СПИНОР КАК ИНВАРИАНТНЫЙ ОБЪЕКТ

В. А. Желнорович

(Москва)

§ 1. Представление спиноров системами тензоров. В квантовой механике некоторые элементарные частицы описываются несколькими волновыми функциями, представляющими собой спинор в трех- или четырехмерном пространстве. Спиноры могут быть использованы также в качестве обобщенных параметров при построении моделей сплошных сред.

Спинор, рассматриваемый как линейный геометрический объект, может быть определен только на ортогональной группе преобразований координат. Тем не менее, спинорные уравнения можно записать в виде эквивалентных уравнений, которые можно рассматривать в произвольных криволинейных системах координат.

1°. *Основные определения.* Рассмотрим сначала спиноры в четырехмерном пространстве Миньковского R_4, отнесенному к ортогональной системе координат x^k. Координату x^4 предполагаем комплексной. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — матрицы Дирака, которые по определению удовлетворяют уравнению:

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}J \tag{1.1}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, J — единичная матрица.

Если система γ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — решение уравнения (1.1), то, как легко видеть, система $T\gamma_iT^{-1}$ также будет решением (1.1) при произвольной невырожденной матрице T. Всякие два решения γ_i, $\gamma_i{}^\circ$ связаны равенством $\gamma_i{}^\circ = T\gamma_iT^{-1}$ с соответственно определенной [1] матрицей T.

Воспользуемся следующим набором эрмитовых матриц γ_i: (1.2)

$$\gamma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Пусть $L = \| l_q{}^p \|$ — преобразование Лорентца пространства R_4. Поставим в соответствие каждому преобразованию L унимодулярную матрицу четвертого порядка S, определяемую из матричного уравнения

$$\gamma_i = l_i{}^p S\gamma_p S^{-1}$$

Множество матриц S, соответствующих группе преобразований Лорентца L, также будет группой и образует линейное представление группы L, называемое спинорным представлением. Объект $\Psi = \{\psi^i\}$ с компонентами ψ^i, определенными с точностью до знака, преобразующийся по представлению S, называется спинором первого ранга в пространстве R_4.

Можно показать, что группу преобразования спиноров S нельзя рассматривать как подгруппу некоторой группы, осуществляющей представление полной аффинной группы преобразований координат (см. приложение). Очевидно, если система матриц γ_i является решением (1.1), то и транспонированные матрицы $\gamma_i{}^*$ также решение (1.1), поэтому существует матрица C такая, что

$$\gamma_i{}^* = C\gamma_iC^{-1}, \qquad \det C = 1$$

Ковариантные компоненты спинора ψ_k определяются формулой

$$\psi_k = e_{ki}\psi^i \qquad (E = \| e_{ki} \| = C\gamma_5, \ \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)$$

2°. *Представление спиноров системой комплексных тензоров.* Как известно [2], спинор Ψ в пространстве R_4 эквивалентен тензорному агрегату Λ, состоящему из комплексного вектора C_i и комплексного антисимметричного тензора второго ранга C_{pq}, удовлетворяющих шести независимым алгебраическим уравнениям. Компоненты

C_i, C_{pq} могут быть определены следующим образом:

$$C_i = (E\gamma_i)_{mn} \psi^m \psi^n, \qquad C_{pq} = {}^1\!/_2 E (\gamma_p \gamma_q - \gamma_q \gamma_p)_{mn} \psi^m \psi^n \tag{1.3}$$

Для матриц (1.2) имеем

$$E = \gamma_4 \gamma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Связь компонент ψ^k и тензорного агрегата Λ осуществляется формулой

$$\psi^k = \frac{\psi^{nk}}{\pm \sqrt{\psi^{nn}}} \tag{1.4}$$

Здесь $\psi^{nk} = \psi^n \psi^k$ — компоненты объекта, алгебраически эквивалентного агрегату Λ. Компоненты ψ^{nk} определяются через компоненты C_i, C_{pq} из формул (1.3).

Компоненты тензоров C_i, C_{pq} удовлетворяют следующим инвариантным уравнениям [3]:

$$C^i C_i = 0, \quad C^{ik} C_{ik} = 0, \quad C^{[ik} C^{pq]} = 0, \quad C^i C_{ik} = 0, \quad C^i C^k + C^{ip} C_p{}^k = 0, \quad C^{[i} C^{pq]} = 0 \tag{1.5}$$

Здесь квадратные скобки над индексами означают альтернирование по этим индексам. Пятое уравнение (1.5) определяет с точностью до знака компоненты вектора C_k через компоненты C_{pq}:

$$C_k = \frac{i C_{kn} C_p{}^n}{\pm \sqrt{C_{pn} C_p{}^n}}$$

Среди уравнений (1.5) уравнения (1.5.2), (1.5.3) и четыре уравнения из (1.5.5) независимы.

В силу наличия взаимно однозначной связи (1.4) между компонентами спинора ψ^k и агрегатом Λ, каждое спинорное уравнение может быть записано эквивалентным образом как уравнение в компонентах C_i, C_{pq}.

3°. *Представление спиноров системой вещественных тензоров.* Наряду с комплексным агрегатом $\Lambda = \{C_i, C_{pq}\}$ из компонент спинора ψ^k может быть образован вещественный тензорный агрегат $\Omega = \{\Omega, j^k, M^{ik}, S^{ijk}, N^{ijkl}\}$, удовлетворяющий девяти независимым алгебраическим уравнениям. Компоненты тензоров Ω, j^k, M^{ik}, S^{ijk}, N^{ijkl} могут быть определены [4] следующим образом [1]:

$$\begin{gathered} \Omega = \gamma_{mn}^4 \bar{\psi}^m \psi^n, \qquad J_p = i(\gamma_4 \gamma_p)_{mn} \bar{\psi}^m \psi^n, \qquad M^{pq} = i(\gamma_4 \gamma_p \gamma_q)_{mn} \bar{\psi}^m \psi^n \\ S_{ijk} = (\gamma_4 \gamma_i \gamma_j \gamma_k)_{mn} \bar{\psi}^m \psi^n, \qquad N_{ijkl} = (\gamma_4 \gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l)_{mn} \bar{\psi}^m \psi^n, \qquad i \neq j \neq k \neq l \end{gathered} \tag{1.6}$$

