Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ. ТРЕХМЕРНАЯ СЛОЖНАЯ СТРУКТУРА

В. Е. Вдовин, И. А. Кунин

(Новосибирск)

В [1,2] рассматривалась теория упругости с пространственной дисперсией среды простой структуры и одномерной среды сложной структуры. В данной работе рассматривается общий случай трехмерной среды сложной структуры. При сохранении общей схемы одномерного случая [2] основное внимание уделяется специфике трехмерной задачи. Исходной микромоделью является сложная кристаллическая решетка [3]. В § 1 эта модель обобщается на случай непрерывного распределения масс. В качестве кинематических переменных вводятся смещения центров масс и микродеформации ячеек. Силовыми переменными являются микромоменты. Осуществляется переход к точному континуальному представлению, выводятся уравнения упругой среды сложной структуры с пространственной дисперсией, причем соответствующие операторы выражаются через исходные микропараметры. Показывается, что известные условия симметрии тензора упругих констант, интерпретируемые обычно как условия отсутствия начальных напряжений [3,4] являются следствием инвариантности упругой энергии относительно трансляции и вращения. В § 2 рассматриваются некоторые частные модели, получены уравнения среды в приближении слабой дисперсии. Эти уравнения, как частный случай, содержат уравнения линейной несимметричной (моментной) теории упругости [5-7]. Однако в последних, с точки зрения теории пространственной дисперсии, оказываются несогласованными порядки приближений в разных уравнениях.

В § 3 уравнения среды сложной структуры преобразуются в акустической области в уравнение, содержащее только одну кинематическую переменную — смещение центра масс,— и уравнения, явно разрешенные относительно остальных кинематических переменных. При этом первое уравнение по форме совпадает с уравнением среды простой структуры, но отличается от него наличием временной дисперсии, не связанной с диссипацией энергии. Записывается выражение для плотности энергии и показывается, что аналогично случаю простой структуры можно ввести симметричный тензор напряжений.

1. В качестве исходной микромодели среды сложной структуры рассмотрим модель неограниченной сложной кристаллической решетки в гармоническом приближении [3]. Геометрически сложная решетка представляет собой трехмерную периодическую структуру с элементарной ячейкой, построенной на базисных векторах e_α ($\alpha = 1, 2, 3$). Положение N частиц с массами m_j ($j = 1, \ldots, N$) внутри ячейки задается набором векторов ξ_j. Взаимодействие между частицами определяется силовыми константами $\Phi^{\alpha\beta}(n - n', j, j') = \Phi^{\beta\alpha}(n' - n, j', j)$, где n — вектор, характеризующий номер ячейки. В косоугольной системе координат x^α с базисом e_α и метрическим тензором $g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta$ вектор n имеет целочисленные компоненты.

При отсутствии начальных сил лагранжиан сложной решетки имеет вид (предполагается суммирование по одинаковым тензорным индексам)

$$2L = g^{\alpha\beta}\sum_{nj} m_j w_\alpha^{\cdot}(n, j) w_\beta^{\cdot}(n, j) - \sum_{nn'jj'} w_\alpha(n, j)\Phi^{\alpha\beta}(n-n', j, j') w_\beta(n', j') +$$

$$+ 2\sum_{nj} w_\alpha(n, j) f^\alpha(n, j) \tag{1.1}$$

где $w_\alpha(n, j)$ — смещение j-й частицы в n-й ячейке, $f^\alpha(n,j)$ — действующая на нее внешняя сила.

Обобщим данную модель таким образом, чтобы включить в рассмотрение как дискретную, так и непрерывную периодические структуры. Для этого введем плотность $\rho(\xi)$, характеризующую распределение масс внутри ячейки, и силовую матрицу $\Phi^{\alpha\beta}(n, \xi, \xi') = \Phi^{\beta\alpha}(-n, \xi', \xi)$, определяющую взаимодействие. Здесь ξ^α — локальная система координат с началом в центре масс ячейки. Тогда лагранжиан запишется в виде

$$2L = g^{\alpha\beta}\sum_n \int \rho(\xi) w_\alpha^{\cdot}(n, \xi) w_\beta^{\cdot}(n, \xi)\, d\xi - \tag{1.2}$$

$$-\sum_{nn'}\iint w_\alpha(n, \xi)\Phi^{\alpha\beta}(n-n', \xi, \xi') w_\beta(n', \xi')\, d\xi\, d\xi' + 2\sum_n \int w_\alpha(n, \xi) f^\alpha(n, \xi)\, d\xi$$

Здесь, как и в [1,2], дальнодействие предполагается ограниченным, т. е. $\Phi^{\alpha\beta}(n, \xi, \xi')$ отличны от нуля лишь в конечной области значений n.

