

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА

Л. И. Балабух, А. Г. Молчанов (Москва)

Рассматривается однородное дифференциальное уравнение второго порядка с однородными граничными условиями, зависящими от параметра. Такое уравнение получается при решении задачи о собственных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в упругом сосуде методом разделения переменных. Доказывается полнота системы собственных функций рассматриваемой краевой задачи и приводится разложение произвольной кусочно-непрерывной функции в ряд по этим функциям.

1. Для краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \quad x=0, \quad (A_0 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda^4) \frac{dy}{dx} = y; \quad x=1, \quad B \frac{dy}{dx} = y \quad (1.1)$$

требуется найти собственные значения  $\lambda_m$ , собственные функции  $y_m(x, \lambda)$ , доказать полноту этой системы собственных функций и построить разложение произвольной кусочно-непрерывной ограниченной функции  $f(x)$  в ряд Фурье по функциям  $y_m(x, \lambda)$ .

2. Для решения этой задачи, следуя [1], рассмотрим колебания струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

при специально выбранных граничных условиях

$$\xi=0, \quad \left( A_0' - A_1' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A_2' \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} = y; \quad \xi=l, \quad B' \frac{\partial y}{\partial \xi} = y \quad (2.2)$$

Здесь  $y$  — прогиб струны,  $\xi$  — координата точек струны,  $\rho$  — погонная масса,  $T$  — сила натяжения струны,  $A_0', A_1', A_2', B'$  — константы.

Нетрудно видеть, что задача о собственных колебаниях такой струны сводится к рассмотрению краевой задачи (1.1), если положить

$$x = \frac{\xi}{l}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho \omega^2 l^2}{T}, \quad A_0 = \frac{A_0'}{l}, \quad A_1 = \frac{A_1' T}{\rho l^3}, \quad A_2 = \frac{A_2' T^2}{\rho^2 l^5}, \quad B = \frac{B'}{l} \quad (2.3)$$

Здесь  $\omega$  — частота собственных колебаний. Зададим начальные условия:

$$t=0, \quad y=0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f(\xi) \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.1) и начальных условий (2.4) получим

$$t=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = \frac{T}{\rho} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \quad (2.5)$$

3. Применим к уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2) преобразование Лапласа, учитывая начальные условия (2.4) и (2.5). Получим

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} - \frac{\rho s^2}{T} Y = -\frac{\rho}{T} f(\xi) \quad (3.1)$$

$$\xi=0, \quad (A_0' - A_1' s^2 + A_2' s^4) \frac{dY}{d\xi} + (A_1' - s^2 A_2') \frac{df}{d\xi} - \frac{T}{\rho} A_2' \frac{d^3 f}{d\xi^3} = Y$$

$$\xi=l, \quad B' \frac{dY}{d\xi} = Y \quad (3.2)$$

Здесь  $Y(\xi, s)$  — изображение функции  $y(\xi, t)$ . Полагая  $\omega^2 = -s^2$  и переходя к безразмерной координате  $x$ , получим в изображениях:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \lambda^2 Y = -\frac{\rho l^2}{T} f(x), \quad (3.3)$$

$$x=0, \quad c_1(\lambda) \frac{dY}{dx} + \frac{\rho l^2}{T} \left[ c_2(\lambda) \frac{df}{dx} - A_2 \frac{d^3 f}{dx^3} \right] = Y \quad \left( \begin{array}{l} c_1(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda^4 \\ c_2(\lambda) = A_1 + A_2 \lambda^2 \end{array} \right)$$

$$x=1, \quad B \frac{dY}{dx} = Y \quad (3.4)$$

Представим общее решение в виде  $Y = Y_1 + Y_2$ , где  $Y_1$  — решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \lambda^2 Y_1 = -\frac{\rho l^2}{T} f(x) \quad (3.5)$$

при однородных граничных условиях

$$x=0, \quad c_1(\lambda) \frac{dY_1}{dx} = Y_1; \quad x=1, \quad B \frac{dY_1}{dx} = Y_1 \quad (3.6)$$

а  $Y_2$  — решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 Y_2}{dx^2} + \lambda^2 Y_2 = 0$$

