией F.

Функционал F, очевидно, зависит от ϑ и формы поверхности раздела $z = f(x, y)$. За меру отклонения поверхности раздела примем $\zeta = f - f_1$ — смещение ее по оси z. Считая ζ и ее производные малыми, а ϑ фиксированным, получим для второй вариации следующее выражение:

$$2\delta^2 F = \iint\limits_{(\Omega)} \{g(\rho_1 - \rho_2)\cos\vartheta\zeta^2 + \alpha[\zeta_x P^x(\zeta) + \zeta_y P^y(\zeta)]\}\, d\Omega$$

Здесь (Ω) — область с площадью Ω, ограниченная кривой l. Обычно в $\delta_2 F$ входит еще криволинейный интеграл по l. В исследуемом случае он отсутствует из-за вида полости и выбора меры отклонения.

Очевидно, что

$$\delta^2 F > K \iint\limits_{(\Omega)} (\zeta^2 + \mathrm{grad}^2\,\zeta)\, d\Omega \qquad \left(2K = \min_{(\Omega)} \left\{(\rho_1 - \rho_2)\, g\cos\vartheta,\ \frac{\alpha}{(1 + f_{1,x}^2 + f_{1,y}^2)^{3/2}}\right\}\right)$$

Этого достаточно, чтобы F имело минимумом $G(\vartheta) = F(\vartheta, f_1)$ при фиксированном ϑ, так как

$$F(\vartheta, f) - G(\vartheta) = \delta^2 F + \beta \iint\limits_{(\Omega)} \mathrm{grad}^2\zeta\, d\Omega \qquad (\beta \to 0,\ \text{если}\ \max_{(\Omega)}\{\zeta_x, \zeta_y\} \to 0)$$

Выберем $\varepsilon > 0$, таким, чтобы при $|\max_{(\Omega)}\{\zeta_x, \zeta_y\}| < \varepsilon$ выполнялось $\beta < {}^1/_2 K$.

Тогда

$$F(\vartheta, f) - G(\vartheta) > \frac{1}{2} K \int\limits_{(\Omega)} (\zeta^2 + \mathrm{grad}^2\,\zeta)\, d\Omega > 0 \qquad (\zeta \not\equiv 0)$$

Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема. Функционал F имеет изолированный минимум F_0 тогда и только тогда, когда имеет изолированный минимум F_0 функция $G(\vartheta)$.

Доказательство проводится так же, как и в [3].

Достаточность. Пусть $G > F_0$ при $\vartheta \neq 0$; так как $F(\vartheta, f) > G(\vartheta)$ для всех ϑ и $\zeta \not\equiv 0$, то и подавно $F > F_0$, если выполняется хотя бы одно из двух условий: $\vartheta \neq 0$, $\zeta \not\equiv 0$.

Необходимость. Пусть $F > F_0$ для всех положений системы, близких к положению равновесия. Тогда и $G > F_0$, так как положение системы, описываемое поверхностью раздела $z = f_1$ и малым углом $\vartheta \neq 0$, также является близким.

2. Теперь можно вывести условие минимума G, используя квадратичную часть приращения $G - F_0$. Для этого разобьем ее на две части

$$G - F_0 = \Delta_1 F + \Delta_2 F$$

Здесь $\Delta_1 F$ — приращение F при отклонении системы как одного твердого тела на угол ϑ, а $\Delta_2 F = -\delta^2 F$ — приращение F при смещении поверхности раздела из положения $z = f_0$ в положение $z = f_1$, т. е. для $\zeta_1 = f_1 - f_0$.

Уравнение для ζ_1 получается путем вычитания (1) из (2), если оставить только члены первого порядка малости по ϑ и ζ_1

$$g(\rho_1 - \rho_2)(\zeta_1 - x\vartheta) - \alpha\{[P^x(\zeta_1)]_x + [P^y(\zeta_1)]_y\} = \mathrm{const} = c_1 - c_0 \qquad (3)$$

с граничным условием

$$P^x(\zeta_1)\frac{dy}{dl} - P^y(\zeta_1)\frac{dx}{dl} = 0$$

Для подсчета $C_1 - C_0$ проинтегрируем (3) по области (Ω)

$$c_1 - c_0 = -\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\Omega}\iint\limits_{(\Omega)} x\vartheta\, d\Omega$$

(интеграл от ζ по (Ω) равен нулю в силу несжимаемости жидкостей).

Очевидно, что в выражении для $\delta^2 F$ можно заменить f_1 на f_0 в силу сделанных предположений об их близости.

Если (3) умножить на ζ_1 и проинтегрировать по области (Ω), то

$$\Delta_2 F = -\frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2)\, g\iint\limits_{(\Omega)} x\vartheta\zeta_1\, d\Omega$$

В уравнении (3) можно сделать замену $\zeta_1 = \vartheta\varphi(x, y)$, тогда

$$G - F_0 = \frac{1}{2} g\vartheta^2\left[-Mz_0 - (\rho_1-\rho_2)\iint\limits_{(\Omega)} x\varphi\, d\Omega\right]$$

Чтобы G имело минимум, достаточно, чтобы

$$Mz_0 + (\rho_1-\rho_2)\iint\limits_{(\Omega)} x\varphi\, d\Omega < 0 \qquad (4)$$

Здесь M — масса и z_0 — координата центра тяжести всей системы в положении равновесия.

При $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ величина φ и условие (4) имеют следующий вид:

$$\varphi = x - \frac{1}{\Omega}\iint\limits_{(\Omega)} x\, d\Omega, \qquad Mz_0 < (\rho_2-\rho_1)\left[\iint\limits_{(\Omega)} x^2\, d\Omega - \left(\iint\limits_{(\Omega)} x\, d\Omega\right)^2\right]$$

т. е. совпадают с аналогичным условием, полученным в [2].

В том частном случае, когда полость является круговым цилиндром радиуса R, ось полости проходит через точку закрепления и $\alpha_1 = \alpha_2$, условие (4) можно представить в конечном виде

$$Mz_0 < -\pi\left[(\rho_1-\rho_2)\frac{R^4}{4} - \frac{\alpha R^2}{g}\,\frac{I_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R) + (\lambda R)^{-1} I_1(\lambda R)}\right] \qquad \left(\lambda = \frac{\sqrt{g(\rho_1-\rho_2)}}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

Здесь $I_i(\lambda R)$ — модифицированная функция Бесселя.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 25 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. Пожарицкий Г. К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.