

Если при указанных выше значениях k будут иметь место соотношения:

$$1) h + b_1 > 0, \quad 2) h + b_1 = 0, \quad 3) h + b_1 < 0$$

то в силу теоремы 3, необходимые (но недостаточные) условия существования периодических траекторий будут выполняться.

Автор благодарит Г. Н. Дубошина за внимание к работе.

Поступила 23 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. У и т т е к е р Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937, стр. 112—114.
2. Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд-во Наука, 1964, стр. 186—196.
3. А к с е н о в Е. П., Г р е б е н н и к о в Е. А., Д е м и н В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения земли. Сб. «Искусственные спутники земли». Изд-во АН СССР, 1961, вып. 8.
4. А к с е н о в Е. П., Г р е б е н н и к о в Е. А., Д е м и н В. Г. Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников земли. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». Изд-во АН СССР, 1963.
5. Л а г р а н ж Ж. Аналитическая механика. Гостехиздат, М.—Л. 1950, т. 2, стр. 392—395.
6. Б е л е н ь к и й И. М. О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для консервативных систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.

К ТЕОРИИ ФУГОИДНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Ю. М. С в и р е ж е в

(Донецк)

В 1891 Н. Е. Жуковским в работе «О парении птиц» [1] была решена задача о движении тела с большим аэродинамическим качеством в атмосфере постоянной плотности. В работе [2] эта задача рассматривалась более подробно, но основное предположение о постоянстве плотности в этой работе было сохранено. За последнее время появилось большое количество работ, посвященных аналитическому решению задачи о входе в атмосферу как с первой, так и со второй космическими скоростями [3-5]. Но в этих работах в основном рассматривались задачи баллистического входа и входа с малым качеством, причем при рассмотрении колебательных режимов ограничивались малыми углами наклона траектории к местному горизонту. В предлагаемой работе рассматривается задача без каких-либо ограничений на угол наклона траектории и начальные скорости, для некоторого гипотетического космического корабля — планера, обладающего достаточно большим качеством. Любопытно отметить, что решение такой задачи сводится к решению задачи Н. Е. Жуковского, но в атмосфере переменной плотности. Возникающие при этом траектории носят название «фугоидных». Все предположения о параметрах такого планера носят сугубо гипотетический характер.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается движение тела с большим аэродинамическим качеством в плоскости большого круга сферической невращающейся планеты с изотермической атмосферой.

Тогда движение рассматриваемого тела описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g \sin \theta - \frac{c_x S}{2m} \rho v^2, & \frac{dH}{dt} &= v \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \cos \theta \left(\frac{v}{R+H} - \frac{g}{v} \right) + \frac{kc_x S}{2m} \rho v, & \frac{dL}{dt} &= v \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left(\rho = \rho_0 e^{-\lambda H}, \quad g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2} \right)$$

с начальными условиями

$$t = 0, \quad v = v^0, \quad \theta = \theta^0, \quad H = H^0, \quad L = 0$$

Здесь ρ_0, g_0 — плотность атмосферы и ускорение силы тяжести на поверхности планеты соответственно; λ — показатель атмосферы; v — абсолютное значение вектора скорости в связанной системе координат (фиг. 1); θ — угол наклона траектории к местному горизонту; H — высота полета над поверхностью планеты; L — дальность полета, отсчитываемая по дуге большого круга; R — радиус планеты; m, S, C_x, k — масса тела, площадь миделя, коэффициент сопротивления и аэродинамическое качество тела соответственно. Эти величины мы считаем постоянными.

Будем рассматривать участок траектории, обладающий следующим свойством: высота полета много меньше радиуса планеты ($H \ll R$). Тогда с достаточной степенью точности можно считать, что

$$R + H \approx R, \quad g \approx g_0 \quad (1.2)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$n = \frac{C_x S}{2mg_0} \rho v^2, \quad V = \frac{v}{\sqrt{Rg_0}}, \quad \tau = \left(\frac{g_0}{R}\right)^{1/2} t, \quad h = \frac{H}{R}, \quad l = \frac{L}{R}, \quad \beta = \lambda R \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и учитывая (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\tau} &= -n \sin \theta \left(\beta V + \frac{2}{V} \right) - \frac{2n^2}{V} \\ \frac{dV}{d\tau} &= -\sin \theta - n \\ V \frac{d\theta}{d\tau} &= \cos \theta (V^2 - 1) + kn \\ \frac{dh}{d\tau} &= V \sin \theta, \quad \frac{dl}{d\tau} = V \cos \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$\tau = 0, \quad n = n^0, \quad \theta = \theta^0, \quad V = V^0, \quad h = h^0, \quad l = 0$$

Первые три уравнения (1.4) образуют замкнутую систему. Решения для h и l , если известны n, V, θ , находятся в квадратурах.

