ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНЫХ СРЕД С НЕОБРАТИМЫМИ ПРОЦЕССАМИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. Л. Бердичевский

(Москва)

1. Введение. Одной из основных проблем общей теории моделей сплошных сред является построение модели при помощи минимального числа гипотез. Этой цели может служить вариационный принцип, сформулированный в работах [1,2]

$$\delta \int\limits_V \Lambda \, d\tau + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{1}$$

Построение модели сводится к заданию лагранжиана Λ и функционала δW^*.

Будем рассматривать в рамках специальной теории относительности сплошные среды, для которых лагранжиан Λ зависит от величин [1]

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \equiv x^i{}_p, \quad \nabla_k x^i{}_p, \quad \mu^A, \quad \nabla_j \mu^A, \quad \nabla_i \nabla_j \mu^A, \quad S, \quad K^C, \quad L^{\wedge C} \tag{2}$$

Здесь x^i — координаты фиксированной и вообще криволинейной системы отсчета наблюдателя; ξ^p — координаты сопутствующей системы отсчета; функции $x^i(\xi^p)$, определяющие переход от сопутствующей системы отсчета к системе отсчета наблюдателя, задают закон движения среды, μ^A — полевые функции, скаляр S — энтропия, измеренная наблюдателем в собственной системе отсчета и отнесенная к единице массы покоя; K^C — компоненты некоторых заданных неварьируемых тензоров в системе отсчета наблюдателя, $L^{\wedge C}$ — компоненты заданных неварьируемых тензоров в сопутствующей системе отсчета [2]. Компоненты K^C и $L^{\wedge C}$ представляют собой физические постоянные величины или их обобщения. По условию ковариантная производная ∇_j берется в системе отсчета наблюдателя.

Зависимость Λ от аргументов x^i, $x^i{}_p$, μ^A, $\nabla_j \mu^A$, K^C рассмотрена в работе Л. И. Седова [1]. Этому же вопросу в рамках общей теории относительности при $\delta W^* = 0$ посвящена работа [2]. Модели, для которых Λ является функцией системы аргументов (2), в общей теории относительности при $\delta W^* = 0$ рассмотрены в работе [3]. В настоящей работе рассматриваются соотношения, которые могут служить для задания функционала δW^*.

2. Основные уравнения. Далее по определению положим [3]

$$\delta W^* = \int\limits_V [\rho \Theta \delta S - Q_i \delta x^i - Q_A \delta \mu^A] \, d\tau -$$

$$- \int\limits_\Sigma [Q_i{}^l \delta x^i + Q_i{}^{jl} \delta x^i{}_j + Q_A{}^l \delta \mu^A + Q_A{}^{jl} \delta (\nabla_j \mu^A)] \, n_l \, d\sigma \tag{3}$$

Здесь скаляр ρ — плотность массы покоя, а Θ, Q_i, Q_A, $Q_i{}^l$, $Q_i{}^{jl}$, $Q_A{}^l$, $Q_A{}^{jl}$ — некоторые произвольные функции или функционалы.

Осуществляя варьирование в уравнении (1), находим величину δW:

$$\delta W = \int\limits_\Sigma \{P_i{}^l \delta x^i + P_i{}^{jl} \delta x^i{}_j + P_A{}^l \delta \mu^A + P_A{}^{jl} \delta (\nabla_j \mu^A)\} \, n_l \, d\sigma$$

---

[1] Малые латинские индексы $i, j, k, \ldots$ пробегают значения 1, 2, 3, 4. Большие латинские индексы A, B, C могут отвечать одному или нескольким тензорным индексам. Греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ пробегают значения 1, 2, 3 и соответствуют пространственным координатам.

[2] Здесь и далее символ $\wedge$ указывает на то, что соответствующая величина берется в сопутствующей системе отсчета.

[3] Вектор δx^i в (3) есть вариация мировых линий (о вариациях см. [1-3]).