Для перехода к дискретной структуре следует положить (1.3)

$$\rho(\xi) = \sum_j m_j \delta(\xi - \xi_j), \qquad \Phi^{\alpha\beta}(n, \xi, \xi') = \sum_{jj'} \Phi^{\alpha\beta}(n, j, j')\, \delta(\xi - \xi_j)\, \delta(\xi' - \xi_{j'})$$

Пользуясь алгоритмом, приведенным в [1], перейдем в (1.2) от функций дискретного аргумента n к функциям непрерывной переменной x. В (k, ω)-представлении[1] выражение для лагранжиана принимает вид (v — объем элементарной ячейки)

$$16\pi^3 vL = \omega^2 g^{\alpha\beta}\iint \rho(\xi)\overline{w_\alpha(k, \xi)} w_\beta(k, \xi)\, dk\, d\xi - \tag{1.4}$$

$$-\iiint \overline{w_\alpha(k, \xi)}\Phi^{\alpha\beta}(k, \xi, \xi') w_\beta(k, \xi')\, dk\, d\xi\, d\xi' + 2\iint \overline{w_\alpha(k, \xi)} f^\alpha(k, \xi)\, dk\, d\xi$$

Аналогично случаю одномерной структуры [2], для перехода к теории упругости удобно ввести коллективные ячеечные переменные. Для этого определим тензоры моментов инерции ячейки порядка s $(s = 0, 1, \ldots)$

$$\rho^{\lambda_1\ldots\lambda_s} = \frac{1}{v}\int \rho(\xi)\, \xi^{\lambda_1}\ldots\xi^{\lambda_s}\, d\xi \quad \text{или} \quad \rho^s = (\rho, \xi^s) \tag{1.5}$$

где в сокращенной записи s обозначают коллективный тензорный индекс, а круглые скобки — соответствующее скалярное произведение.

---

[1] Здесь, как и в [1], функции от k, ω являются фурье-образами соответствующих функций от x, t причем $k \in B$, где B — ячейка обратной решетки с отождествленными точками противоположных граней. Зависимость от аргумента ω явно не указывается.

Через ρ_{2s}^{-1} обозначим тензор, обратный ρ^{2s}, и введем две квазидиагональные матрицы

$$I^{rs} = \rho^{2s}\delta^{rs}, \qquad I_{rs}^{-1} = \rho_{2s}^{-1}\delta_{rs} \tag{1.6}$$

При помощи известного алгоритма построим ортонормированную систему базисных полиномов $e^s(\xi) \equiv e^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}(\xi)$ с весом $\rho(\xi)$ и взаимную систему базисных функций $e_r(\xi) \equiv e_{\mu_1 \ldots \mu_s}(\xi)$, определив их соотношениями

$$(\rho e^r,\ e^s) = I^{rs}, \qquad (e_r,\ e^s) = \delta_r{}^s \tag{1.7}$$

Легко показывается, что

$$e_r(\xi) = \rho(\xi)\, I_{rs}^{-1} e^s(\xi) \tag{1.8}$$

Учитывая, что начало локальной системы координат совпадает с центром масс ячейки, для первых двух элементов базиса имеем

$$e^\circ(\xi) = 1, \quad e^\lambda(\xi) = \xi^\lambda; \quad e_0(\xi) = \rho_0^{-1}\rho(\xi), \quad e_\mu(\xi) = \rho_{\mu\lambda}^{-1}\, \xi^\lambda \rho(\xi) \tag{1.9}$$

Разложим фигурирующие в (1.4) функции ξ, ξ' по элементам базиса

$$w_\beta(k, \xi) = w_{s\beta}(k)\, e^s(\xi), \quad f^\alpha(k, \xi) = f^{r\alpha}(k)\, e_r(\xi)$$

$$\Phi^{\alpha\beta}(k, \xi, \xi') = \Phi^{r\alpha s\beta}(k)\, e_r(\xi)\, e_s(\xi') \tag{1.10}$$