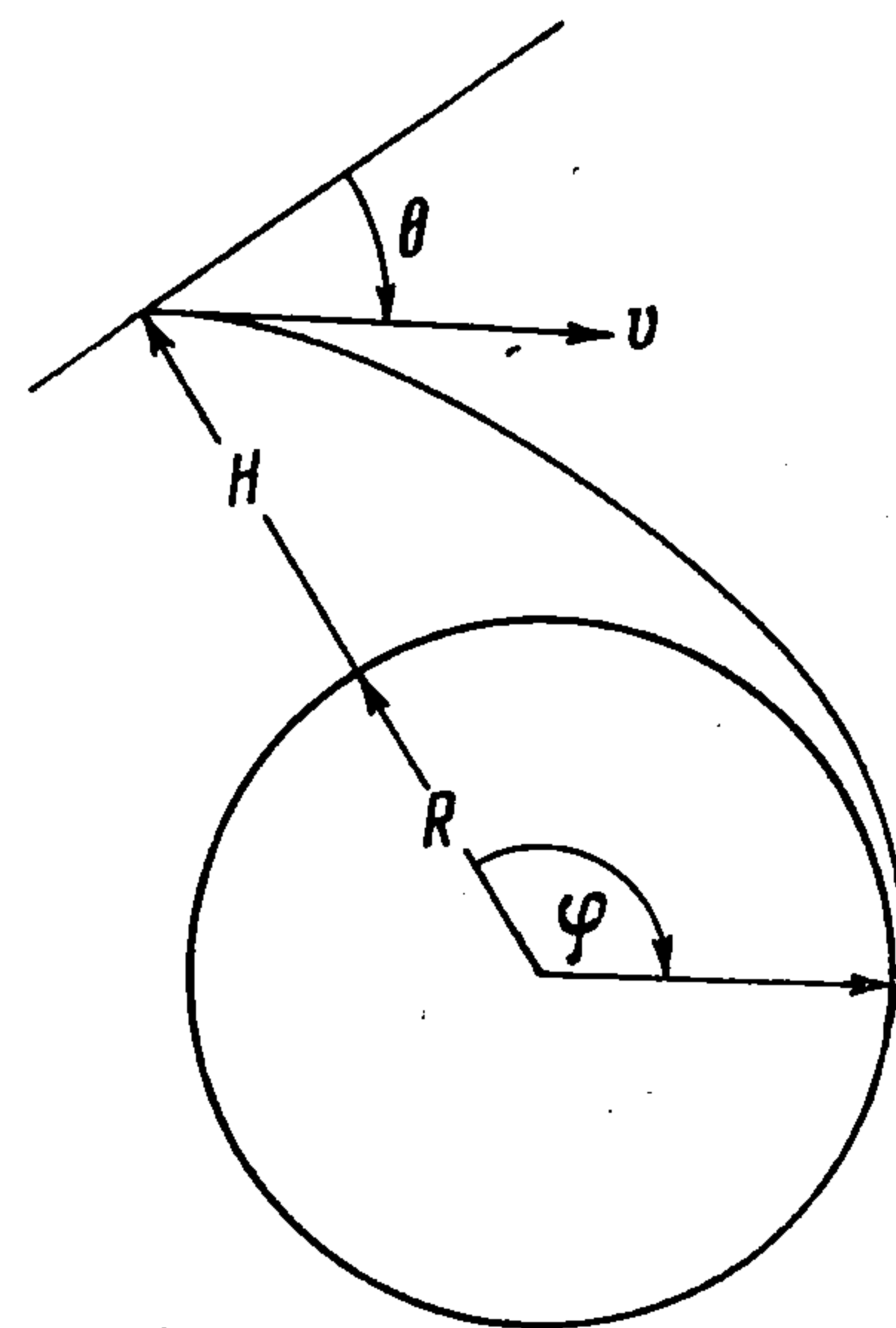
Будем рассматривать тело, обладающее большим аэродинамическим качеством и малым лобовым сопротивлением. Физически это означает, что система близка к консервативной, диссипативные силы малы; однако подъемная сила, которая искривляет траекторию, но не совершает работы, играет существенную роль. Система такого типа рассматривалась в работах [1, 2, 5].

При входе космического корабля в атмосферу планеты осевая перегрузка (а следовательно, и лобовое сопротивление) должна быть малой, так как теплозащита и возможности экипажа ограничены. Для снижения максимальной перегрузки используется вход с качеством, которое может достигать весьма существенных значений [3]. Поэтому очевидно, что рассматриваемая задача имеет непосредственный практический интерес.

§ 2. Исследование нулевого приближения. Введем малый параметр $\varepsilon > 0$ следующим образом. Пусть величины

$$n = \varepsilon N, \quad K = \varepsilon k \quad (2.1)$$

будут порядка единицы. По сути дела, ε по порядку величины равно отношению энергии, выделившейся за время полета в виде тепла, к общей энергии тела в момент входа. Обычно это отношение имеет порядок 10^{-1} и менее. С другой стороны ε^2 можно определить как отношение средней перегрузки за время полета к аэродинамическому качеству.



Фиг. 1

Подставляя (2.1) в (1.4) и устремляя ε к нулю, получим порождающую систему для (1.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dN_0}{d\tau} &= -N_0 \sin \theta_0 \left(\beta V_0 + \frac{2}{V_0} \right), & V_0 \frac{d\theta_0}{d\tau} &= \cos \theta_0 (V_0^2 - 1) + KN_0 \\ \frac{dV_0}{d\tau} &= -\sin \theta_0, & \frac{dl_0}{d\tau} &= V_0 \cos \theta_0, & \frac{dh_0}{d\tau} &= V_0 \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

при начальных условиях

$$\tau = 0, \quad N_0 = N^0, \quad \theta_0 = \theta^0, \quad V_0 = V^0, \quad h_0 = h^0, \quad l_0 = 0$$

Здесь $N_0, V_0, \theta_0, l_0, h_0$ — решение порождающей системы. Будем рассматривать первые три уравнения (2.2), образующие замкнутую систему. Эта система имеет интегралы вида