где

$$P_i^{\ j} = \nabla_i\mu^A \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_k\mu^A}(\delta_k^{\ j}\nabla_s\nabla_i\mu^A + \delta_s^{\ j}\nabla_k\nabla_i\mu^A) -$$

$$- x^j{}_s \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x^l{}_s}(\delta_i^{\ l}\nabla_k x^j{}_s - \delta_k^{\ j}\nabla_i x_s^{\ l}) - \nabla_l \left\{\nabla_i\mu^A \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\nabla_l\mu^A} - \frac{1}{2}\left[x^l{}_s \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j x_s^{\ i}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x^j{}_s \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_l x^i{}_s}\right]\right\} - \Lambda\delta_i^{\ j} + Q_i^{\ j} = P_{(\Lambda)i}^{\ j} + Q_i^{\ j}$$

$$P_i^{\ jl} = -\frac{1}{2}\left[x^l{}_s \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x^i{}_s} + x^k{}_s \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_l x^i{}_s}\right]\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k} + Q_i^{\ jl} = P_{(\Lambda)i}^{\ jl} + Q_i^{\ jl}$$

$$P_A^{\ j} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} + \nabla_l \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\nabla_l\mu^A} + Q_A^{\ j} = P_{(\Lambda)A}^{\ j} + Q_A^{\ j}$$

$$P_A^{\ jl} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\nabla_l\mu^A} + Q_A^{\ jl} = P_{(\Lambda)A}^{\ jl} + Q_A^{\ jl} \tag{4}$$

Через $P_{(\Lambda)i}^{\ j}$, $P_{(\Lambda)i}^{\ jl}$, $P_{(\Lambda)A}^{\ j}$, $P_{(\Lambda)A}^{\ jl}$ обозначены части тензоров $P_i^{\ j}$, $P_i^{\ jl}$, $P_A^{\ j}$, $P_A^{\ jl}$, определяемые заданием лагранжиана Λ.

Тензор $P_i^{\ j}$ по определению называется тензором энергии импульса.

Вариационный принцип (1) дает также систему уравнений

$$\nabla_j P_{(\Lambda)i}^{\ j} = Q_i \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^A} - \nabla_j \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} + \nabla_i\nabla_j \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_i\nabla_j\mu^A} = Q_A \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial S} = -\rho\theta \tag{7}$$

Система уравнений (5)—(7) вместе с уравнениями состояния (4) полностью описывает поведение сплошной среды. В уравнениях (5)—(7) содержится, в частности, уравнение баланса энтропии, которому можно [5–7] придать вид

$$\rho DS = \nabla_k H^k + \sigma, \quad D = u^k\nabla_k \tag{8}$$

где u^k — вектор 4-скорости, а вектор H^k и скаляр σ удовлетворяют соотношениям

$$H^k u_k = 0, \qquad \sigma \geqslant 0 \tag{9}$$

Найдем правую часть уравнения (8) в модели, построенной на основе вариационного принципа. Для этого воспользуемся уравнением притока тепла [1,4,5,6,7], которое можно записать в форме

$$x_4^{\ i}\nabla_i P_{(\Lambda)i}^{\ j} = x_4^{\ i} Q_i \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражение для $P_{(\Lambda)i}^{\ j}$ из (4) и имея в виду соотношения

$$x_4^{\ i}\nabla_i\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j{}_s} x^i{}_4\nabla_i x^j{}_s + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x^l{}_s} x^i{}_4\nabla_i\nabla_k x^l{}_s + \frac{\partial\Lambda}{\partial\mu^A} x^i{}_4\nabla_i\mu^A + \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\mu^A} x^i{}_4\nabla_i\nabla_j\mu^A +$$

$$+ \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_j\nabla_k\mu^A} x^i{}_4\nabla_i\nabla_j\nabla_k\mu^A + \frac{\partial\Lambda}{\partial S} x^i{}_4\nabla_i S + \frac{\partial\Lambda}{\partial K^C} x^i{}_4\nabla_i K^C + \frac{\partial\Lambda}{\partial L^{\wedge C}} \frac{\partial L^{\wedge C}}{\partial\xi^4}$$

$$x^j{}_s\nabla_j x^i{}_4 - x^j{}_4\nabla_j x^i{}_s = \frac{\partial x^i{}_4}{\partial\xi^s} - \frac{\partial x^i{}_s}{\partial\xi^4} = 0$$

$$x^j{}_s\nabla_j\nabla_k x^i{}_4 - x^j{}_4\nabla_j\nabla_k x^i{}_s + \nabla_j x^l{}_4(\delta_l^{\ i}\nabla_k x^j{}_s - \delta_k^{\ j}\nabla_l x^i{}_s) = \nabla_k(x^j{}_s\nabla_j x^i{}_4 - x^j{}_4\nabla_j x^i{}_s) = 0$$