Пользуясь (1.7), легко показать, что

$$w_{s\beta}(k) = (e_s, w_\beta), \qquad f^{r\alpha}(k) = (e^r, f^\alpha)$$

$$\Phi^{r\alpha s\beta}(k) = \frac{1}{v^2} \iint \Phi^{\alpha\beta}(k, \xi, \xi')\, e^r(\xi)\, e^s(\xi')\, d\xi\, d\xi' \tag{1.11}$$

В новых переменных лагранжиан (1.4) в обозначениях [1] принимает вид $(I^{\alpha s\beta} = I^{rs} g^{\alpha\beta})$

$$2L = \langle w_{r\alpha} | \omega^2 I^{r\alpha s\beta} | w_{s\beta} \rangle - \langle w_{r\alpha} | \Phi^{r\alpha s\beta} | w_{s\beta} \rangle + 2 \langle w_{r\alpha} | f^{r\alpha} \rangle \tag{1.12}$$

Принимая во внимание (1.9), первым коэффициентам разложения функций w и f можно дать простую интерпретацию. Легко видеть, что $w_{0\beta}$ — смещение центра масс ячейки, $f^{0\alpha}$ — средняя плотность объемных сил. Очевидно, эти величины должны иметь основное значение при макроскопическом описании среды. В связи с этим введем для них отдельные обозначения, положив $u_\beta = w_{0\beta}$, $q^\alpha = f^{0\alpha}$. Остальные кинематические и силовые переменные обозначим через $\eta_{q\beta} = w_{q\beta}$ и $\mu^{p\alpha} = f^{p\alpha}$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$. Из (1.9) следует, что справедливо представление $\eta_{\mu\beta} = \varepsilon_{(\mu\beta)}' + \Omega_{[\mu\beta]}'$, где $\varepsilon_{(\mu\beta)}'$ — средняя деформация ячейки, $\Omega_{[\mu\beta]}'$ — среднее вращение ячейки. Аналогично $\mu^{\lambda\alpha} = \mu^{(\lambda\alpha)} + m^{[\lambda\alpha]}$, где $\mu^{(\alpha\lambda)}$ — средняя плотность силовых диполей, $m^{[\lambda\alpha]}$ — средняя плотность моментов. Величины $\eta_{q\beta}$ и $\mu^{p\alpha}$ для $p, q > 1$ представляют микродеформации и микромоменты высших порядков.

Отметим, что число независимых элементов базиса определяется числом степеней свободы ячейки. Если число степеней свободы не превышает двенадцати (в случае дискретной структуры это означает, что число частиц в ячейке не превосходит четырех), базис автоматически ограничивается первыми двумя элементами. В этом случае кинематическими параметрами среды будут смещение центра масс u, микродеформация ε' и микроповорот Ω'. Соответственно, силовыми параметрами будут плотности объемных сил q, микромоментов силовых диполей μ и микромоментов m.

Рассмотрим теперь условия, которые накладываются на $\Phi^{r\alpha s\beta}(k)$ требованиями инвариантности упругой энергии

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \langle w_{r\alpha} | \Phi^{r\alpha s\beta} | w_{s\beta}\rangle \tag{1.13}$$

относительно трансляции и вращения. Пусть соответствующие смещения будут $w_\alpha^* (k, \xi)$. Тогда для любого $w_{r\alpha}$ должно выполняться равенство $\Phi (w_{r\alpha} + w_{r\alpha}^*) = \Phi (w_{r\alpha})$. Отсюда следует

$$\operatorname{Re} \langle w_{r\alpha}^* | \Phi^{r\alpha s\beta} | w_{s\beta}\rangle = 0, \qquad \langle w_{r\alpha}^* | \Phi^{r\alpha s\beta} | w_{s\beta}^*\rangle = 0 \tag{1.14}$$

При трансляции на вектор a_α смещение $w_\alpha^* (k, \xi) \sim a_\alpha \delta (k)$ и, следовательно, $w_{r\alpha}^* (k) \sim a_\alpha \delta_r^0 \delta (k)$. Для вращения, определяемого тензором $a_{\alpha\lambda} = -a_{\lambda\alpha}$, имеем $w_\alpha^* (k, \xi) \sim a_{\alpha\lambda} (\xi^\lambda - i\partial^\lambda) \delta(k)$ и, следовательно,

$$w_{r\alpha}^* (k) \sim a_{\alpha\lambda} (\delta_r^\lambda - i\, \delta_r^0 \partial^\lambda) \delta (k), \quad \partial^\lambda = \partial^\lambda / \partial k_\lambda$$

