формулы (6.6) и (6.7) и удовлетворяя граничным условиям (6.4), получим систему линейных однородных относительно C_j, D_j уравнений. Частотное уравнение получим, приравнивая нулю определитель этой системы. В частотное уравнение входят бесконечные суммы быстро сходящихся рядов. Их быстрая сходимость объясняется тем, что в процессе решения задачи отсутствуют операции дифференцирования, обычно ухудшающие сходимость рядов.

Асимптотическое значение собственных частот можно найти из решения системы трансцендентных уравнений

$$\frac{EI_2}{\rho\omega^2 a^5}(\lambda a)^5 \operatorname{tg} \lambda a + 1 = \frac{EI_1}{\rho\omega^2 b^5}(\lambda b)^5 \operatorname{cth} \lambda b - 1 = 0 \qquad (6.10)$$

Система (6.10) определяет распределение асимптот мероморфной функции частоты, соответствующей частотному уравнению задачи.

Поступила 5 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2, гл. 11. Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Лейбензон Л. С. О натуральных периодах колебания плотины, подпирающей реку. Собр. тр., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1951.

К ЗАДАЧЕ n-НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

И. М. Беленький

(Москва)

Среди различных задач небесной механики, связанных с проблемой n-тел, известный интерес представляет частная задача, когда пассивно гравитирующая точечная масса M движется в предположении, что взаимное расположение остальных активно гравитирующих масс изменяется мало.

Если при этом рассматривать притягивающие массы как точечные и пренебречь изменением взаимного расположения притягивающих тел, то придем к задаче о движении точки M в поле, создаваемым n-неподвижными притягивающими центрами (точка M при этом является $n + 1$ телом).

Из задач подобного рода, наряду с задачей центрального движения ($n = 1$), к разрешимым задачам динамики относится также, указанный еще Эйлером [1], случай двух ($n = 2$) неподвижных ньютонианских притягивающих центров.

Эта задача, представлявшая долгое время лишь теоретический интерес, как пример интегрируемой системы типа Лиувилля [2] приобрела в последнее время интерес в связи с изучением движения искусственных спутников, после того, как было показано, что потенциал сплюснутого сфероида можно уподобить потенциалу специально подобранных двух неподвижных ньютонианских центров притяжения [3,4].

Решения задачи для n-притягивающих центров при $n \geqslant 3$ неизвестно, за исключением одного частного случая трех центров, указанного Лагранжем и более детально рассмотренного Ж. А. Серре [5].

Ниже рассматриваются вопросы существования периодических траекторий в случае n-притягивающих центров, причем принимается произвольный закон притяжения, не обязательно ньютонианский.

Анализ основан на теории квазииндексов особых точек силовых полей, изложенный в работе [6].

1. Пусть точка $M(x, y)$ единичной массы ($m = 1$), находясь в поле n-притягивающих центров с массами m_j, совершает при некотором значении постоянной энергии h периодическое движение по некоторой замкнутой орбите (C).

Полагая, что силы притяжения обратно пропорциональны $(k+1)$ степени расстояния, а постоянная тяготения, в силу определенного выбора единиц измерения, равна единице, выпишем потенциал $V(x, y)$ рассматриваемого поля

$$V(x, y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{r_j^k} \qquad (r_j = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}) \tag{1.1}$$

Вводя в рассмотрение функцию $\Phi(x, y) = \ln \sqrt{2(h - V(x, y))}$, равную, в силу интеграла энергии, натуральному логарифму от величины скорости v точки, и пользуясь понятием квазииндекса J_j особой точки O_j потенциала $V(x, y)$, напишем основное соотношение для периодических траекторий [6]

$$1 - J = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(\sigma)} \Delta\Phi dx dy \qquad (J = J_1 + \ldots + J_s) \tag{1.2}$$

Здесь J — сумма квазииндексов s ($1 \leqslant s \leqslant n$) особых точек O_j ($j = 1, 2, \ldots, s$), находящихся внутри орбиты (C), (σ) — площадь, ограниченная орбитой (C), а Δ — оператор Лапласа.