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{V_0^2} \exp \left(-\frac{\beta V_0^2}{2} \right) &= c_1 = \text{const} \\ \cos \theta_0 V_0 \exp \left(-\frac{V_0^2}{2} \right) - Kc_1 \int_{V^0}^{V_0} V_0^2 \exp \left(\frac{\beta - 1}{2} V_0^2 \right) dV_0 &= c_2 = \text{const} \\ \int_{V^0}^{V_0} \frac{V_0 dV_0}{\sqrt{V_0^2 - (c_2 + Kc_1 J)^2 \exp V_0^2}} + \tau &= c_3 = \text{const} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$J = \int_{V^0}^{V_0} V_0^2 \exp \left(\frac{\beta - 1}{2} V_0^2 \right) dV_0 \quad (\beta \gg 1)$$

Проанализируем качественную картину движения, определяемого решениями порождающей системы. Рассмотрим первые два интеграла из (2.3). Связав c_1 и c_2 с начальными условиями, получим

$$\cos \theta_0 = \frac{e^{\alpha_1(\xi^2 - 1)}}{\xi} \left\{ kn^0 \int_1^\xi \xi^2 e^{\alpha_2(\xi^2 - 1)} d\xi + \cos \theta^0 \right\} \quad (2.4)$$

$$\xi = V_0 / V^0, \quad \alpha_1 = 1/2 (V^0)^2 \quad \alpha_2 = 1/2 (\beta - 1) (V^0)^2$$

Так как $(V^0)^2 \sim 1$, а β для планет земной группы (Венера, Земля, Марс) $\sim 10^3$, то для оценки интеграла в (2.4) воспользуемся его асимптотическим разложением по параметру $1/\alpha_2 = 2 / ((\beta - 1) (V^0)^2) \sim 1/500$.

Производя интегрирование по частям, получим

$$e^{-\alpha_2} \int_1^\xi \xi^2 e^{\alpha_2 \xi^2} d\xi = \frac{1}{2\alpha_2} \left\{ \xi e^{\alpha_2(\xi^2 - 1)} - 1 \right\} + O(\alpha_2^{-2}) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и ограничиваясь членами порядка $O(\alpha_2^{-1})$, будем иметь

$$\cos \theta_0 \approx \frac{e^{\alpha_1(\xi^2 - 1)}}{\xi} \left\{ \frac{kn^0}{2\alpha_2} [\xi e^{\alpha_2(\xi^2 - 1)} - 1] + \cos \theta^0 \right\} \quad (2.6)$$

Рассмотрим поведение двухпараметрических кривых $\cos \theta_0 = f(\xi, \cos \theta^0, kn^0)$ на фазовой плоскости θ_0, ξ в зависимости от значений параметров и $\cos \theta^0, kn^0$.

Параметр kn^0 определяет величину начальной подъемной силы. На фиг. 2 изображено семейство кривых $\xi = f(\theta_0)$ при $\cos \theta^0 = 0.9$; причем $V^0 = \sqrt{2}$, что соответствует входу со второй космической скоростью. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $kn^0 = 2, \alpha_2, 2\alpha_2$.

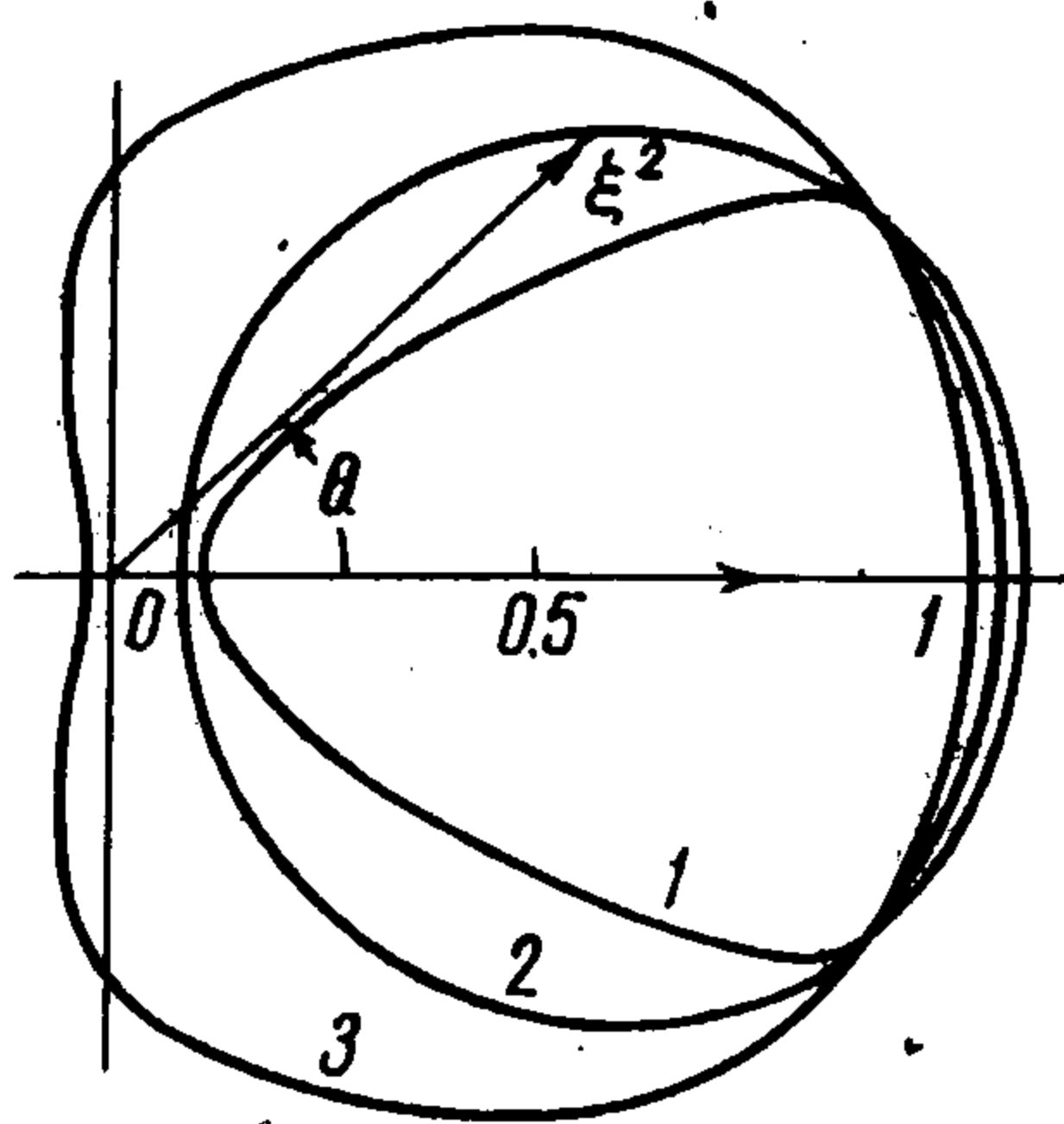
На фиг. 3 изображено семейство кривых $\xi = f(\theta_0)$ при $kn^\circ = 2$, $V^\circ = \sqrt{2}$ и при трех значениях $\cos \theta^\circ = 1, 1/2, 0$.