получим

$$\rho\theta x^i{}_4\nabla_i S = \nabla_j F^j + \frac{\partial\Lambda}{\partial K^C} x^i{}_4\nabla_i K^C + \frac{\partial\Lambda}{\partial L^{\wedge C}} \frac{\partial L^{\wedge C}}{\partial\xi^4} + Q_i x^i{}_4 + Q_A x^i{}_4\nabla_i\mu^A \tag{11}$$

где

$$F^j = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i_s} x^i_4 x^j_s + \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_k x^l_s} (x^l_4 \nabla_k x^j_s - \delta_k^j x^i_4 \nabla_i x^l_s) - \frac{1}{2} x^i_4 \nabla_l \left[x_s{}^l \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_j x^i_s} + \right.$$

$$\left. + x^j_s \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_l x^i_s} \right] + \frac{1}{2} \left[x^l_s \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_j x^i_s} + x^j_s \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_l x^i_s} \right] \nabla_l x^i_4 \tag{12}$$

Заменяя в (11) вектор $x_4{}^i$ через вектор 4-скорости u^i при помощи соотношения [1]

$$x^i_4 = \sqrt{g^\wedge_{44}} \cdot u^i, \qquad g^\wedge_{44} = g_{lm} x^l_4 x^m_4$$

запишем окончательно равенство (11) в виде

$$\rho DS = \frac{1}{\Theta} \left[\frac{1}{\sqrt{g^\wedge_{44}}} \nabla_j F^j + \frac{\partial \Lambda}{\partial K^C} DK^C + \frac{1}{\sqrt{g^\wedge_{44}}} \frac{\partial \Lambda}{\partial L^{\wedge C}} \frac{\partial L^{\wedge C}}{\partial \xi^4} + Q_i u^i + Q_A D\mu^A \right] \tag{13}$$

Уравнение (13) показывает, что изменение энтропии происходит не только за счет работы обобщенных сил Q_i и Q_A, но также и за счет источников энергии, описываемых лагранжианом Λ. Из уравнения (13) следует также, что энтропия частицы будет меняться, если с течением времени меняются ее заданные физические или геометрические характеристики K^C и $L^{\wedge C}$.

Приведение уравнения (13) к виду (8) связано с дополнительными гипотезами, которые должны опереться на физический смысл величин μ^A, K^C, $L^{\wedge C}$, Θ, Λ.

3. **Модели, определяемые заданием лагранжиана Λ.** Рассмотрим модели, для которых обобщенные силы Q_i и Q_A равны нулю. Уравнение баланса энтропии таких моделей имеет вид

$$\rho DS = \frac{1}{\Theta} \left[\frac{1}{\sqrt{g^\wedge_{44}}} \nabla_j F^j + \frac{\partial \Lambda}{\partial K^C} DK^C + \frac{1}{\sqrt{g^\wedge_{44}}} \frac{\partial \Lambda}{\partial L^{\wedge C}} \frac{\partial L^{\wedge C}}{\partial \xi^4} \right] \tag{14}$$

Отметим, что вектор F^j не зависит от полевых функций и их производных, если Λ имеет вид

$$\Lambda^{(1)}(x^i_j, \nabla_k x^i_j, K^C, L^{\wedge C}) + \Lambda^{(2)}(\mu^A, \nabla_j \mu^A, \nabla_i \nabla_j \mu^A)$$

Здесь $\Lambda^{(1)}$ и $\Lambda^{(2)}$ — лагранжианы соответственно для вещества и поля.

В частности, это обстоятельство имеет место для электромагнитного поля в нейтральной среде. Покажем, что в ряде случаев правая часть (14) обращается в нуль.