Пользуясь понятиями плотности $\delta(x, y)$ и веса P функции $\Phi(x, y)$

$$P = \iint_{(\sigma)} \delta(x, y)\, dx dy \qquad \left(\delta = \frac{1}{2\pi}\Delta\Phi\right) \tag{1.3}$$

и замечая, что квазииндекс J_j для особой точки $O_j(x_j, y_j)$ потенциала $V(x, y)$ (1.1) равен $J_j = {}^1/_2 k$, в силу (1.2) и (1.3) получим

$$P = \frac{ks}{2} - 1 \qquad (1 \leqslant s \leqslant n) \tag{1.4}$$

2. Достаточные условия отсутствия периодических траекторий могут быть сформулированы либо в дифференциальной форме, в терминах плотностей $\delta(x, y)$, либо в интегральной форме в терминах весов P функции $\Phi(x, y)$. Что касается необходимых условий существования периодических траекторий, то они будут сформулированы лишь в интегральной форме в весовых терминах функции $\Phi(x, y)$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть в рассматриваемой области (σ) находятся s ($1 \leqslant s \leqslant n$) из общего числа n притягивающих центров, а сила притяжения каждым центром обратно пропорциональна $(k+1)$-степени расстояния. Пусть далее в области (σ) выполняется одно из условий

$$\text{а) } ks > 2, \qquad \text{б) } ks = 2, \qquad \text{в) } ks < 2 \tag{2.1}$$

Тогда достаточным условием отсутствия периодических траекторий в области (σ) является условие знакопостоянства плотности $\delta(x, y)$ функции $\Phi(x, y)$, в зависимости от (2.1), а именно

$$\text{а) } \delta(x, y) \leqslant 0, \qquad \text{б) } \delta(x, y) > 0 \;\; (\delta < 0), \qquad \text{в) } \delta(x, y) \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Теорема 2. Пусть выполняется одно из условий (2.1) теоремы 1. Тогда достаточным условием отсутствия периодических траекторий в области (σ) является следующая знакоопределенность весов P функции $\Phi(x, y)$:

$$\text{а) } P \leqslant 0, \qquad \text{б) } P > 0 \;\; (P < 0), \qquad \text{в) } P \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Теорема 3. Пусть выполняется одно из условий (2.1) теоремы 1. Тогда необходимым условием существования периодических траекторий в области (σ) является следующая знакоопределенность весов P функции $\Phi(x, y)$:

$$\text{а) } P > 0, \qquad \text{б) } P = 0, \qquad \text{в) } P < 0 \tag{2.4}$$

Доказательство этих теорем, в силу (1.3), непосредственно следует из основного соотношения (1.4).

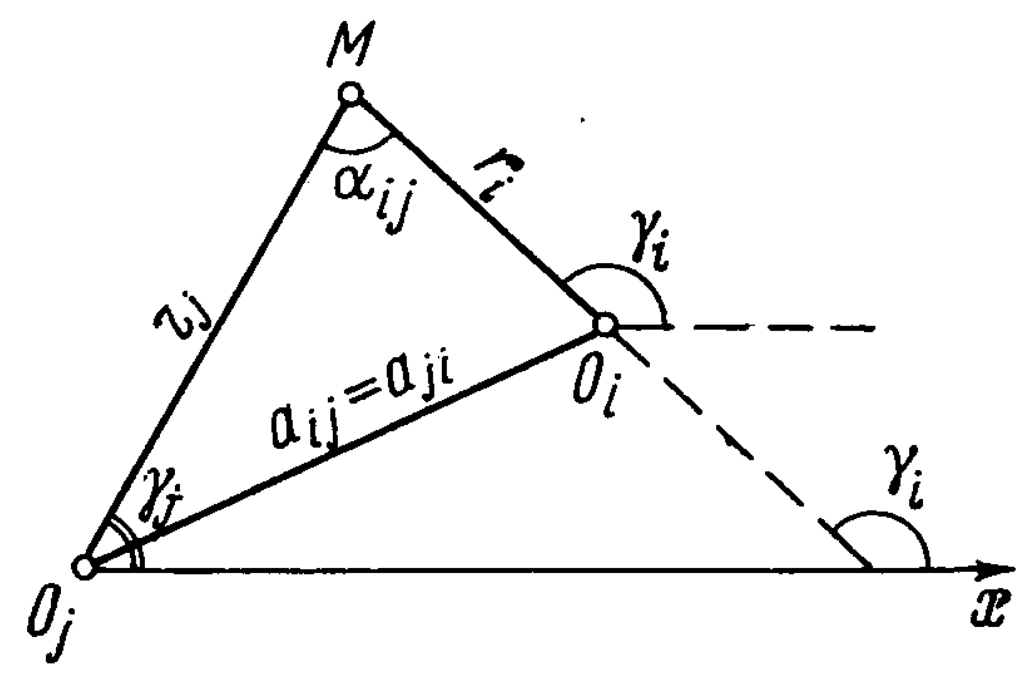
Следует отметить, что достаточные условия отсутствия периодических траекторий (2.2) являются более жесткими, чем аналогичные условия (2.3), так как они требуют знакопостоянства плотности $\delta(x, y)$ во всех точках (за исключением особых точек O_j) области (σ), чего вообще говоря не требуется для выполнения условий (2.3).