при неоднородных граничных условиях

$$x=0, \quad c_1(\lambda) \frac{dY_2}{dx} - Y_2 = -\frac{\rho l^2}{T} \left[ c_2(\lambda) \frac{df}{dx} - A_2 \frac{d^3 f}{dx^3} \right]; \quad x=1, \quad B \frac{dY_2}{dx} = Y_2 \quad (3.7)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} Y_1 = & \frac{\rho l^2}{T} \frac{1}{2\lambda} \frac{1}{\lambda c_1(\lambda) (\cos \lambda + B\lambda \sin \lambda) - B\lambda \cos \lambda + \sin \lambda} \times \\ & \times \left\{ \lambda c_1(\lambda) \left[ \int_x^1 f(\zeta) \sin \lambda (1+x-\zeta) d\zeta + \int_0^1 f(\zeta) \sin \lambda (1-x-\zeta) d\zeta + \right. \right. \\ & + \int_0^x f(\zeta) \sin \lambda (1-x+\zeta) d\zeta - B\lambda \left( \int_x^1 f(\zeta) \cos \lambda (1+x-\zeta) d\zeta + \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 f(\zeta) \cos \lambda (1-x-\zeta) d\zeta + \int_0^x f(\zeta) \cos \lambda (1-x+\zeta) d\zeta \right) \right] - \\ & - \int_x^1 f(\zeta) \cos \lambda (1+x-\zeta) d\zeta + \int_0^1 f(\zeta) \cos \lambda (1-x-\zeta) d\zeta - \int_0^x f(\zeta) \cos \lambda (1-x+\zeta) d\zeta + \\ & + B\lambda \left[ - \int_x^1 f(\zeta) \sin \lambda (1+x-\zeta) d\zeta + \int_0^1 f(\zeta) \sin \lambda (1-x-\zeta) d\zeta - \right. \\ & \left. \left. - \int_0^x f(\zeta) \sin \lambda (1-x+\zeta) d\zeta \right] \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$Y_2 = -\frac{\rho l^2}{T\lambda} \frac{\lambda [B\lambda \cos \lambda (1-x) - \sin \lambda (1-x)] [c_2(\lambda) (df/dx)_{x=0} - A_2 (d^3 f/dx^3)_{x=0}]}{\lambda c_1(\lambda) (\cos \lambda + B\lambda \sin \lambda) - B\lambda \cos \lambda + \sin \lambda} \quad (3.9)$$

4. Функция  $Y = Y_1 + Y_2$  представляет собой мероморфную функцию комплексного переменного  $\lambda$ , простые полюса которой определяются уравнением

$$\lambda c_1(\lambda) (\cos \lambda + B\lambda \sin \lambda) - B\lambda \cos \lambda + \sin \lambda = 0 \quad (4.1)$$

Из этого же уравнения определяются собственные числа краевой задачи (1.1). Уравнение (4.1) имеет счетное множество действительных и конечное число мнимых и комплексных корней. Действительная и мнимая оси комплексной плоскости  $\lambda$  будут осями симметрии этих корней.

Легко показать, что разложение функции  $Y$  на простые дроби будет

$$Y(x, \lambda) = \sum_{(m)} \frac{\text{res}_{\lambda_m} Y(x, \lambda)}{\lambda - \lambda_m} \quad (4.2)$$

Суммирование в формуле (4.2) производится по всем полюсам комплексной плоскости  $\lambda$

$$\operatorname{res}_{\lambda_m} Y(x, \lambda) = -\frac{\rho l^2}{T} \frac{D_1 + \lambda_m [c_2(\lambda_m)(df/dx)_{x=0} - A_2(d^3f/dx^3)_{x=0}]}{2\lambda_m \{D_2 + \lambda_m^2 [c_2(\lambda_m) + \lambda_m^2 A_2]\}} y_m(x) \quad (4.3)$$

$$\left( D_1 = \int_0^1 f(\zeta) y_m(\zeta) d\zeta, \quad D_2 = \int_0^1 y_m^2(\zeta) d\zeta \right)$$

Здесь  $y_m(x)$  — собственная функция краевой задачи (1.1), соответствующая собственному числу  $\lambda_m$ .