1) Идеальная сжимаемая жидкость без теплопроводности: $\Lambda = \Lambda(\rho, S)$, Θ имеет смысл абсолютной температуры T.

В силу определения плотности ρ [8,3] имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^i_s} = \frac{\partial \rho}{\partial \gamma^\wedge_{pq}} \frac{\partial \gamma^\wedge_{pq}}{\partial x^i_s} = -\frac{1}{2} \rho g^{\wedge pq} \frac{\partial \gamma^\wedge_{pq}}{\partial x^i_s} = -\rho \gamma_i{}^k \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}$$

где $\gamma_{pq}{}^\wedge = g_{pq}{}^\wedge - u_p{}^\wedge u_q{}^\wedge$. Следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^i_s} x^j_s = -\rho \gamma_i^j \tag{15}$$

При помощи (15) вычисляем F^j

$$F^j = \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^i_s} x^j_s x^i_4 = -\rho \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \gamma_i{}^j x^i_4 = 0$$

Итак, для идеальной сжимаемой жидкости (при $Q_i = Q_A = 0$) равенство (14) переходит в

$$\rho DS = 0 \tag{16}$$

т. е. энтропия каждой частицы сохраняется.

[1] Через g_{ij} обозначены компоненты метрического тензора в системе отсчета наблюдателя.

2) Изотропная упругая среда: $\Lambda = \Lambda\ (\gamma^{\circ pq},\ \gamma^{\wedge pq},\ S)$, где [1,3,8] $\gamma^{\circ pq}$ — тензор, характеризующий пространственные расстояния в начальном состоянии. В силу определения [3] $\partial\gamma^{\circ pq} / \partial\xi^4 = 0$.

Найдем вектор F^j

$$F^j = \frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma^{\wedge}_{pq}} \frac{\partial\gamma^{\wedge}_{pq}}{\partial x^i_s} x^j_s x^i_4 = \frac{\partial\Lambda}{\partial\gamma^{\wedge}_{pq}} [(\gamma_{il}\gamma_n{}^j + \gamma_{in}\gamma_l{}^j) x^l_p x^n_q] x^i_4 = 0$$

Таким образом, и в этом случае выполняется равенство (16).

Рассмотрим теперь модель, лагранжиан Λ которой зависит от аргументов

$$g^{\wedge}_{pq}, \quad u^{\wedge}_r, \quad \rho, \quad \nabla^{\wedge}_k\rho$$

Используя формулы для производных от указанных величин по x^i_s, $\nabla_k x^i_s$, приведенные в [3], имеем [1]

$$F^{\wedge j} = -2\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\wedge pq}} u^{\wedge p} g^{\wedge qj} + \left(u^{\wedge p}\ \frac{\partial\Lambda}{\partial u^{\wedge p}}\right) u^{\wedge j} - \frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla^{\wedge}_j\rho} D\rho$$

Если Λ зависит лишь от сверток

$$D\rho = u^{\wedge k}\nabla^{\wedge}_k\rho, \qquad g^{\wedge pq}(\nabla^{\wedge}_p\rho)(\nabla^{\wedge}_q\rho)$$

нетрудно убедиться, что $F^j = 0$.

В рассмотренных примерах равенство $DS = 0$ продолжает иметь место и в том случае, когда в аргументы Λ входят μ^A, $\nabla_j\mu^A$, $\nabla_i\nabla_j\mu^A$.

Правая часть (14) не всегда равна нулю. Пусть, например, Λ зависит от неварьируемого заданного вектора $n^{\wedge k}$ через свертку $D_n\rho = n^{\wedge k}\nabla^{\wedge}_k\rho$. Для простоты положим $\partial n^{\wedge k} / \partial\xi^4 = 0$, а ξ^4 выберем длиной дуги мировой линии. Тогда

$$\rho DS = \frac{1}{\Theta}\nabla^{\wedge}_k\left[\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial D_n\rho} D\rho\right) n^{\wedge k}\right] \neq 0$$

В общем случае при построении модели, определяемой заданием Λ, необходимо в соответствии с физическим смыслом модели выделить из правой части (14) возникновение энтропии σ и выбирать Λ так, чтобы удовлетворить неравенству $\sigma \geqslant 0$.