В случае ньютонианских притягивающих центров в предыдущих формулах всюду следует принимать $k = 1$.

3. Непосредственный подсчет для плотности $\delta(x, y) = 1/2\pi\Delta\varphi(x, y)$ функции $\Phi(x, y) = \ln\sqrt{2(h - V(x, y))}$ дает

$$\delta(x, y) = -\frac{(h - V)\Delta V + (V_x^2 + V_y^2)}{4\pi(h - V)^2} \tag{3.1}$$

где потенциал $V(x, y)$ определяется в согласии с (1.1). Опуская промежуточные вычисления, выпишем значения входящих величин



Фиг. 1

$$\Delta V = -k^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{r_j^{k+2}} \tag{3.2}$$

$$V_x^2 + V_y^2 - V\Delta V = -\frac{k^2}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n}{}^{*} \frac{m_i m_j a_{ij}^2}{r_i^{k+2} r_j^{k+2}}$$

где

$$a_{ij} = (r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos\alpha_{ij})^{1/2}$$

$$(a_{ij} = a_{ji},\quad a_{jj} = 0) \tag{3.3}$$

есть расстояние между двумя притягивающими центрами O_i и O_j (фиг. 1).

Окончательное выражение для плотности $\delta(x, y)$ имеет вид

$$\delta(x, y) = \frac{k^2}{4\pi(h - V)^2}(h\Lambda(x, y) + Y(x, y)) \tag{3.4}$$

где

$$\Lambda(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{r_j^{k+2}}, \qquad Y(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n}{}^{*} \frac{m_i m_j a_{ij}^2}{r_i^{k+2} r_j^{k+2}} \tag{3.5}$$

а (*) означает, что суммирование производится при $i \neq j$. Следовательно, знак плотности δ будет существенным образом зависеть от постоянной энергии h, так как

$$\operatorname{sign}(\delta) = \operatorname{sign}(h\Lambda + Y) \qquad (\Lambda, Y > 0) \tag{3.6}$$

Полагая все m_j, за исключением одной, равными нулю, получим случай одного притягивающего центра $(n = 1)$. Пусть $m_1 = m \neq 0$. Тогда

$$V = -\frac{m}{r^k}, \qquad \Lambda = \frac{m}{r^{k+2}}, \qquad Y = 0$$

и плотность δ будет равна

$$\delta = \frac{mk^2 h r^{k-2}}{4\pi(m + hr^k)^2} \tag{3.7}$$

Здесь $\operatorname{sign}(\delta) = \operatorname{sign}(h)$, что совпадает с результатом, полученным ранее [6].

Пользуясь терминологией, принятой в задаче двух тел, в зависимости от значений постоянной энергии h будем различать: движение гиперболического типа $(h > 0)$, движение параболического типа $(h = 0)$ и движение эллиптического типа $(h < 0)$. Таким образом для гиперболо-параболических типов движений $(h \geqslant 0)$, в силу (3.6), имеет место знакоположительность плотности δ, а это в силу теоремы 1 является достаточным условием отсутствия периодических траекторий при $ks \leqslant 2$.

Для эллиптического типа движения $(h < 0)$ плотность $\delta(x, y)$ будет знакопеременной. Перемена знака у $\delta(x, y)$ будет происходить при переходе через линию, определяемую уравнением $h\Lambda(x, y) + Y(x, y) = 0$.

4. Уравнение кривых Хилла $V(x, y) = h$, ограничивающих область возможных движений точки $M(x, y)$ в силу (1.1) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{r_j^k} = -h \qquad (r_j = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}) \tag{4.1}$$

Кривые Хилла позволяют делать некоторые качественные суждения о характере движения. Так, плотность $\delta(x, y)$ при приближении к кривым Хилла (4.1) по модулю неограниченно возрастает, принимая на самой кривой Хилла, в силу (3.4) и (4.1) бесконечно большие значения.