Вследствие симметрии собственных чисел  $\lambda_m$  относительно мнимой оси комплексной плоскости  $\lambda$  и того обстоятельства, что  $\operatorname{res}_{-\lambda_m} Y(x, \lambda) = -\operatorname{res}_{\lambda_m} Y(x, \lambda)$ , разложение (4.2) принимает форму

$$Y(x, \lambda) = \sum_{(m)} \frac{2\lambda_m \operatorname{res}_{\lambda_m} Y(x, \lambda)}{\lambda^2 - \lambda_m^2} \quad (4.4)$$

Суммирование в формуле (4.4) производится по полюсам правой полуплоскости  $\lambda$ , включая только положительную мнимую полуось.

5. Применяя к выражению (4.4) обратное преобразование Лапласа и учитывая, что  $\lambda^2 = -(\rho l^2 / T) s^2$ , получим

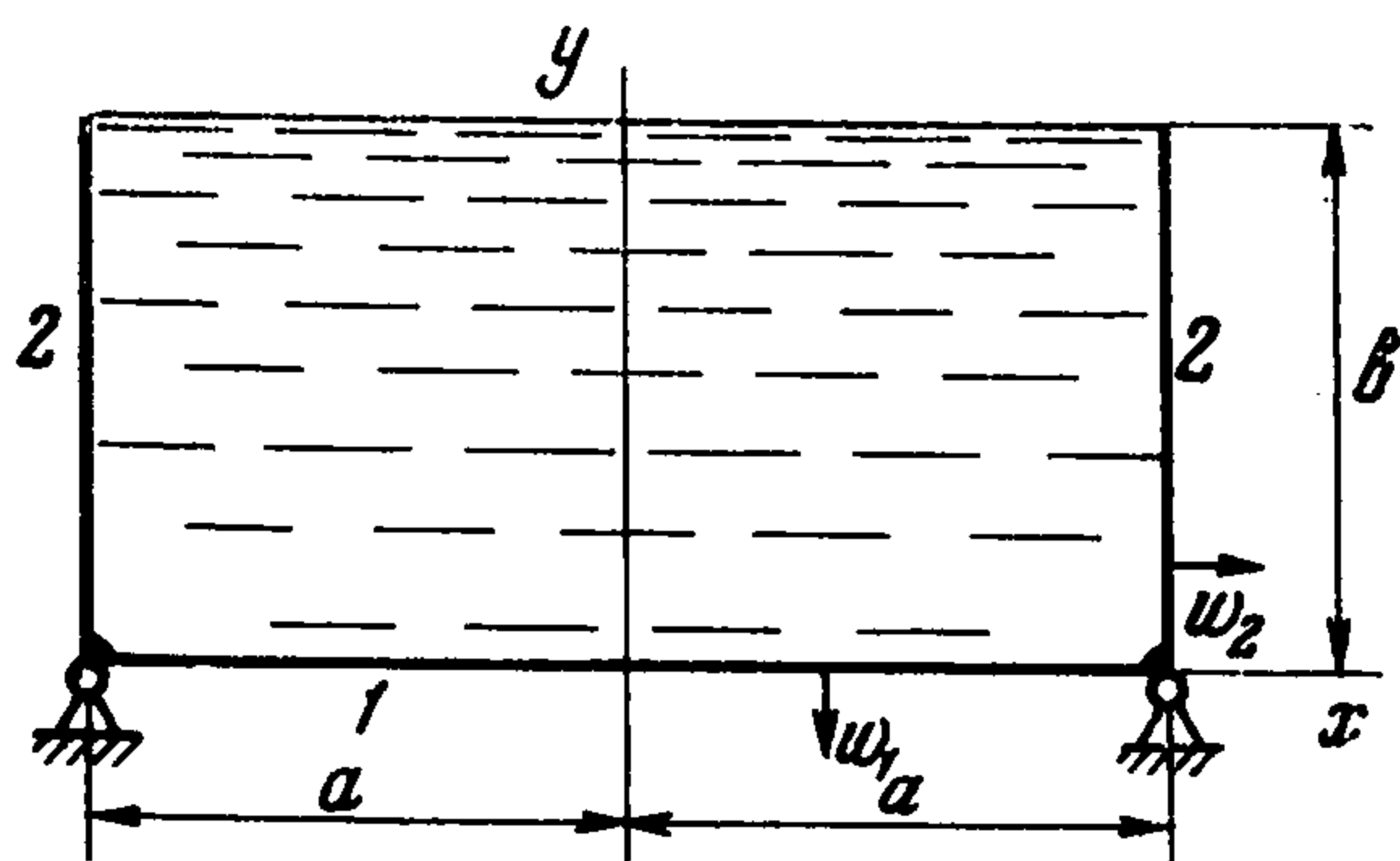
$$y(x, t) = -\left(\frac{T}{\rho l^2}\right)^{1/2} \sum_{(m)} 2\lambda_m \operatorname{res}_{\lambda_m} Y(x, \lambda) \sin \left[ \left(\frac{T}{\rho l^2}\right)^{1/2} \lambda_m t \right] \quad (5.1)$$