4. Модель вязкой теплопроводной жидкости. В качестве примера сформулируем вариационный принцип для модели вязкой теплопроводной жидкости в общем случае несимметричного тензора энергии — импульса. При этом лагранжиан Λ помимо плотности ρ и энтропии S зависит также от антисимметричного тензора угловой скорости Ω_{ij} (по определению $\Omega^*_{\alpha\beta}$ описывают среднюю угловую скорость частиц в собственной системе отсчета, а $\Omega^*_{\alpha 4} = 0$). Наряду с тензором Ω_{ij} введем тензор ω_{ij} соотношением $\Omega_{ij} = D\omega_{ij}$ и варьированию будем подвергать тензор ω_{ij}, который играет здесь роль величин μ^A из общего формализма. В частности, для $\Lambda = -\rho U(\rho,\ S) + \rho U_r$, $U_r = {}^1/_4 I^{ijkl}\ \Omega_{ij}\Omega_{kl}$, где U_r — макроскопическая энергия внутреннего вращательного движения частиц, I^{ijkl} — тензор момента инерции, получим, что часть тензора энергии — импульса, определяемая лагранжианом Λ, имеет форму $P_{(\Lambda)}{}^{ij} = -p\gamma^{ij} + (\rho U + \rho U_r) u^i u^j$.

Функционал δW^* зададим в виде

$$\delta W^* = \int\limits_V \left\{\rho T\delta S - Q_i\delta x^i - \frac{1}{2} H^{ij}\delta\omega_{ij}\right\} d\tau - \int\limits_\Sigma Q_i{}^j \delta x^i n_j d\sigma$$

Уравнения движения (5) дают $\nabla_j P_i{}^j = Q_i + \nabla_j Q_i{}^j$. Из требования об обращении в нуль дивергенции тензора — импульса получим $Q_i = -\nabla_j Q_i{}^j$. Уравнения Эйлера для переменных ω_{ij} представляют собой уравнения баланса внутреннего момента количества движения $\rho DM^{ij} + H^{ij} = 0$. (Здесь введено обозначение для тензора внутреннего момента количества движения $M^{ij} = 1/\rho\ (\partial\Lambda / \partial\Omega_{ij})$.) Тензор H^{ij} связан с несимметричностью тензора энергии — импульса и наличием внутренних и массовых моментов. Будем считать последние равными нулю и положим $H^{ij} = P^{ji} - P^{ij}$.

[1] Здесь употребляется метрика в многообразии пространства — времени со знакоопределением $(---+)$.

Используя полученные равенства, выпишем уравнение баланса энтропии

$$\rho TDS = -u^i\nabla_j Q_i{}^j + {}^1/{}_2 H^{ij}\Omega_{ij} \tag{17}$$

Конкретизируем теперь выбор сопутствующей системы отсчета. Как известно [9], при изучении необратимых процессов можно различным путем ввести поле скоростей и соответственно сопутствующую систему координат: систему отсчета, сопутствующую веществу и систему отсчета, сопутствующую массе. Здесь будет рассматриваться сопутствующая система отсчета вещества, поэтому вектор-4-скорости u^i, входящий в (17), является вектором 4-скорости вещества [1].

Для любого тензора второго ранга, в частности, и для тензора $Q_i{}^j$ можно написать

$$Q^{ij} = s^{ij} + u^i I^j + G^i u^j + Q u^i u^j \tag{18}$$

$$s^{ij} = \gamma_k{}^i \gamma_l{}^j Q^{kl}, \quad I^j = \gamma_l{}^j u_k Q^{kl}, \quad G^i = \gamma_k{}^i u_l Q^{kl}, \quad Q = u_k u_l Q^{kl} \tag{19}$$

причем (18) будет тождеством в силу (19). Из (19) следует,

$$u_j s^{ij} = u_i s^{ij} = u_j I^j = u_i G^i = 0 \tag{20}$$

Подстановка (18) в (17) с учетом (20) дает

$$\rho DS = T^{-1}[s^{ij}(\nabla_j u_i - \Omega_{ij}) - \nabla_j I^j + G^i D u_i - \nabla_j (Q u^j)]$$