Будем рассматривать случай эллиптического типа движения ($h < 0$), при больших (по модулю) значениях постоянной энергии h. Из уравнения кривой Хилла (4.1) будет при этом следовать, что одно из значений r_j, скажем r_i, должно быть очень мало, в то время как остальные $r_j (j \neq i)$ будут иметь конечные значения, так как во все время движения будут выполняться неравенства $r_i + r_j \geqslant a_{ij} (j \neq i)$. Следовательно, при большом $|h|$, кривая Хилла будет состоять из n (по числу притягивающих центров) овалообразных кривых, линейные размеры которых очень малы и каждая из которых охватывает притягивающий центр. Поэтому при эллиптическом типе движения в задаче n-притягивающих центров при больших значениях $|h|$ будет иметь место явление «захвата» и точка M будет двигаться внутри одного из этих овалов, а именно внутри того, где она находилась в начальный момент.

Приближенно этот овал, где имеет место захват, может быть представлен в виде круга малого радиуса r_i, определяемого соотношением

$$r_i \sim \left(\frac{m_i}{-h-b_i}\right)^{1/k} \qquad \left(-h > 0,\ b_i = \sum_{j=1}^{n}{}^{*} \frac{m_j}{a_{ij}^k}\right) \tag{4.2}$$

где m_i — масса притягивающего центра O_i, находящегося внутри овала, а знак звездочки означает, что при суммировании $j \neq i$.

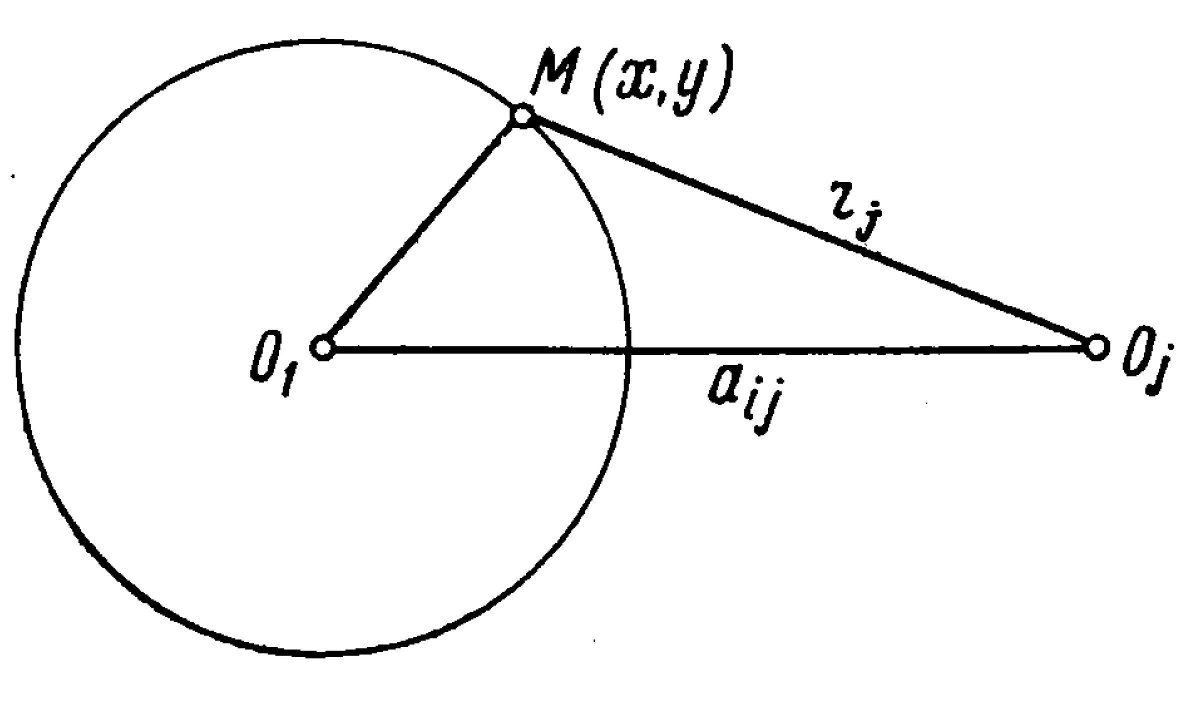
5. Рассмотрим вопрос о существовании периодических траекторий, в окрестности какого-либо притягивающего центра, скажем O_1, при наличии других притягивающих центров O_j ($j = 2, 3, \ldots, n$).