В соответствии с начальным условием (2.4) получим

$$f(x) = \sum_{(m)} \frac{D_1 + \lambda_m [c_2(\lambda_m)(df/dx)_{x=0} - A_2(d^3f/dx^3)_{x=0}]}{D_2 + \lambda_m^2 [c_2(\lambda_m) + \lambda_m^2 A_2]} y_m(x) \quad (5.2)$$

Таким образом, доказана полнота системы собственных функций краевой задачи (1.1) и единственность разложения произвольной функции  $f(x)$  в ряд (5.2).

6. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим плоскую задачу гидромеханики о собственных малых осесимметричных колебаниях упругой безынерционной рамы с идеальной несжимаемой жидкостью при отсутствии поля тяготения (фигура). Пусть  $\Phi$  — потенциал скоростей жидкости;  $p$  — давление жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $w_1, w_2$  — прогибы;  $EI_1, EI_2$  — изгибные жесткости стержней 1 и 2 соответственно. Положительные направления  $w_1$  и  $w_2$  показаны на фигуре.



Уравнения движения жидкости

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.1)$$

Граничные условия для жидкости

$$\begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0; \quad x=a, \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = w_2 \\ y=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = w_1; \quad y=b, \quad \Phi = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь и в дальнейшем точка около функции означает дифференцирование по времени.

Уравнения движения стержней

$$EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = [p]_{y=0}; \quad EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = [p]_{x=a} \quad (6.3)$$

Граничные условия для стержней

$$\begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0; \quad x=a, \quad w_1 = 0 \\ \left[ \frac{\partial w_1}{\partial x} \right]_{x=a} = \left[ \frac{\partial w_2}{\partial y} \right]_{y=0} \quad EI_1 \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right]_{x=a} = EI_2 \left[ \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right]_{y=0} \\ y=0, \quad w_2 = 0; \quad y=b, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Потенциал скоростей жидкости, удовлетворяющий части граничных условий (6.2), можно записать в форме

$$\Phi = \left[ \sum_{(m)} A_m \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) \cos \lambda_m x + \sum_{(k)} B_k \operatorname{ch} \mu_k x \sin \mu_k (b-y) \right] \sin \omega t \quad (6.5)$$

Здесь  $\lambda_m$  и  $\cos \lambda_m x$  — собственные числа и собственные функции краевой задачи

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad x=0, \quad \frac{dX}{dx} = 0; \quad x=a, \quad EI_2 \lambda^4 \frac{dX}{dx} = \rho \omega^2 X$$

а  $\mu_k$  и  $\sin \mu_k (b-y)$  — собственные числа и собственные функции краевой задачи

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \mu^2 Y = 0, \quad y=0, \quad EI_1 \mu^4 \frac{dY}{dy} = -\rho \omega^2 Y; \quad y=b, \quad Y = 0$$

Для составления условий совместности скоростей движения жидкости и упругого сосуда воспользуемся методом, предложенным впервые Л. С. Лейбензоном [2]. Давление жидкости рассматриваем как внешнюю нагрузку на сосуд. Решая уравнения о вынужденных колебаниях стержней (6.3), найдем

$$\begin{aligned} w_1 = -\frac{\rho \omega^2}{EI_1} \left[ C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 + \right. \\ \left. + \sum_{(m)} A_m \frac{\operatorname{sh} \lambda_m b}{\lambda_m^4} \cos \lambda_m x + \sum_{(k)} B_k \frac{\sin \mu_k b}{\mu_k^4} \operatorname{ch} \mu_k x \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} w_2 = -\frac{\rho \omega^2}{EI_2} \left[ D_1 \frac{(b-y)^3}{6} + D_2 \frac{(b-y)^2}{2} + D_3 (b-y) + D_4 + \right. \\ \left. + \sum_{(m)} A_m \frac{\cos \lambda_m a}{\lambda_m^4} \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) + \sum_{(k)} B_k \frac{\operatorname{ch} \mu_k a}{\mu_k^4} \sin \mu_k (b-y) \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь  $C_j, D_j (j = 1, 2, 3, 4)$  — константы интегрирования. Функции времени в выражениях (6.6) и (6.7) и в дальнейшем опущены.