Компоненты тензоров Ω, j^p, M^{ij}, S^{ijk}, N^{ijkl} удовлетворяют ряду инвариантных уравнений, из которых известны следующие [5,6,7]:

$$\begin{gathered} J^k J_k = -\Omega^2 + {}^1\!/_{24} N_{ijkl} N^{ijkl}, \qquad {}^1\!/_6 S_{ijk} S^{ijk} = -\Omega^2 + {}^1\!/_{24} N_{ijkl} N^{ijkl} \\ \delta_{pqrn}^{ijkl} S_{ijk} j_l = 0, \qquad {}^1\!/_2 M^{ij} M_{ij} = \Omega^2 + {}^1\!/_{24} N_{ijkl} N^{ijkl} \\ \delta_{ijkl}^{pqrn} M^{ij} M^{kl} = 8 \Omega N^{pqrn}, \qquad M_{kp} j^k = {}^1\!/_6 N_{ijkp} S^{ijk} \\ S^{klm} j_k = \Omega M^{lm} + {}^1\!/_2 N^{lmkr} M_{kr} \end{gathered} \tag{1.7}$$

---

[1] Можно показать, что существует ортогональная система координат, в которой компоненты тензоров C^i, C^{pq}, j^p, M^{pq}, $S_k = {}^1\!/_6 \varepsilon_{kijl} S^{ijl}$ имеют вид (см. приложение)

$$\begin{aligned} j^k &= (0, 0, 0, i\rho) \\ S^k &= (0, 0, i\rho, 0), \\ C^k &= (-i\rho, 0, 0, 0) \end{aligned} \qquad M^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & -\Omega & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & -N & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & N - i\Omega \\ 0 & 0 & iN & \Omega \\ -N - iN & 0 & 0 \\ i\Omega - \Omega & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Легко получить также уравнения

$$\delta^{pqr}_{i\,jk} M^i{}_n S^{njk} = 2N^{pqrn} j_n, \qquad M_{pq} S^{pqk} = -2\Omega j^k$$
$$1/2\, S^{ipq} S_{pqj} = j^i j_j + M^{ik} M_{kj} + 1/24\, N_{pqkl} N^{pqkl} g_j{}^i$$
$$j_n S^{ijk} - 1/6\, \delta^{l\,ijk}_{npqr}\, j_l S^{pqr} + M_{np} N^{pijk} = 1/2\, \delta^{i\,jk}_{npq}\, \Omega M^{pq} \tag{1.8}$$

Тензор δ^{pqr}_{ijk} определяется так:

$$\delta^{pqr}_{i\,jk} = \delta_i{}^p \delta_j{}^q \delta_k{}^r - \delta_i{}^p \delta_j{}^r \delta_k{}^q + \delta_i{}^q \delta_j{}^r \delta_k{}^p - \delta_i{}^q \delta_j{}^r \delta_k{}^p + \delta_i{}^r \delta_j{}^p \delta_k{}^q - \delta_i{}^r \delta_j{}^q \delta_k{}^p$$

Аналогично определяется тензор δ^{pqrn}_{ijkl}. Из (1.7) за независимые соотношения можно принять [8] равенства (1.7.1), (1.7.3), (1.7.5), (1.7.6).

Как известно [2], тензорный арегат Ω определяет компоненты спинора ψ^k с точностью до множителя, по модулю равного единице. Связь между компонентами спинора и агрегатом Ω осуществляется формулой

$$\psi^k = \frac{\psi^{n\cdot k}}{\pm\sqrt{\psi^{n\cdot n}}} \exp(i\varphi) \tag{1.9}$$

Здесь $\psi^{n\cdot k} = \bar{\psi}^n \psi^k$ — объект, алгебраически эквивалентный агрегату Ω. Компоненты $\psi^{n\cdot k}$ определяются через компоненты Ω, j^p, M^{ij}, S^{ijk}, N^{ijkl} из уравнений (1.6), φ — произвольное вещественное число.

В силу наличия связи (1.9) между компонентами спинора и агрегатом Ω любые спинорные уравнения могут быть записаны эквивалентным образом как уравнения на объект Ω и фазу φ. Исключая затем из таких уравнений фазу φ, можно получить тензорные уравнения в компонентах агрегата Ω. Для замыкания полученных тензорных уравнений необходимо добавить девять независимых алгебраических уравнений (1.7).

Полученная замкнутая система уравнений не будет эквивалентна исходным спинорным уравнениям. Однако, для физического исследования явлений, описываемых спинорными уравнениями, это обстоятельство не является недостатком такой тензорной системы уравнений, так как только тензоры (1.6) имеют непосредственный физический смысл и все физические величины (при учете связи φ и тензоров Ω, j^k, M^{ij}, S^{ijk}, N^{ijkl} из исходных уравнений) могут быть выражены через эти тензоры.

Между тензорами (1.3) и тензорами (1.6) также существуют алгебраические связи. В частности, имеют место следующие равенства:

$$4\Omega^2 = \bar{C}^i C_i - 1/2\, C_{pq} \bar{C}^{pq}, \qquad 4\Omega j^q = i(C_p \bar{C}^{qp} - \bar{C}_p C^{qp})$$
$$4\Omega M^{pq} = i\delta^{pq}_{i\,j} (\bar{C}^i C^j - C_r{}^i \bar{C}^{rj}), \qquad 8\Omega S^{ijk} = \delta^{i\,jk}_{pqr} (\bar{C}^p C^{qr} + C^p \bar{C}^{qr})$$
$$16\Omega N^{ijkl} = \delta^{i\,jkl}_{pqrn} \bar{C}^{pq} C^{rn}, \qquad N_{ijkl} N^{ijkl} = -6(\bar{C}^i C_i + 1/2\, \bar{C}_{ij} C^{ij}) \tag{1.10}$$
$$4j^p j^q = \bar{C}^p C^q + C^p \bar{C}^q - \bar{C}^{pk} C_k{}^q - C^{pk} \bar{C}_k{}^q - (\bar{C}^i C_i + 1/2\, \bar{C}^{ij} C_{ij}) g^{pq}$$
$$S^p S^q + j^p j^q + g^{pq} (\Omega^2 - 1/24\, N^{ijkl} N_{ijkl}) = 1/2 (\bar{C}^p C^q + C^p \bar{C}^q)$$
$$j^q C_{pq} = i\Omega C_p, \qquad S_{pqr} C^r = \Omega C_{pq} + 1/2\, N_{pqrn} C^{rn}$$
$$M^{kp} C_k = i\Omega C^p, \qquad S^{ijk} C_{ij} = -2\Omega C^k$$
$$C_q j_p = -i\Omega C_{pq} - M_{pk} C^k{}_q, \qquad C_q j_p = i/2 N_{knqp} C^{kn} - M_{qk} C^k{}_p$$

Здесь через $\bar{C}^{pq}$ обозначены комплексно сопряженные компоненты C^{pq} с изменением знака компонент C^{4p}.