Фазовые картины показывают, что движение периодически по скорости. (Фазовые траектории замкнуты.)

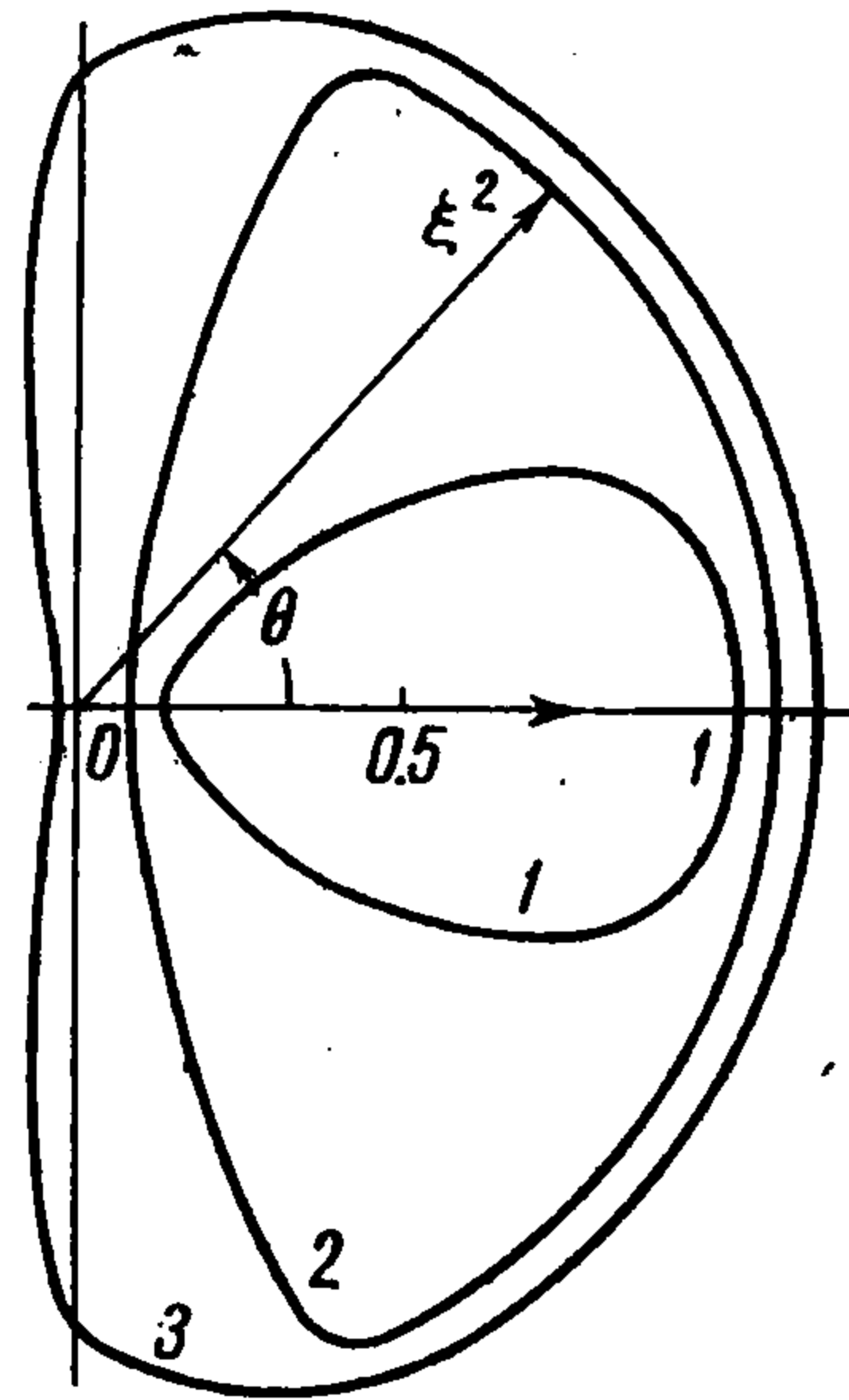
Графики на фиг. 2, 3 представлены в полярных координатах.