Полагая начало координат в точке O_1 (фиг. 2) и обозначая в дальнейшем r_1 через r, а m_1 через m, выпишем значения величин, входящих в выражение для плотности $\delta(x, y)$ (3.4). Имеем

$$V(x, y) = -\frac{m}{r^k}(1 + r^k F_1(x, y))$$

$$\Lambda(x, y) = \frac{m}{r^{k+2}}(1 + r^{k+2} F_2(x, y))$$

$$Y(x, y) = \frac{m}{r^{k+2}} \sum_{j=2}^{n} \frac{m_j a_{1j}^2}{r_j^{k+2}} + F_3(x, y)$$



Фиг. 2

где $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ и $F_3(x, y)$ — целые функции от x и y. Ограничиваясь в указанных разложениях лишь главными членами, получим следующее приближенное значение для плотности:

$$\delta = \frac{mk^2 (h + b_1) r^{k-2}}{4\pi (m + hr^k)^2} \qquad \left(b_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{m_j}{a_{1j}^k}\right) \tag{5.1}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sign}(\delta) = \operatorname{sign}(h + b_1)$$

Поэтому в силу теоремы 1 в зависимости от значений показателя k, а именно: 1) $k > 2$, 2) $k = 2$ и 3) $k < 2$ достаточными условиями отсутствия периодических траекторий в окрестности притягивающего центра O_1, является выполнение соответственно одного из следующих неравенств:

$$1)\ h + b_1 \leqslant 0, \qquad 2)\ h + b_1 \neq 0, \qquad 3)\ h + b_1 \geqslant 0$$

Если при указанных выше значениях k будут иметь место соотношения:

$$1)\ h + b_1 > 0, \qquad 2)\ h + b_1 = 0, \qquad 3)\ h + b_1 < 0$$

то в силу теоремы 3, необходимые (но недостаточные) условия существования периодических траекторий будут выполняться.

Автор благодарит Г. Н. Дубошина за внимание к работе.

Поступила 23 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937, стр. 112—114.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд-во Наука, 1964, стр. 186—196.
3. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения земли. Сб. «Искусственные спутники земли». Изд-во АН СССР, 1961, вып. 8.
4. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников земли. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». Изд-во АН СССР, 1963.
5. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Гостехиздат, М.— Л. 1950, т. 2, стр. 392—395.
6. Беленький И. М. О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для консервативных систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.

К ТЕОРИИ ФУГОИДНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Ю. М. Свирежев

(Донецк)

В 1891 Н. Е. Жуковским в работе «О парении птиц» [1] была решена задача о движении тела с большим аэродинамическим качеством в атмосфере постоянной плотности. В работе [2] эта задача рассматривалась более подробно, но основное предположение о постоянстве плотности в этой работе было сохранено. За последнее время появилось большое количество работ, посвященных аналитическому решению задачи о входе в атмосферу как с первой, так и со второй космическими скоростями [3-5]. Но в этих работах в основном рассматривались задачи баллистического входа и входа с малым качеством, причем при рассмотрении колебательных режимов ограничивались малыми углами наклона траектории к местному горизонту. В предлагаемой работе рассматривается задача без каких-либо ограничений на угол наклона траектории и начальные скорости, для некоторого гипотетического космического корабля — планера, обладающего достаточно большим качеством. Любопытно отметить, что решение такой задачи сводится к решению задачи Н. Е. Жуковского, но в атмосфере переменной плотности. Возникающие при этом траектории носят название «фугоидных». Все предположения о параметрах такого планера носят сугубо гипотетический характер.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается движение тела с большим аэродинамическим качеством в плоскости большого круга сферической невращающейся планеты с изотермической атмосферой.

Тогда движение рассматриваемого тела описывается следующей системой уравнений

$$\frac{dv}{dt} = - g\sin\theta - \frac{c_x S}{2m}\rho v^2, \qquad \frac{dH}{dt} = v\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\left(\frac{v}{R+H} - \frac{g}{v}\right) + \frac{kc_x S}{2m}\rho v, \qquad \frac{dL}{dt} = v\cos\theta \tag{1.1}$$

$$\left(\rho = \rho_0 e^{-\lambda H}, \quad g = g_0\frac{R^2}{(R+H)^2}\right)$$