4°. *Двукомпонентные спиноры в пространстве Миньковского. Спиноры в трехмерном пространстве.* Как известно [4], для матриц γ_i, определенных формулами (1.2), матрица преобразования спиноров S, соответствующая собственным преобразованиям

Лорентца, имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma^{*-1} \end{Vmatrix}$$

Поэтому две пары компонент $\{\psi^1\psi^2\}$ и $\{\psi^3\psi^4\}$ преобразуются на собственной группе Лорентца независимо одна от другой. Это позволяет рассматривать на собственной группе Лорентца, помимо четырехкомпонентных спиноров, также и двухкомпонентные спиноры.

Ясно, что все построения, проведенные выше для четырехкомпонентных спиноров, справедливы и для двухкомпонентных спиноров. Переход в формулах от одного спинора к другому может быть совершен, если положить $\psi^3 = \psi^4 = 0$.

Эти дополнительные условия дают значительное упрощение связи спинора и тензоров, так как в этом случае компоненты вектора C^i тождественно равны нулю, а тензор C^{pq} принимает специальный вид (в ортогональной системе координат)

$$C^{pq} = \begin{Vmatrix} 0 & -p_z & p_y & p_x \\ p_z & 0 & -p_x & p_y \\ -p_y & p_x & 0 & p_z \\ -p_x & -p_y & -p_z & 0 \end{Vmatrix}, \qquad p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 0 \tag{1.11}$$

удовлетворяя дополнительному соотношению

$$C_{pq} = -{}^1/{}_2\varepsilon_{pqij}C^{ij} \tag{1.12}$$

где ε_{pqij} — единичный, антисимметрический по всем индексам псевдотензор.

В силу (1.12) выполняются все тождества (1.5) за исключением тождества (1.5.3). Таким образом, двухкомпонентный спинор в пространстве Миньковского эквивалентен антисимметрическому тензору C^{pq}, удовлетворяющему тождеству (1.5.3) и тождеству (1.12). Агрегат Ω в этом случае состоит из изотропного вектора j^k. Уравнения (1.10) переходят в уравнения

$$j^p j_p = 0, \qquad j^p C_{pq} = 0$$

При трехмерных пространственных преобразованиях компоненты p_x, p_y, p_z будут компонентами псевдовектора. Спиноры в трехмерном пространстве можно рассматривать как частный случай двухкомпонентных спиноров в четырехмерном пространстве, поэтому ясно, что спинор в трехмерном пространстве эквивалентен изотропному комплексному псевдовектору. Существование двухкомпонентных спиноров в четырехмерном пространстве связано с существованием инвариантного подмножества агрегатов $\{0, C^{pq}\}$. Это значит, что при любом выборе фундаментальных спинтензоров γ_i (а не только при выборе их в форме (1.2)) в пространстве спиноров существует инвариантное относительно собственной группы Лорентца двумерное подпространство.

Для записи спинорных уравнений в тензорной форме, кроме тождеств (1.4) и (1.9), можно также воспользоваться следующей связью спинора и объектов ψ^{pq}, $\psi^{p\cdot q}$:

$$\psi^k = \frac{\psi^{n\cdot k}}{\pm\sqrt{\bar{\psi}^{nn}}} \tag{1.13}$$

При наличии алгебраических уравнений (1.10) формула (1.13) позволяет получить замкнутую систему тензорных уравнений в компонентах C_p, C_{pq}, Ω, j^p, M^{ij}, S^{ijk}, N. Как следует из предыдущего, такая тензорная система уравнений также эквивалентна исходной системе спинорных уравнений.

Резюмируя все изложенное, можно сделать следующие выводы.

1. Четырехкомпонентный спинор в пространстве Миньковского эквивалентен тензорному агрегату $\Lambda = \{C_i, C_{pq}\}$, удовлетворяющему уравнениям (1.5).

Двухкомпонентный спинор в пространстве Миньковского эквивалентен антисимметрическому тензору C_{pq}, удовлетворяющему уравнениям

$$C^{[pq}C^{ij]} = 0, \qquad C_{pq} = -{}^1/{}_2\varepsilon_{pqij}C^{ij}$$

Спинор в трехмерном пространстве эквивалентен изотропному комплексному псевдовектору.

2. Всякое спинорное уравнение может быть записано эквивалентным образом в компонентах тензоров C_i, C_{pq}.

3. Из спинорных уравнений может быть получена замкнутая система уравнений в компонентах тензоров Ω, j^p, M^{ij}, S^{ijk}, N^{ijkl}.

§ 2. Тензорные формы уравнений Дирака. 1°. *Запись уравнений Дирака в компонентах* C_i, C_{pq}. В релятивистской теории электрона, предложенной Дираком, устанавливаются уравнения на четыре волновые функции электрона ψ^k, являющиеся спинором первого ранга в пространстве Миньковского.

Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\gamma^k_{nm}\left(\frac{\partial\psi^m}{\partial x^k}+\frac{ie}{\hbar c}A_k\psi^m\right)+\frac{mc}{\hbar}\psi^n=0 \tag{2.1}$$

Здесь A_k — векторный потенциал внешних электромагнитных полей, $x^4=ict$, m, e — масса и заряд электрона, γ^k — матрицы Дирака, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света в пустоте.