Из графиков видно, что все траектории можно разбить на два типа.

1°. В случае $-1/2\pi < \theta_0 < 1/2\pi$ движение носит чисто колебательный характер. Такие движения будем называть «фугейными». На фиг. 4, а изображена траектория такого поле-



Фиг. 2



Фиг. 3

та. Этому типу движения соответствуют фазовые траектории 1, 2 на фиг. 2, 3. Очевидно, что траектории такого типа осуществляются при выполнении условия

$$\cos \theta_0 > 0 \quad (2.7)$$

Тогда из (2.6), следует, что

$$\frac{e^{\alpha_1(\xi^2-1)}}{\xi} \left\{ \frac{kn^\circ}{2\alpha_2} [\xi e^{\alpha_2(\xi^2-1)} - 1] + \cos \theta^\circ \right\} > 0 \quad (2.8)$$

Так как $e^{\alpha_1(\xi^2-1)} / \xi > 0$ при любых $\xi > 0$, то (2.8) равносильно условию

$$\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \xi e^{\alpha_2(\xi^2-1)} + \cos \theta^\circ > \frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \quad (2.9)$$

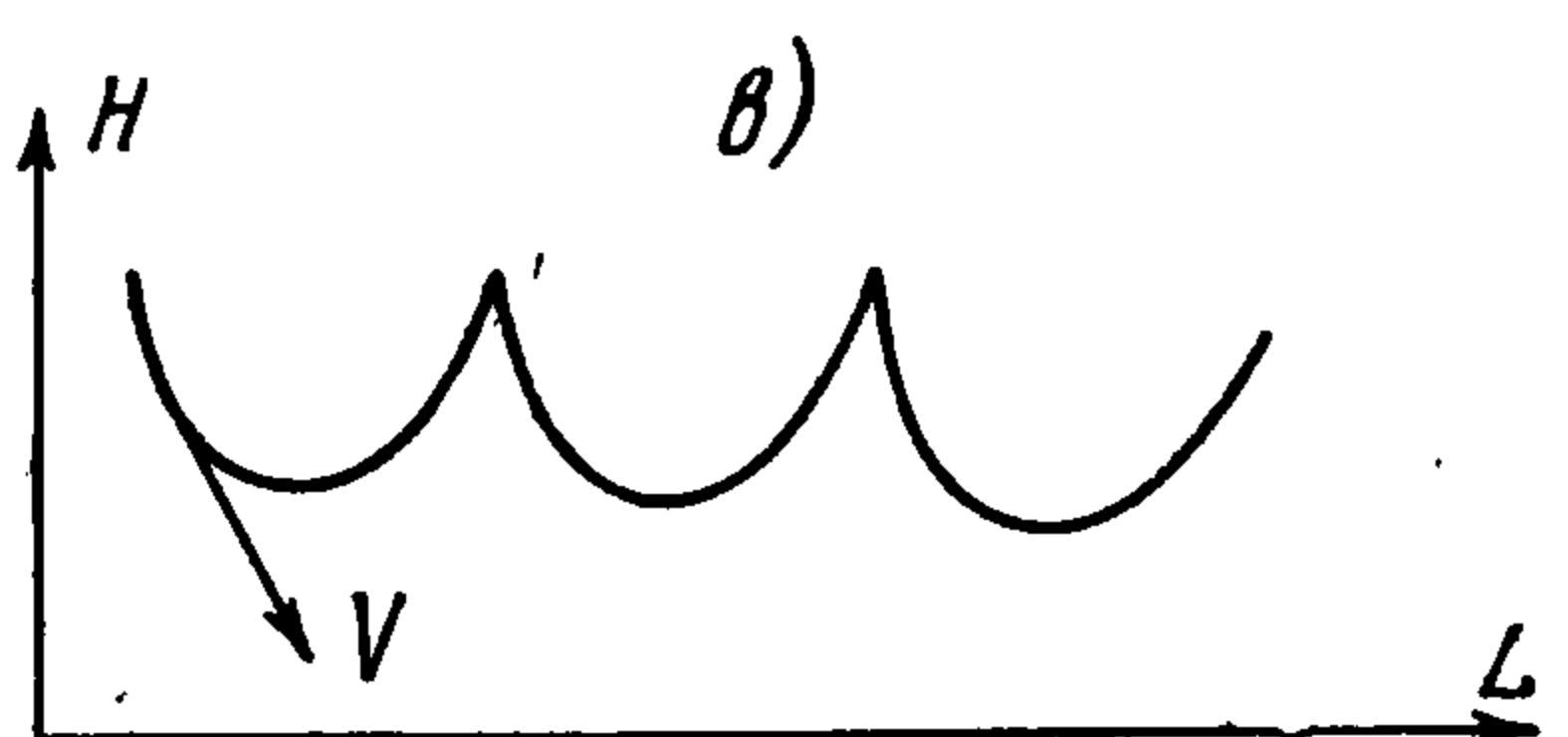
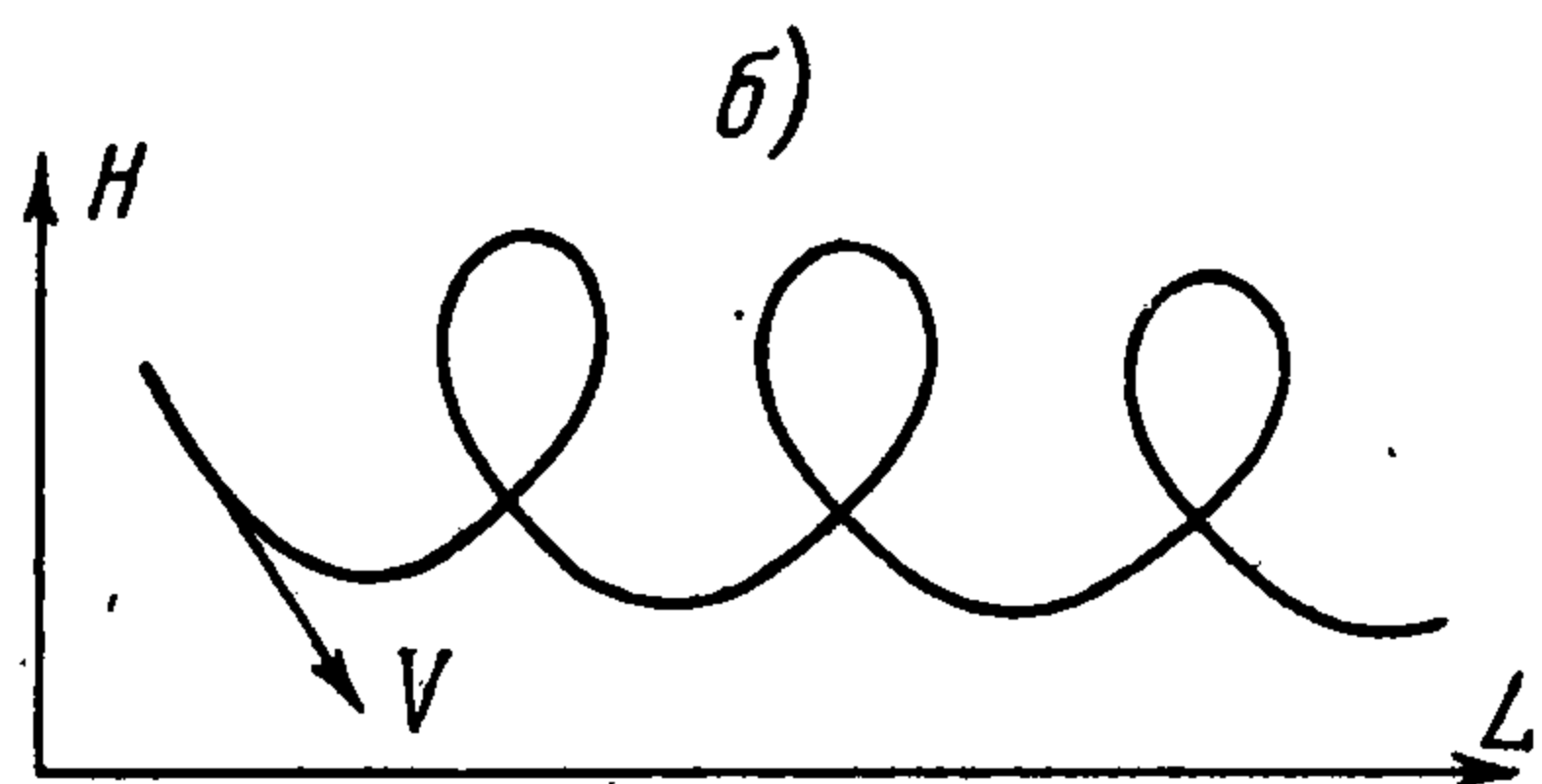
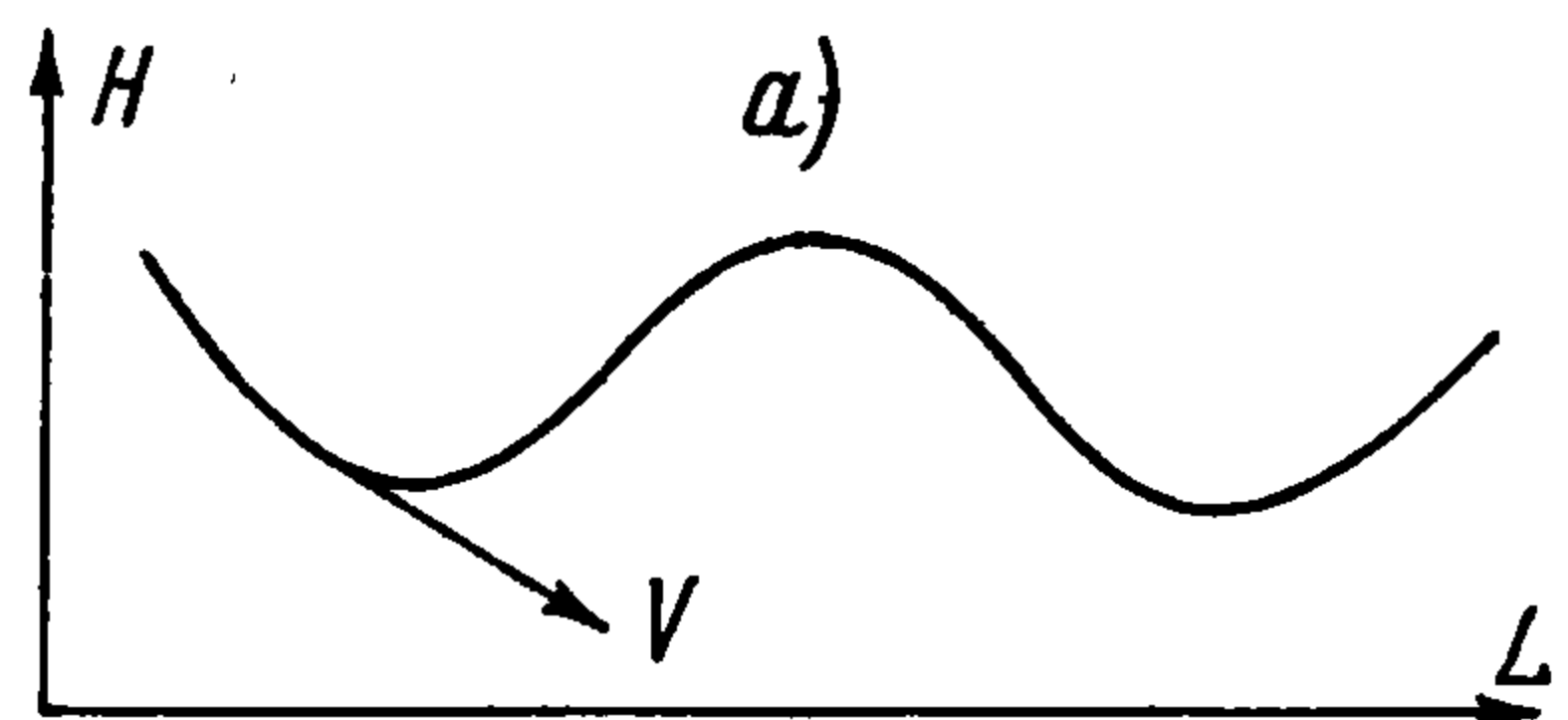
При входе в атмосферу $\cos \theta^\circ$ всегда положителен, поэтому при $\xi > 1$ условие (2.9) всегда выполняется. При $\xi < 1$ член