По предположению, при $Q_i{}^j = 0$ процессы обратимы, поэтому возникновение энтропии σ выделяем так:

$$\rho DS = -\nabla_j (T^{-1} I^j) + \sigma$$

$$\sigma = I^j \nabla_j T^{-1} + T^{-1}(s^{ij} + G^i u^j)(\nabla_j u_i - \Omega_{ij}) - T^{-1}\nabla_j (Q u^j)$$

Дальнейшее рассмотрение будем вести при $Q = 0$.

Независимые термодинамические потоки s^{ij}, I^j, G^i можно считать функциями термодинамических «сил» $\nabla_j T^{-1}$, $\nabla_j u_i$ и Ω_{ij}. Модель вязкой теплопроводной жидкости получается в предположении о линейной связи s^{ij}, I^j, Gi и $\nabla_j T^{-1}$, $\nabla_j u_i$, Ω_{ij}

$$I^j = A^{jk}\nabla_k T^{-1} + B^{jkl}(\nabla_k u_l + \Omega_{kl}), \quad T^{-1}(s^{ij} + G^i u^j) = A^{ijk}\nabla_k T^{-1} + A^{ijkl}(\nabla_k u_l + \Omega_{kl})$$

Вектор G^i находится из последнего равенства свертыванием с u^j (21)

$$T^{-1} G^i = u_j (A^{ijk}\nabla_k T^{-1} + A^{ijkl}(\nabla_k u_l - \Omega_{lk}))$$

Феноменологические коэффициенты A^{ij}, A^{ijk}, B^{jkl}, A^{ijkl} характеризуют свойства среды и должны обладать той же симметрией, которой обладает среда. Сплошная среда может иметь симметрию одной из кристаллографических групп. Общий вид трехмерных тензоров, инвариантных относительно кристаллографических групп, получен в работе [11]. Ниже будет рассмотрена изотропная среда, для которой [12]

$$A^{jk} = l_1\gamma^{jk} + l_2 u^j u^k \quad A^{ijk} = k_1\gamma^{ij}u^k + k_2\gamma^{ik}u^j + k_3\gamma^{jk}u^i + k_4 u^i u^j u^k$$

$$B^{jkl} = \mu_1\gamma^{jl}u^k + \mu_2\gamma^{jk}u^l + \mu_3\gamma^{kl}u^j + \mu_4 u^j u^k u^l$$

$$A^{ijkl} = \nu_1\gamma^{ij}\gamma^{kl} + \nu_2\gamma^{ik}\gamma^{jl} + \nu_3\gamma^{il}\gamma^{jk} + \nu_4\gamma^{il}u^j u^k + \nu_5\gamma^{ij}u^k u^l +$$

$$+ \nu_6\gamma^{jl}u^i u^k + \nu_7\gamma^{jk}u^i u^l + \nu_8\gamma^{kl}u^i u^j + \nu_9\gamma^{ik}u^j u^l + \nu_{10}u^i u^j u^k u^l \tag{22}$$

[1] В теории относительности при описании движения сплошной среды можно рассматривать два, вообще говоря, различных вектора 4-скорости: вектор кинематической 4-скорости — скорости вещества, получающейся в результате осреднения микроскопического движения, и вектор динамической 4-скорости — скорости массы, являющийся собственным вектором тензора энергии импульса. Соответствующие теории, использующие при построении тензора энергии—импульса вязкой жидкости то или иное поле скоростей, различаются (в частности, определение изотропности сплошной среды имеет разный смысл). Выражение для симметричного тензора энергии — импульса вязкой жидкости, полученное при помощи понятия вектора динамической 4-скорости, приведено в [10]. Симметричный тензор энергии—импульса вязкой теплопроводной жидкости в системе отсчета, сопутствующей веществу, изучался в [5]; здесь дано обобщение на случай несимметричного тензора энергии — импульса.