По индексам k, m производится суммирование от 1 до 4. Подставляя в (2.1) тождество $\psi^m=\psi^{nm}/\pm\sqrt{\psi^{nn}}$, легко получить уравнения

$$\gamma^k_{nm}\left(\frac{\partial\psi^{\nu m}}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\psi^{\nu m}}{\psi^{\nu\nu}}\frac{\partial\psi^{\nu\nu}}{\partial x^k}\right)+\left(\frac{ie}{\hbar c}A_k\gamma^k_{nm}\psi^{\nu m}+\frac{mc}{\hbar}\psi^{\nu n}\right)=0 \tag{2.2}$$

Здесь по индексу ν суммирование не производится. Свернув это уравнение с $E_{mn}\psi^{m\nu}$ по индексу n, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{2ie}{\hbar c}A_k\right)C^k=0 \tag{2.3}$$

Свертывая уравнение (2.2) с матрицами $(E\gamma_i)_{mn}\psi^{m\nu}$ по индексу n, а затем по индексам ν с диагональными матрицами J, γ_5, $\gamma_3\gamma_4$, $\gamma_1\gamma_2$, получим уравнения

$$2C^{pq}\nabla_n C^{nk}+\delta^{pq}_{rn}(C^{ri}\nabla^k C_i{}^n+C^r\nabla^k C^n)+4C^{pq}\left(\frac{ie}{\hbar c}A_n C^{nk}-\frac{mc}{\hbar}C^k\right)=0$$
$$(p,\ q=2{,}4,\ p,\ q=1{,}4) \tag{2.4}$$

$$2\,C^p\nabla_n C^{nk}+(C^{pi}\nabla^k C_i-C_i\nabla^k C^{pi})+4C^p\left(\frac{ie}{\hbar c}A_n C^{nk}-\frac{mc}{\hbar}C^k\right)=0\quad(p=1{,}2) \tag{2.5}$$

Очевидно, эти уравнения справедливы для всех наборов индексов p, q, но по этим индексам уравнения зависимы.

По индексу k в (2.4) и (2.5) имеется по три независимых уравнения.

Используя тождества (1.5.1) и (1.5.2), эти уравнения можно привести к виду

$$C^{pq}\left(\nabla_n C^{nk}+\frac{2ie}{\hbar c}A_n C^{nk}-\frac{2mc}{\hbar}C^k\right)+C^{pn}\nabla^k C_n{}^q+C^p\nabla^k C^q=0 \tag{2.6}$$

$$C^p\left(\nabla_n C^{nk}+\frac{2ie}{\hbar c}A_n C^{nk}-\frac{2mc}{\hbar}C^k\right)+C^{pn}\nabla^k C_n=0 \tag{2.7}$$

За систему уравнений, эквивалентную системе Дирака, можно взять уравнение (2.3), два любых уравнения из (2.7) и одно из (2.6), либо по два уравнения из (2.6) и (2.7) (по индексу k). Имея эти уравнения, можно получить уравнения Дирака в спинорной форме, совершая все выкладки, проведенные для получения тензорных уравнений в обратном порядке. Эквивалентность этих уравнений может быть нарушена лишь при умножении уравнения (2.1) на $\sqrt{\psi^{\nu\nu}}$ и при свертке уравнений (2.2).

Однако можно проверить, что в обоих случаях может быть потеряно только нулевое решение, но нулевым решением обладают как уравнения Дирака, так и уравнения (2,3), (2.6), (2.7).

Свертывая уравнения (2.2) с различными матрицами γ^i, $\gamma^i\gamma^j$, ..., по индексам n и ν можно получить ряд других уравнений, следующих из уравнений Дирака. Все они зависимы с уравнениями (2.6), (2.7) и не представляют интереса, в смысле образования полной системы тензорных уравнений.

Пользуясь тождеством (1.13), уравнения Дирака можно записать в виде

$$\gamma_{nm}^{k}\left(\frac{\partial\psi^{\nu\cdot m}}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\psi^{\nu\cdot m}}{\bar\psi^{\nu\nu}}\frac{\partial\bar\psi^{\nu\nu}}{\partial x^k}\right)+\left(\frac{ie}{\hbar c}A_k\gamma_{nm}^{k}\psi^{\nu\cdot m}+\frac{mc}{\hbar}\psi^{\nu\cdot n}\right)=0 \qquad (2.8)$$

Свертывая эти уравнения по индексам n, ν с различными матрицами γ^i, можно получить уравнения в компонентах тензоров C^p, C^{pq}, Ω, $j^p, \ldots, N^{ijkl}$, также эквивалентных системе Дирака. В частности, справедливы уравнения

$$\Omega\left(\frac{2mc}{\hbar}j^p-\nabla_k M^{kp}\right)+i\,[{}^1/_4\,(\bar C_i\nabla^p C^i-{}^1/_2\bar C_{ij}\nabla^p C^{ij})-\Omega\nabla^p\Omega-\frac{2e}{\hbar c}\,\Omega^2 A^p=0$$

$$C^n\left(\frac{2mc}{\hbar}j^p-\nabla_k M^{kp}-\frac{2e}{\hbar c}\Omega A^p\right)+i\nabla^p(\Omega C^n)-i/2\,(C^n\nabla^p\Omega-$$

$$-iC_k\nabla^p M^{kn}-iC^{nk}\nabla^p j_k-{}^1/_2C_{ij}\nabla^p S^{ijn})=0 \qquad (2.9)$$

$$\Omega\left(\nabla_k C^{kq}-\frac{2mc}{\hbar}C^q+\frac{2ie}{\hbar c}A_k C^{kq}\right)+i/2\,[-j_k\nabla^q C^k-{}^1/_2M_{kp}\nabla^q C^{kp}]=0$$

2°. *Уравнения для нейтрино в тензорной форме.* Релятивистское уравнение для нейтрино в форме Паули—Ли—Янга имеет вид

$$\sigma^k\frac{\partial}{\partial x^k}\psi=0$$

где σ^k — двухрядные матрицы, удовлетворяющие уравнению

$$\bar\sigma^p\sigma^q+\sigma^q\,\bar\sigma^p=2g^{pq}J$$

Уравнения Паули—Ли—Янга могут быть получены из уравнений Дирака (2.1), если положить в них $m=0$, $\psi^3=\psi^4=0$, $A_k=0$. Учитывая п. 3 § 1, получим из (2.6), что тензорная форма уравнений Паули —Ли — Янга имеет вид

$$C^{pq}\nabla_n C^{nk}+C^{pn}\nabla^k C_n{}^q=0 \qquad (2.10)$$

где C^{pq} — антисимметричный тензор, удовлетворяющий тождествам (1.5.3) и (1.12). По индексу k в уравнении (2.10) имеется два независимых уравнения.