$$\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \xi e^{\alpha_2(\xi^2-1)}$$

мал по сравнению с единицей. Следовательно, в этом случае условие (2.9) равносильно условию:

$$\cos \theta^\circ > \frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \quad \text{или} \quad \cos \theta^\circ > \frac{kn^\circ}{(\beta-1)v^{\circ 2}} Rg_0,$$

$$\alpha_2 = \frac{(\beta-1)v^{\circ 2}}{2Rg_0} \quad (2.10)$$



Фиг. 4

2°. На некоторых участках траектории $|\theta_0| \geq 1/2\pi$. В этом случае вектор скорости совершает вращательное движение. На фиг. 4, б, в изображен примерный вид траекторий такого типа, которые мы будем называть траекториями с «мертвой петлей». Очевидно, что такие траектории осуществляются при выполнении условия: для неко

торых $\xi \cos \theta_0 \leq 0$, что равносильно условию: для некоторых ξ

$$\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \xi e^{\alpha_2(\xi^2-1)} + \cos \theta^\circ \leq \frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \quad (2.11)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$\cos \theta^\circ \leq \frac{kn^\circ}{2\alpha_2} \quad (2.12)$$

всегда найдется такое ξ ($0 < \xi < 1$), что условие (2.11) будет выполнено. Также, как и в предыдущем случае, (2.12) можно записать в виде

$$\cos \theta^\circ \leq \frac{kn^\circ}{(\beta-1)v^{o2}} Rg_0 \quad (2.13)$$

окончательно, можно сформулировать следующее утверждение: для того чтобы осуществилась траектория с «мертвой петлей», необходимо выполнение условия (2.13), при выполнении условия (2.10) осуществляется фугоидная траектория.

Заметим, что первоначально рассматриваемая система диссипативна, поэтому за некоторое время движение с «мертвой петлей» переходит в фугоидное движение, а фугоидное движение — в движение, угол наклона траектории которого изменяется монотонно. Поэтому вышеназванные условия являются лишь необходимыми.

В заключение выпишем выражения максимальной и минимальной скорости для этих типов траекторий.

Нетрудно видеть, что максимальная и минимальная скорости определяются из уравнения

$$|\cos \theta_0| = 1 \quad (2.14)$$

Из (2.6) имеем

$$\left| \frac{kn^\circ}{2\alpha_2} [\xi^* e^{\alpha_2(\xi^{*2}-1)} - 1] + \cos \theta^\circ \right| = \xi^* e^{-\alpha_1(\xi^{*2}-1)} \quad (2.15)$$

Здесь $V^\circ \xi^*$ — экстремальная скорость. Для траекторий с «мертвой петлей» (2.15) распадается на два уравнения:

для нахождения максимальной скорости

$$\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} [\xi^* e^{\alpha_2(\xi^{*2}-1)} - 1] + \cos \theta^\circ = \xi^* e^{\alpha_1(1-\xi^{*2})} \quad (\xi^* > 1) \quad (2.16)$$