Из первого условия (1.14) для случая трансляции находим

$$\Phi_0^{0\alpha s\beta} = \Phi_0^{s\beta 0\alpha} = 0 \tag{1.15}$$

Здесь и в дальнейшем Φ_0 обозначает значение Φ при $k = 0$. То же условие в случае вращения дает

$$\Phi_0^{[\lambda\alpha] s\beta} = i\partial^{[\lambda} \Phi_0^{0\alpha] s\beta} \tag{1.16}$$

Учтем теперь, что в силу условий $\Phi^{\alpha\beta}(n, \xi, \xi') = \Phi^{\beta\alpha}(-n, \xi', \xi)$ тензор $\Phi^{r\alpha s\beta} (k)$ является эрмитовым, т. е.

$$\Phi^{r\alpha s\beta} (k) = \Phi^{+r\alpha s\beta} (k) \equiv \overline{\Phi^{s\beta r\alpha} (k)} = \Phi^{s\beta r\alpha} (- k) \tag{1.17}$$

где крест обозначает эрмитово сопряжение относительно индексов $r\alpha$ и $s\beta$. Тогда из (1.15) и (1.16) следует

$$\partial^\lambda \Phi_0^{0\alpha 0\beta} = 0 \tag{1.18}$$

Таким образом, для матрицы Φ справедливо представление

$$\Phi (k) = \left\| \begin{array}{c|c} k_\lambda k_\mu \gamma^{\lambda\alpha\mu\beta} (k) & ik_\lambda \chi^{+\lambda\alpha q\beta} (k) \\ \hline -ik_\mu \chi^{p\alpha\mu\beta} (k) & \Gamma^{p\alpha q\beta} (k) \end{array} \right\| \tag{1.19}$$

где $\gamma (k) = \gamma^+ (k)$, $\chi (k)$, $\Gamma (k) = \Gamma^+ (k)$ — целые аналитические функции, однозначно определяемые заданием исходной матрицы $\Phi (k)$. При этом из (1.16) следует

$$\chi_0^{p\alpha[\mu\beta]} + \Gamma_0^{p\alpha[\mu\beta]} = 0 \tag{1.20}$$

Переходя ко второму условию (1.14), отметим, что непосредственная подстановка в него $w_{r\alpha}^*$ невозможна. Это связано с тем, что функционал

$\Phi(w_{r\alpha})$, заданный в формуле (1.13), вообще говоря, не определен на смещениях, которые в x-пространстве не исчезают на бесконечности. Поэтому в данном случае целесообразно ввести плотность упругой энергии, которая должна быть инвариантной относительно трансляции и вращения. Из вида функций $w_{r\alpha}{}^*(k)$ вытекает, что требования инвариантности накладывают условия лишь на γ_0, χ_0 и Γ_0 и, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением плотности энергии в нулевом приближении по k, т. е. плотности энергии при однородной деформации. Принимая во внимание (1.19), плотность лагранжиана в нулевом приближении можно представить в форме (1.21)

$$2\varphi_0'(x) = \partial_\lambda u_\alpha(x)\gamma_0^{\lambda\alpha\mu\beta}\partial_\mu u_\beta(x) + 2\eta_{p\alpha}(x)\chi_0^{p\alpha\mu\beta}\partial_\mu u_\beta(x) + \eta_{p\alpha}(x)\Gamma_0^{p\alpha q\beta}\eta_{q\beta}(x)$$

уже инвариантной относительно трансляции. Истинная плотность энергии $\varphi_0(x)$ отличается от $\varphi_0'(x)$ на дивергентные члены, которые должны быть выбраны из условия инвариантности $\varphi_0(x)$ относительно вращения. Легко показать, что наиболее общая дивергентная часть, инвариантная относительно трансляции, имеет вид

$$\varphi_0(x) - \varphi_0'(x) = \partial_\lambda[u_\alpha(x)b^{\lambda\alpha\mu\beta}\partial_\mu u_\beta(x)] \tag{1.22}$$