Из (2.9) получим также уравнения в компонентах j^k, C^{pq}

$$j^r\nabla_k C^{pk}-j^k\nabla^p C_k{}^r=0 \qquad (2.11)$$

3°. *Запись уравнений Дирака в компонентах тензоров* Ω, j^p, M^{pq}, S^{pqr}, N^{pqrn}. Система квазилинейных уравнений (2.3), (2.6) и (2.7) эквивалентна уравнениям Дирака и позволяет рассматривать задачи о движении электрона в гравитационных полях. Однако тензоры C_i, C_{pq}, входящие в эти уравнения, комплексны и, по-видимому, не имеют непосредственного физического смысла.

Как указывалось, из спинорных уравнений может быть получена замкнутая система уравнений на тензоры Ω, $j^p, \ldots, N^{ijkl}$. По сравнению с комплексными уравнениями такая система обладает тем преимуществом, что тензоры, входящие в нее, имеют известный физический смысл, и кроме того, в такую систему входит на одну неизвестную функцию (фаза φ) меньше.

Для записи уравнений Дирака в тензорах $\Omega, \ldots, N^{ijkl}$, подставим тождество

$$\psi^m=\frac{\psi^{\nu\cdot m}}{\sqrt{\psi^{\nu\cdot\nu}}}\exp(i\varphi_\nu)$$

в уравнения Дирака, получим

$$\gamma_{nm}^{k}\psi^{\nu\cdot m}\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial x^k}=i\left[\gamma_{nm}^{k}\left(\frac{\partial\psi^{\nu\cdot m}}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\psi^{\nu\cdot m}}{\psi^{\nu\cdot\nu}}\frac{\partial\psi^{\nu\cdot\nu}}{\partial x^k}\right)+\left(\frac{ie}{\hbar c}\gamma_{nm}^{k}A_k+\frac{mc}{\hbar}\delta_{nm}\right)\psi^{\nu\cdot m}\right. \qquad (2.12)$$

Эта система уравнений на φ_ν, $\psi^{m\cdot n}$ эквивалентна системе Дирака. Обозначим правую часть уравнений (2.12) через $P^{\nu n}$. Тогда

$$\gamma_{nm}^{k}\psi^{\nu\cdot m}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_k}=P^{\nu n} \qquad (2.13)$$

Из системы (2.13) вытекают следующие независимые соотношения на $P^{\nu n}$:

$$\operatorname{Re}[\psi^{l\nu}\gamma_l{}^4{}_n P^{\nu n}] = 0, \qquad \operatorname{Re}[\psi^{l\nu}(\gamma^1\gamma^2\gamma^3)_{ln}P^{\nu n}] = 0$$

$$\operatorname{Re}[\psi^{\lambda l}(\gamma^3\gamma^1)_{ln}P^{\nu n}] = 0, \qquad \operatorname{Im}[\psi^{\lambda l}(\gamma^3\gamma^1)_{ln}P^{\nu n}] = 0 \tag{2.14}$$

Можно показать, что других уравнений типа (2.14), т. е. линейных комбинаций $P^{\nu n}$, равных нулю, не существует. Преобразовывая (2.14.1), (2.14.2), можно получить

$$1/_6\delta^{pqrn}_{k\,ij\,l}\nabla^k S^{ijl} = \frac{2mc}{\hbar}N^{pqrn}, \qquad \nabla_k j^k = 0 \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15.1) можно написать в виде

$$\nabla_k S^k = \frac{2mc}{\hbar}N, \qquad S^k = 1/_6\varepsilon^{kijl}S_{ijl}, \qquad N = 1/_{24}\varepsilon^{ijkl}N_{ijkl}$$

Из соотношений (2.14.3), (2.14.4) можно получить равенство нулю компонент Φ^{314} и Φ^{234} тензора Φ^{pqr}:

$$\Phi^{pqr} = j^k\nabla_k S^{pqr} + \frac{2mc}{\hbar}N^{npqr}j_n + 1/_6\delta^{npqr}_{i\,jkl}(S^{ijk}\nabla^l j_n - S^{ijk}\nabla_n j^l + j^l\nabla_n S^{ijk}) -$$

$$-1/_2\delta^{pqr}_{ki\,j}(M^{ij}\nabla^k\Omega - \Omega\nabla^k M^{ij}) + N^{npqr}\nabla_k M_n{}^k - M_n{}^k\nabla_k N^{npqr} \tag{2.16}$$

Очевидно, что и вообще $\Phi^{pqr} = 0$ для любых индексов p, q, r.

Для получения остальных дифференциальных уравнений разрешим систему (2.13) относительно $\partial\varphi_\nu / \partial x^p$

$$\Omega\psi^{\nu'\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_p} = \operatorname{Re}[\psi^{e'\nu}(\gamma^4\gamma^p)_{ln}P^{\nu n}], \qquad \Omega\psi^{\nu'\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_4} = i\operatorname{Im}[\psi^{e'\nu}J_{ln}P^{\nu n}]$$

$$N\psi^{\nu'\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_p} = -i\operatorname{Im}[\psi^{e\nu}(\gamma^5\gamma^4\gamma^p)_{ln}P^{\nu n}], \qquad N\psi^{\nu'\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_4} = -\operatorname{Re}[\psi^{e\nu}\gamma^5_{ln}P^{\nu n}] \tag{2.17}$$

Преобразовывая правые части этих уравнений, получим

$$\psi^{\nu'\nu}\Omega\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^p} = \frac{\psi^{\nu'\nu}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}M_p{}^l + \frac{2mc}{\hbar}j_p - \frac{2e}{\hbar c}\Omega A_p\right) +$$

$$+\frac{i}{2}\gamma^4_{lm}\left(\psi^{e'\nu}\frac{\partial}{\partial x^p}\psi^{\nu'm} - \psi^{\nu'm}\frac{\partial}{\partial x^p}\psi^{e'\nu}\right) \tag{2.18}$$

$$\psi^{\nu'\nu}N^{kpqr}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^k} = -\frac{\psi^{\nu'\nu}}{2}\left(\frac{1}{2}\delta^{pqr}_{ijk}\nabla^i M^{jk} + \frac{2e}{\hbar c}N^{kpqr}A_k\right) -$$

$$-\frac{i}{2}\varepsilon^{npqr}(\gamma^5\gamma^4)_{lm}\left(\psi^{e'\nu}\frac{\partial}{\partial x^n}\psi^{\nu'm} - \psi^{\nu'm}\frac{\partial}{\partial x^n}\psi^{e'\nu}\right)$$