Подставляя выражения скоростей прогибов стержней (6.6) и (6.7) в граничные условия (6.2) и учитывая уравнения, определяющие собственные числа  $\lambda_m$  и  $\mu_k$ , получим следующие функциональные уравнения:

$$C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 = \sum_{(m)} A_m \left[ \frac{EI_1}{\rho \omega^2} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m b - \frac{\operatorname{sh} \lambda_m b}{\lambda_m^4} \right] \cos \lambda_m x \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} D_1 \frac{(b-y)^3}{6} + D_2 \frac{(b-y)^2}{2} + D_3 (b-y) + D_4 = \\ = \sum_{(k)} B_k \left[ \frac{EI_2}{\rho \omega^2} \mu_k \operatorname{sh} \mu_k a - \frac{\operatorname{ch} \mu_k a}{\mu_k^4} \right] \sin \mu_k (b-y) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из этих уравнений в соответствии с предыдущими результатами можно определить все  $A_m$  через  $C_j$  и все  $B_k$  через  $D_j (j = 1, 2, 3, 4)$ . Подставляя эти выражения в

формулы (6.6) и (6.7) и удовлетворяя граничным условиям (6.4), получим систему линейных однородных относительно  $C_j, D_j$  уравнений. Частотное уравнение получим, приравняв нулю определитель этой системы. В частотное уравнение входят бесконечные суммы быстро сходящихся рядов. Их быстрая сходимость объясняется тем, что в процессе решения задачи отсутствуют операции дифференцирования, обычно ухудшающие сходимость рядов.

Асимптотическое значение собственных частот можно найти из решения системы трансцендентных уравнений

$$\frac{EI_2}{\rho\omega^2 a^5} (\lambda a)^5 \operatorname{tg} \lambda a + 1 = \frac{EI_1}{\rho\omega^2 b^5} (\lambda b)^5 \operatorname{cth} \lambda b - 1 = 0 \quad (6.10)$$

Система (6.10) определяет распределение асимптот мероморфной функции частоты, соответствующей частотному уравнению задачи.

Поступила 5 IV 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2, гл. 11. Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Лейбензон Л. С. О натуральных периодах колебания плотины, подпирающей реку. Собр. тр., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1951.

### К ЗАДАЧЕ $n$ -НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

И. М. Беленький

(Москва)

Среди различных задач небесной механики, связанных с проблемой  $n$ -тел, известный интерес представляет частная задача, когда пассивно гравитирующая точечная масса  $M$  движется в предположении, что взаимное расположение остальных активно гравитирующих масс изменяется мало.

Если при этом рассматривать притягивающие массы как точечные и пренебречь изменением взаимного расположения притягивающих тел, то приходим к задаче о движении точки  $M$  в поле, создаваемым  $n$ -неподвижными притягивающими центрами (точка  $M$  при этом является  $n + 1$  телом).

Из задач подобного рода, наряду с задачей центрального движения ( $n = 1$ ), к разрешимым задачам динамики относится также, указанный еще Эйлером [1], случай двух ( $n = 2$ ) неподвижных ньютоновских притягивающих центров.

Эта задача, представлявшая долгое время лишь теоретический интерес, как пример интегрируемой системы типа Лиувилля [2] приобрела в последнее время интерес в связи с изучением движения искусственных спутников, после того, как было показано, что потенциал сплюснутого сфероида можно уподобить потенциалу специально подобранных двух неподвижных ньютоновских центров притяжения [3,4].

Решения задачи для  $n$ -притягивающих центров при  $n \geq 3$  неизвестно, за исключением одного частного случая трех центров, указанного Лагранжем и более детально рассмотренного Ж. А. Серре [5].

Ниже рассматриваются вопросы существования периодических траекторий в случае  $n$ -притягивающих центров, причем принимается произвольный закон притяжения, не обязательно ньютоновский.

Анализ основан на теории квазииндексов особых точек силовых полей, изложенный в работе [6].