где $b^{\lambda\alpha\mu\beta} = -b^{\mu\alpha\lambda\beta}$ — постоянный тензор. Для инвариантности $\varphi_0(x)$ относительно вращения необходимо и достаточно потребовать

$$[b^{\lambda\alpha\mu\beta} + b^{\mu\beta\lambda\alpha} + \gamma_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + \chi_0^{\mu\beta\lambda\alpha}]_{[\mu\beta]} = 0 \tag{1.23}$$

Можно показать, что условием разрешимости уравнений (1.23) будет

$$[\alpha\beta, \lambda\mu] = [\lambda\mu, \alpha\beta] \tag{1.24}$$

Здесь

$$[\alpha\beta, \lambda\mu] = \gamma_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + [\chi_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + \chi_0^{\mu\beta\lambda\alpha} + \Gamma_0^{\lambda\alpha\mu\beta}]_{(\lambda\mu)} \tag{1.25}$$

При условии (1.24) решение (1.23) единственно и имеет вид

$$2b^{\lambda\alpha\mu\beta} = [2\gamma_0^{\alpha\lambda\mu\beta} - \chi_0^{\lambda\mu\alpha\beta} - \chi_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + \chi_0^{\alpha\lambda\mu\beta}]_{[\lambda\mu]} \tag{1.26}$$

Равенство (1.24) в случае дискретной структуры совпадает с известным условием Х. Куня на силовые константы, которое интерпретируется как условие отсутствия начальных напряжений [3,4]. Из соображений, приведенных в [1] и в настоящей работе, следует, что это условие не связано с начальными напряжениями, а является следствием инвариантности плотности энергии относительно вращения.

Условия инвариантности энергии относительно вращения можно наглядно интерпретировать, если наряду с микровращением $\Omega_{\mu\beta}'$ ввести макроскопическое вращение $\Omega_{\mu\beta} = \partial_{[\mu}u_{\beta]}$. Тогда легко показать, что полученные выше условия эквивалентны требованию, чтобы плотность энергии в нулевом приближении зависела лишь от разности $\Omega - \Omega'$.

Уравнения движения, соответствующие лагранжиану (1.12), с учетом (1.19) в (k, ω)-представлении имеют вид

$$\omega^2 \rho g^{\alpha\beta} u_\beta - k_\lambda \gamma^{\lambda\alpha\mu\beta}(k) k_\mu u_\beta - i k_\lambda \chi^{+\lambda\alpha q\beta}(k)\eta_{q\beta} = -q^\alpha$$
$$\omega^2 I^{p\alpha q\beta}\eta_{q\beta} + i\chi^{p\alpha\mu\beta}(k) k_\mu u_\beta - \Gamma^{p\alpha q\beta}(k)\eta_{q\beta} = -\mu^{p\alpha} \qquad (1.27)$$

где ρ — средняя плотность масс в ячейке.

В (x, t) - представлении уравнения (1.27) принимают форму

$$\rho g^{\alpha\beta} \ddot{u}_\beta - \partial_\lambda \gamma^{\lambda\alpha\mu\beta}\partial_\mu u_\beta - \partial_\lambda \chi^{+\lambda\alpha q\beta}\eta_{q\beta} = q^\alpha$$
$$I^{p\alpha q\beta}\ddot{\eta}_{q\beta} + \chi^{p\alpha\mu\beta}\partial_\mu u_\beta + \Gamma^{p\alpha q\beta}\eta_{q\beta} = \mu^{p\alpha} \qquad (1.28)$$

где γ, χ, Γ — интегральные операторы с разностными ядрами, являющимися Фурье-прообразами функций $\gamma(k)$, $\chi(k)$, $\Gamma(k)$.

Уравнения (1.28) дают точное континуальное представление исходной модели, причем операторы γ, χ, Γ могут быть явно выражены через микроскопические силовые константы. При феноменологическом подходе уравнения описывают наиболее общую модель макроскопически однородной линейно-упругой среды сложной структуры с пространственной дисперсией [1].