Условия совместности этих систем, рассматриваемых как алгебраические уравнения на $\partial\varphi_\nu / \partial x^p$, дают

$$N^{kpqr}\left(\nabla_l M_k{}^l + \frac{2mc}{\hbar}j_k\right) + \frac{1}{2}\Omega\delta^{pqr}_{ijk}\nabla^i M^{jk} + 1/_6\delta^{npqr}_{i\,jlk}j^k\nabla_n S^{ijl} = 0 \tag{2.19}$$

Приближенное уравнение, аналогичное (2.19), было получено Де Бройлем [9] при условии отсутствия внешних полей и в предположении малой скорости электрона.

Из последнего тождества (1.8) следует, что (2.19) и уравнения $\Phi^{pqr} = 0$ зависимы.

Для замыкания тензорных уравнений в компонентах агрегата Ω можно воспользоваться уравнениями совместности системы (2.17), рассматриваемой как дифференциальные уравнения относительно $\partial\varphi_\nu / \partial x^p$, т. е. уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi_\nu - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi_\nu = 0$$

Однако для этой цели удобнее воспользоваться тензором энергии импульса.

4°. *Тензор энергии — импульса в теории Дирака.* Как известно [4], тензор энергии — импульса $T_p{}^q$ в теории Дирака записывается следующим образом:

$$T_p{}^q = \frac{\hbar c}{2}(\gamma^4\gamma^q)_{mn}\left(\bar{\psi}^m \frac{\partial\psi^n}{\partial x^p} - \psi^n \frac{\partial\bar{\psi}^m}{\partial x^p}\right) + \frac{e}{c}A_p j^q \tag{2.20}$$

Тензор $T_p{}^q$, определенный таким образом, удовлетворяет уравнениям [4]

$$\nabla_i T^{ki} = -e j_i H^{ki}, \qquad T^{ik} - T^{ki} = \frac{\hbar c}{2}\nabla_p S^{ikp} \tag{2.21}$$

Легко видеть, что имеет место тождество:

$$\psi^{\dot{\nu}\theta}(\bar{\psi}^\beta d\psi^\rho - \psi^\rho d\bar{\psi}^\beta) \equiv \bar{\psi}^{\nu\beta} d\psi^{\theta\rho} - \psi^{\dot{\nu}\rho}\, d\psi^{\beta\theta} \tag{2.22}$$

Используя его, получим

$$\psi^{\dot{\nu}\theta}T_p{}^q = \frac{\hbar c}{2}(\gamma^4\gamma^q)_{mn}\left(\bar{\psi}^{\nu m}\frac{\partial}{\partial x^p}\psi^{\theta n} - \psi^{\dot{\nu}n}\frac{\partial}{\partial x^p}\psi^{\dot{m}\theta}\right) + \frac{e}{c}A_p j^q \psi^{\dot{\nu}\theta}$$

Свертывая это уравнение с матрицами γ^4 и $\gamma^4\gamma^n$, с учетом (1.10), получим

$$T_p{}^q = \frac{\hbar c}{4\Omega}\left[\frac{1}{2}(\bar{c}^k\nabla_p c_k{}^q - \bar{c}_k{}^q\nabla_p c^k) + i\nabla_p(\Omega j^q) - j^k\nabla_p M_k{}^q - \frac{1}{6}N^{qijk}\nabla_p S_{ijk}\right] + eA_p j^q$$

$$j^n T_p{}^q = \frac{\hbar c}{4}\left\{\frac{i}{2}\left[\left(\bar{c}_i\nabla_p c^i + \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}\nabla_p c^{ij}\right)g^{qn} - (\bar{c}^n\nabla_p c^q - \bar{c}^q\nabla_p c^n) + (\bar{c}^{nk}\nabla_p c_k{}^q + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c^{qk}\nabla_p c_k{}^n)\right] + M^{qn}\nabla_p\Omega + \frac{1}{2}M_{kl}\nabla_p N^{klqn} - S^{kqn}\nabla_p j_k + i\nabla_p(j^q j^n)\right\} + eA_p j^q j^n \tag{2.23}$$

Очевидно, для тензора энергии — импульса нейтрино справедлива формула

$$j^n T_p{}^q = \frac{\hbar c}{4}\left\{\frac{i}{2}(\bar{c}^{nk}\nabla_p c_k{}^q + \bar{c}^{qk}\nabla_p c_k{}^n) + i\nabla_p(j^q j^n) + i\varepsilon^{rkqn} j_r\nabla_p j_k\right. \tag{2.24}$$

Отсюда, используя уравнение $j^p j_p = 0$, получим

$$j_n T_p{}^n = 0 \tag{2.25}$$

Рассматривая тождество (2.25) как систему уравнений относительно j_n, получим, что в силу существования ненулевого решения j_n, должно выполняться тождество

$$\det T_p{}^q = 0 \tag{2.26}$$

Из (2.25) получим решение $j_n = \zeta P_n$. Здесь ζ — произвольная функция, P_n — минор третьего порядка матрицы $T_p{}^q$, полученный вычеркиванием из нее любого столбца и n строки. В силу изотропности вектора j_n должно выполняться следующее тождество на тензор энергии — импульса

$$P^n P_n = 0 \tag{2.27}$$

Из формулы (2.23) может быть получена и тензорная запись лагранжиана, так как известно, что лагранжиан L определяется через тензор энергии — импульса

$$L = T^p{}_p + mc^2\Omega \tag{2.28}$$

Получим теперь выражение компонент $T_p{}^q$ через компоненты вещественных тензоров Ω, j^p, M^{ij}, S^{ijk}, N^{ijkl}. Подставляя тождество

$$\psi^m = \frac{\psi^{\dot{\nu}m}}{\sqrt{\psi^{\dot{\nu}\nu}}}\exp(i\varphi_\nu)$$