Величины l_1, l_2, k_1 . . . представляют собой скалярные функции системы аргументов (2) и их производных. Часть из них в силу соотношений $u_i(s^{ij} + G^i u^j) = 0$, $u_j I^j = 0$ необходимо обращаются в нуль

$$l_2 = k_3 = k_4 = \mu_3 = \mu_4 = \nu_6 = \nu_7 = \nu_8 = \nu_{10} = 0$$

Другие коэффициенты μ_2, ν_5, ν_9 также не будут существенны, так как свертки $u^i \nabla_k u_i$ дают нуль. Кроме того, можно показать, что из неравенства $\sigma \geqslant 0$ вытекают следующие ограничения на коэффициенты l_1, k_1, k_2, μ_1, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4:

$$k_1 = 0, \quad \nu_2 + \nu_3 \geqslant 0, \quad \nu_2 - \nu_3 \geqslant 0, \quad \nu_1 + (\nu_2 + \nu_3) / 3 \geqslant 0$$
$$\nu_4 \leqslant 0, \quad l_1 \leqslant 0, \quad (k_2 + \mu_1)^2 \leqslant 4\nu_4 l_1$$

В заключение выпишем явные выражения для тензора вязких напряжений s^{ij}, вектора потока тепла I^j и вектора количества движения G^i.

$$s^{ij} = \eta\,(\gamma^{ik}\nabla_k u^j + \gamma^{jk}\nabla_k u^i) + (\zeta - {}^2/_3\eta)\,\gamma^{ij}\nabla_k u^k + \xi\,[\gamma^{ik}(\nabla_k u^j - \Omega^j{}_k) - \gamma^{jk}(\nabla_k u^i - \Omega^i{}_k)]$$

где введены обозначения

$$\eta \equiv (2T)^{-1}(\nu_2 + \nu_3) \geqslant 0, \quad \zeta \equiv T^{-1}\,[\nu_1 + (\nu_2 + \nu_3) / 3] \geqslant 0, \quad \xi \equiv (2T)^{-1}(\nu_2 - \nu_3) \geqslant 0$$

Симметричный тензор вязких напряжений получается при $\xi = 0$. Для векторов I^j и G^i имеем

$$I^j = \varkappa\gamma^{jk}\nabla_k T + \mu_1 D u^j, \qquad \varkappa \equiv l_1 / T^2$$
$$G^i = \varkappa_1\gamma^{ik}\,\nabla_k T + T\nu_4 D u^i, \qquad \varkappa_1 \equiv k_2 / T$$

Равенство $\mu_1 = \varkappa_1$ является релятивистским аналогом соотношений Онзагера.

Если тензор Q^{ij} симметричен, то $I^j = G^j$, поэтому $\varkappa = \varkappa_1$, $\mu_1 = T\nu_4$. Тогда при $\mu_1 = \varkappa_1$

$$I^j = G^j = \varkappa\,(\gamma^{jk}\nabla_k T + D u^j)$$

что совпадает с известным выражением, приведенным в [5].

Настоящая работа выполнена под руководством Л. И. Седова, которому автор приносит свою искреннюю признательность.

Поступила 22 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5, стр. 121—180.
2. Седов Л. И. О тензоре энергии импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3, стр. 519—522.
3. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, стр. 510—530.
4. Седов Л. И. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, стр. 4—19.
5. Kluitenberg G. A., Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. I. Physica, 1953, vol. XIX, pp. 689—704.
6. Kluitenberg G. A., Groot S. R., Mazur P. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. II. Phyzica, 1953, vol. XIX, No. 11, pp. 1079—1094.
7. Kluitenberg G. A., Groot S. R. Relativistic thermodynamics of irreversible processes. III. Phyzica, 1954, vol. XX, pp. 199—209.
8. Schöpf H. G. Allgemeinrelativistische Prinzipien der Kontinuumsmechanik. Ann. der Phys., 1964, Bd. 12, Hft. 7, 8, pp. 377—395.
9. Синг Дж. Общая теория относительности, гл. IV, § 2. М., Изд-во иностр. литер., 1963.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, гл. XV, § 126. М., Гостехиздат, 1954.
11. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 393—417.