для нахождения минимальной скорости

$$\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} [1 - \xi^* e^{\alpha_2(\xi^{*2}-1)}] + \cos \theta^\circ = \xi^* e^{\alpha_1(1-\xi^{*2})} \quad (\xi^* < 1) \quad (2.17)$$

Если рассматриваемая траектория соответствует фугоидному движению, то будем иметь одно уравнение, которое должно иметь не менее двух решений, соответствующих минимальной и максимальной скоростям

$$\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} [\xi^* e^{\alpha_2(\xi^{*2}-1)} - 1] + \cos \theta^\circ = \xi^* e^{\alpha_1(1-\xi^{*2})} \quad (2.18)$$

Для отыскания приближенного решения (2.16), предположим, что ξ^* мало отличается от единицы. (Фазовые траектории, приведенные на фиг. 2, 3, показывают, что это предположение вполне реально.) Тогда приближенное значение ξ^* определится по формуле

$$\xi^* \approx 1 + \frac{2\alpha_2(1 - \cos \theta^\circ)}{kn^\circ + 2\alpha_2(kn^\circ - 1) + 4\alpha_1\alpha_2}$$

которую можно записать в виде

$$v_{\max} \approx v^\circ \left\{ 1 + \frac{(\beta-1)(v^{o2}/Rg_0)(1 - \cos \theta^\circ)}{kn^\circ + (\beta-1)(v^{o2}/Rg_0)(kn^\circ - 1) + (\beta-1)(v^{o2}/R^2g_0^2)} \right\} \quad (2.19)$$

При отыскании приближенного решения (2.18) предполагаем, что ξ^* мало.

Тогда, пренебрегая членом $\xi^* \exp[\alpha_2(\xi^{*2} - 1)]$ по сравнению с единицей и пренебрегая членами порядка ξ^{*2} , получим

$$\xi^* \approx e^{-\alpha_1} \left(\frac{kn^\circ}{2\alpha_2} + \cos\theta^\circ \right), \quad \text{или} \quad v_{\min} \approx v^\circ \exp\left(\frac{-v^{\circ 2}}{2Rg_0}\right) \left[\frac{kn^\circ Rg_0}{(\beta - 1)v^{\circ 2}} + \cos\theta^\circ \right] \quad (2.20)$$

При приближенном решении уравнения (2.18) предположим, что $\xi_{1,2}^*$ представимо в виде $\xi_{1,2}^* = 1 \mp \delta$, где δ мало. Тогда, пренебрегая членами порядка δ^2 и выше, получим:

$$\xi_{1,2}^* \approx 1 \mp \frac{2\alpha_2(1 - \cos\theta^\circ)}{kn^\circ + 2\alpha_2(kn^\circ - 1) + 4\alpha_1\alpha_2} \quad (2.21)$$

или

$$v_{1,2}^* \approx v^\circ \left\{ 1 \mp \frac{(\beta - 1)(v^{\circ 2}/Rg_0)(1 - \cos\theta^\circ)}{kn^\circ + (\beta - 1)(v^{\circ 2}/Rg_0)(kn^\circ - 1) + (\beta - 1)(v^{\circ 4}/R^2g_0^2)} \right\} \quad (2.22)$$

Здесь знак плюс соответствует максимальной, а знак минус — минимальной скоростям.

Имея первые интегралы движения, можно, используя метод осреднения, изложенный в [6], построить следующее приближение, которое позволило бы судить о влиянии диссипативных членов на траекторию. Ввиду аналитических трудностей, возникающих при построении следующего приближения, в данной работе оно не приводится. Поэтому вопрос о характере перехода траектории с «мертвой петлей» в обычную фугоидную траекторию и дальнейшем затухании фугоидных колебаний остается открытым. Не имея аналитического выражения для времени движения по «мертвой петле», нельзя также ответить на вопрос; сколько «мертвых петель» при определенных начальных данных может совершить корабль до тех пор, пока это движение не перейдет в обычное фугоидное.

Заметим, что полученные условия осуществления того или иного режима полета лишь необходимы, так как влияние диссипативных сил может быть настолько велико, что движение с «мертвой петлей» уже на первой петле может перейти в обычное фугоидное, а обычное фугоидное на первом колебании — в движение с монотонным изменением угла наклона траектории. Для получения достаточных условий нужно провести исследование уравнений первого приближения.

С другой стороны, весьма интересно, что при входе космического корабля в атмосферу, кроме обычных, достаточно хорошо изученных фугоидных колебаний, возможны движения с «мертвой петлей». Так как качественная природа этих движений та же, что и у обычных фугоидных, включаем эти движения в более широкий класс общих фугоидных движений.

Автор благодарит Н. Н. Моисеева за ценные советы и обсуждения.

Поступила 16 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О парении птиц. В кн.: Собр. соч., т. 4. М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 5.
2. I k o n n i k o v E. On the dynamics of symmetrical flight of an aeroplane. Tech. Phys. of the USSR, 1937, vol. 4, No. 6, p. 1.
3. L o h T. H. E. Some analytical solutions of the re-entry problem. Repts of the XIII International Congress of Astronautics. Varna, 1962.
4. Е в т у ш е н к о Ю. Г. Асимптотические методы интегрирования уравнений движения искусственных спутников Земли при наличии аэродинамических воздействий. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 408—417.
5. Я р о ш е в с к и й В. А. Применение асимптотического метода к некоторым задачам динамики летательных аппаратов. Инж. ж., 1962, вып. 2, № 2, стр. 211—221.
6. В о л о с о в В. М. Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 3—53.