в выражение (2.20) для $T_p{}^q$, этот тензор можно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{c}T_p{}^q = \frac{\hbar}{2}(\gamma^4\gamma^q)_{mn}\left[\frac{1}{\psi^{\dot{\nu}\nu}}\left(\psi^{\dot{m}\nu}\frac{\partial\psi^{\dot{\nu}\dot{m}}}{\partial x^p} - \psi^{\dot{\nu}n}\frac{\partial\psi^{\dot{m}\nu}}{\partial x^p}\right) + 2i\psi^{\dot{m}n}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^p}\right] + \frac{e}{c}A_p j^q \tag{2.29}$$

Умножая (2.29) на $\psi^{\dot{\nu}\nu}$ и свертывая затем с матрицей γ^4 по индексам ν, получим

$$1/c\Omega T_p{}^q = {}^1\!/_4\,\hbar\,[j_l\nabla_p M^{ql} - M^{ql}\nabla_p j_l - {}^1\!/_6 N^{qijk}\nabla_p S_{ijk} +$$

$$+ {}^1\!/_6\, S_{ijk}\nabla_p N^{qijk}] + mcj_p j^q + \hbar/2\, j^q\nabla_l M_p{}^l \tag{2.30}$$

Используя последнее тождество (1.7), окончательно получим

$$T_p{}^q = \frac{mc^2}{\Omega} j_p j^q + \frac{\hbar c}{2\Omega}\left[j_l \nabla_p M^{ql} + j^q \nabla_l M_p{}^l - \frac{1}{6} N^{qijk} \nabla_p S_{ijk}\right] \tag{2.31}$$

Вычисление следа тензора энергии — импульса дает

$$T_p{}^p = mc^2 \left(\frac{j^p j_p}{\Omega} - \frac{1}{24}\frac{N^{ijkl}N_{ijkl}}{\Omega}\right) = -mc^2\Omega$$

Здесь использовано тождество (1.7.1).

Как известно, в квантовой механике величина $-m\Omega$ интерпретируется как собственная масса электрона, следовательно, $T^p{}_p$ — собственная энергия электрона. Запись (2.23) тензора существенно отличается от записи этого тензора в форме (2.31). При выводе формулы (2.31) использовалось выполнение уравнений Дирака, поэтому лагранжиан L, составленный по формуле $L = T^p{}_p + mc^2\Omega$, обращается в тождественный нуль, тогда как приравнивание нулю лагранжиана, полученного из тензора $T_p{}^q$ в форме (2.23), дает новое тензорное уравнение.

Из изложенного ясно, что три уравнения (2.20.1), компоненты $T_p{}^q$ в которых выражены через компоненты Ω, $j^p, \ldots, N^{ijkl}$ по формуле (2.31), а также уравнения (2.19) образуют полную дифференциальную систему уравнений, для замыкания которой следует добавить девять независимых алгебраических уравнений (1.7). Уравнения (2.15), два уравнения (2.19) и три уравнения (2.21.1) также образуют полную дифференциальную систему уравнений. Уравнения (2.21.1) или уравнения совместности системы (2.17) являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Необходимость трех уравнений второго порядка является следствием градиентной инвариантности уравнений Дирака, а не особенностью предложенного вывода.

В самом деле, система дифференциальных уравнений в тензорах также должна обладать градиентной инвариантностью, а так как тензоры, входящие в эти уравнения, не меняются при градиентных преобразованиях, то тензорные уравнения должны содержать уже не потенциалы внешних полей A_k, а сами поля $\nabla_p A_k - \nabla_k A_p$.

В уравнения Дирака потенциалы A_k входят без производных, поэтому при наличии в этих уравнениях членов $\partial\psi^m / \partial x^k$, тензорные уравнения, содержащие поля, должны быть второго порядка. Таких уравнений должно быть только три в силу наличия трех независимых компонент A_k.

Пользуясь изложенными методами, можно легко написать в тензорной форме и нелинейные уравнения, обобщающие теорию Дирака. Большинство из таких уравнений имеет вид [10]

$$\gamma^k \partial_k \psi + J\psi = 0$$

Тензорная запись таких уравнений может быть получена из тензорной формы уравнений Дирака заменой в последних коэффициента $mc / \hbar$ на J.

Приложение

А.1. *О распространении спинорного представления на полную афинную группу.* Рассмотрим k-параметрическую группу G преобразований координат n-мерного евклидового пространства R_n.

Выберем параметры $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$, определяющие элементы группы таким образом, чтобы их нулевые значения определяли единичный элемент группы G. Будем рассматривать матричное представление группы G в пространстве L_p размерности p.

Известно, что любое представление таких групп описывается его инфинитезимальными операторами I_m, которые определяются как частные производные от матрицы представления по параметрам группы G, взятые при нулевых значениях параметров. Инфинитезимальные операторы, являющиеся матрицами размерности p, определяются из системы уравнений

$$I_j I_m - I_m I_j = c^i_{jm} I_i \tag{A.1.1}$$

По индексу i производится суммирование от 1 до k. Коэффициенты $c^i{}_{jm}$ определяются структурой группы G по известным формулам [11].

Введем вместо параметров $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$ параметры $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r$, определяющие некоторую подгруппу Λ группы G так, чтобы $\alpha^i = \alpha^i(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r)$, $\alpha^i(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Подгруппе $\Lambda \subset G$ будет соответствовать некоторая подгруппа в T. Нетрудно получить, что инфинитезимальные операторы I_m' представления подгруппы Λ будут следующим образом выражаться через операторы I_m:

$$I_m' = I_k \left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial \theta^m}\right)_{\theta^1=\theta^2=\ldots=\theta^r=0} \tag{A.1.2}$$

Пусть имеем представление группы матриц

$$\begin{Vmatrix} 1+\alpha^1 & \alpha^2 \\ \alpha^3 & 1+\alpha^4 \end{Vmatrix}$$

где $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ — произвольные параметры. Вычисление коэффициентов c^i_{jm} в этом случае приводит к следующей системе на инфинитезимальные операторы:

$$\begin{gathered} I_1I_2 - I_2I_1 = I_2, \qquad I_2I_3 - I_3I_2 = I_1 - I_4, \qquad I_1I_3 - I_3I_1 = -I_3, \\ I_2I_4 - I_4I_2 = I_2, \qquad I_1I_4 - I_4I_1 = 0, \qquad I_3I_4 - I_4I_3 = -I_3 \end{gathered} \tag{A.1.3}$$

Нашей задачей является определение представления T группы G, совпадающего на ортогональной подгруппе $0 \subset G$ со спинорным представлением подгруппы 0, инфинитезимальный оператор K которого известен.

Для перехода от группы G к подгруппе 0 необходимо положить

$$\alpha^1 = \cos\theta - 1, \quad \alpha^2 = -\sin\theta, \quad \alpha^3 = \sin\theta, \quad \alpha^4 = \cos\theta - 1$$

Тогда из (A.1.2) следует

$$K = I_2 - I_3 \tag{A.1.4}$$

Так как спинорное представление веса $1/2$ задается матрицами

$$\begin{Vmatrix} \exp(1/2\, i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-1/2\, i\theta) \end{Vmatrix}$$

то оператор K имеет вид

$$K = \begin{Vmatrix} 1/2 i & 0 \\ 0 & -1/2\, i \end{Vmatrix}$$

При таком выборе оператора K система (A.1.3) при условии (A.1.4) после исключения зависимых уравнений запишется в виде

$$I_1I_3 - I_3I_1 = -I_3, \quad I_3K - KI_3 = \lambda J - 2I_1, \quad I_1K - KI_1 = 2I_3 + K \tag{A.1.5}$$

Здесь λ — произвольный параметр.

Не представляет труда проверить, что система (A.1.5) несовместна при любом λ. Следовательно, представления полной группы преобразований координат, совпадающего со спинорным представлением на ортогональной подгруппе, не существует. Это показано для спинорного представления группы поворотов плоскости, но ясно, что отсюда следует невозможность расширения спинорного представления и в пространстве любой размерности. Таким образом, спинор, рассматриваемый как линейный геометрический объект, можно вводить только в ортогональные системы координат.

Пользуясь приведенным методом, легко показать, что спинор не может быть введен в неортогональные системы координат и при увеличении числа его компонент.

A.2. *Приведение к каноническому виду тензоров* C_i, C_{pq}, j^p, M^{ij}, S^{ijk}. Рассмотрим тензорные агрегаты $\{j^p, M^{ij}, S^{ijk}\}$ и $\{C_i, C_{pq}\}$.

Всегда можно выбрать ортогональную систему координат, в которой компоненты j^p имеют вид

$$j^p = (0, 0, 0, i\rho) \tag{A.2.1}$$

где, в силу уравнения (1.7.1), имеем $\rho^2 = \Omega^2 - N^2$. Из уравнения (1.7.3) следует, что в этой системе координат компонента S^4 вектора S^p обращается в нуль.

Далее, совершаем ортогональное преобразование пространственных координат x^1, x^2, x^3 таким образом, чтобы обратились в нуль компоненты S^1 и S^2. При таком преобразовании компоненты (A.2.1) не меняются, а компоненты вектора S^p, как следует из равенства (1.7.2), запишутся в виде

$$S^p = (0, 0, i\rho, 0) \tag{A.2.2}$$

Из уравнений (1.7) и (1.10) следует, что в полученной системе координат компоненты тензора M^{ij} записываются в виде

$$M^{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & -\Omega & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & -N & 0 \end{Vmatrix} \tag{A.2.3}$$

Из тождества (1.9) получаем, что в этой же системе координат компоненты спинора ψ^m записываются следующим образом:

$$\psi^1 = \psi^3 = 0, \qquad \psi^2 = \pm \sqrt{{}^1/_2\,\rho}\, e^{i\varphi}, \qquad \psi^4 = \frac{{}^1/_2(\Omega + N)}{\pm\sqrt{{}^1/_2\,\rho}}\, e^{i\varphi}$$

имея в виду, что $\operatorname{mod}\dfrac{\Omega + N}{\rho} = 1$, можно положить

$$\frac{\Omega + N}{\rho}\, e^{2i\varphi} = e^{{}^1/_2\, i\theta} \tag{A.2.4}$$

При повороте плоскости x^1x^2 на угол θ матрица преобразования спиноров

$$S = \begin{Vmatrix} \exp(-{}^1/_2\, i\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp({}^1/_2\, i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-{}^1/_2\, i\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp({}^1/_2\, i\theta) \end{Vmatrix}$$

Совершим поворот плоскости x^1x^2 на угол $(-\theta)$

Тогда из формул (1.3), определяющих компоненты C_i, C_{pq} через компоненты ψ^m, следует, что в полученной системе координат компоненты C_i, C_{pq} записываются в виде

$$C_i = (-i\rho, \rho, 0, 0), \qquad C_{pq} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & N & -i\Omega \\ 0 & 0 & iN & \Omega \\ -N & -iN & 0 & 0 \\ i\Omega & -\Omega & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

При этом повороте компоненты (A.2.1)—(A.2.3) не меняются.

Автор благодарит Л. И. Седова за ценные указания и обсуждение статьи.

Поступила 10 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., Изд-во иностр. литер., 1963.
2. Желнорович В. А. Представление спиноров в n-мерном пространстве системами тензоров. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2.
3. Klauder I. Linear representation of spinor fields by antisymmetric tensors. J. math. phys., 1964, v. 5, № 9.
4. Darwin C. G. On the magnetic moment of the electron. Proc. Roy. Soc. 1928, v. 120, N 621.
5. Fock V. Geometrisierung der Diracschen Theorie des Electrons, Zs. f., Phys. 1929, Bd. 57, pp. 261—277.
6. Uhlenbeck G. E., Laporte O. Application of spinor analisys to the Maxwell and Dirac equation. Phys. Rev., 1931, v. 37, p. 1380.
7. Паули В. Общие принципы волновой механики. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
8. Halbwachs F. Theorie relativiste des fluides a spin. Paris, Gauthier—Villars, 1960.
9. Луи де Бройль. Магнитный электрон. ГНТИУ, 1936.
10. Нелинейная квантовая теория поля. Сб. статей под ред. Д. Д. Иваненко. М., Изд-во иностр. литер., 1959.
11. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., Физматгиз, 1958.