Так же, как и в одномерном случае [2], рассматриваемая модель может быть эквивалентно описана в терминах одной кинематической переменной $w_\alpha(x)$ и одной силовой переменной $f^\alpha(x)$. При этом уравнения движения как в (x, t)-представлении, так и в (k, ω)-представлении, имеют вид интегральных уравнений с неразностными ядрами. Формулы, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между этим описанием и рассмотренным выше, получаются очевидным обобщением соответствующих формул одномерного случая и поэтому здесь не приводятся.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если элементарная ячейка обладает центром симметрии, на силовые константы накладываются определенные условия, которые в прямых матричных обозначениях совпадают с соответствующими условиями, полученными для одномерной модели [2]. Аналогично, легко обобщаются на трехмерный случай приведенные в [2] необходимые и достаточные условия, при которых уравнения среды со сложной структурой допускают преобразование в уравнения среды с простой структурой [1].

В общем случае $\Phi^{r\alpha s\beta}(k)$ не обладает симметрией по $\alpha\beta$. Однако, если эта симметрия имеется, ей можно дать простую интерпретацию в терминах парного взаимодействия. Назовем взаимодействие в дискретной модели парным, если потенциальную энергию можно представить в виде суммы, каждый член которой зависит от относительных смещений двух частиц. Обобщение этого определения на случай непрерывной модели очевидно. В [10] показано, что в гармоническом приближении наиболее общим видом взаимодействия в кристаллической решетке является тройное взаимодействие. Можно доказать, что симметрия $\Phi^{\alpha\beta}(n, \xi, \xi')$ по $\alpha\beta$, а следовательно, и $\Phi^{r\alpha s\beta}(k)$, является необходимым и достаточным условием парности взаимодействия. Отсюда следует, что в одномерной модели взаимодействие всегда будет парным. В трехмерных моделях с простой структурой обычно предполагается инвариантность относительно инверсии, откуда вытекает симметрия $\Phi^{\alpha\beta}(n)$ по $\alpha\beta$, т. е. парность взаимодействия.

---

[1] Отметим, что среда сложной структуры рассматривалась с другой точки зрения в работах [7–9].

Отметим интересный случай, когда среда обладает такой структурой, что при однородной статической деформации внешние силы, действующие на каждую частицу, отсутствуют (это, например, имеет место, если каждая частица находится в центре симметрии). В этом случае из уравнений (1.27) находим необходимое и достаточное условие на упругие константы

$$\chi_0^{p\alpha(\mu\beta)} + \Gamma_0^{p\alpha(\mu\beta)} = 0 \tag{2.1}$$

В совокупности с (1.20) это означает, что

$$\chi_0^{p\alpha\mu\beta} + \Gamma_0^{p\alpha\mu\beta} = 0 \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь модель среды со слабой дисперсией. Для этого разложим входящие в (1.27) функции $\gamma(k)$, $\chi(k)$ и $\Gamma(k)$ в ряд по k в окрестности точки $k = 0$ и ограничимся конечным числом членов. При $k = 0$ будем иметь нулевое приближение. При переходе к следующим приближениям целесообразно различать два случая. Для гиротропной среды следующим приближением является первое, а операторы в (1.28) имеют вид

$$\gamma^{\lambda\alpha\mu\beta} = \gamma_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + \gamma_1^{\lambda\alpha\mu\beta\nu}\partial_\nu, \quad \chi^{p\alpha\mu\beta} = \chi_0^{p\alpha\mu\beta} + \chi_1^{p\alpha\mu\beta\nu}\partial_\nu, \quad \Gamma^{p\alpha q\beta} = \Gamma_0^{p\alpha q\beta} + \Gamma_1^{p\alpha q\beta\nu}\partial_\nu \tag{2.3}$$

Если среда негиротропна, следующим после нулевого является второе приближение, и

$$\gamma^{\lambda\alpha\mu\beta} = \gamma_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + \gamma_2^{\lambda\alpha\mu\beta\nu\tau}\partial_\nu\partial_\tau, \quad \chi^{p\alpha\mu\beta} = \chi_0^{p\alpha\mu\beta} + \chi_2^{p\alpha\mu\beta\nu\tau}\partial_\nu\partial_\tau$$
$$\Gamma^{p\alpha q\beta} = \Gamma_0^{p\alpha q\beta} + \Gamma_2^{p\alpha q\beta\nu\tau}\partial_\nu\partial_\tau \tag{2.4}$$

Индексами 1, 2 в (2.3) и (2.4) обозначены соответствующие коэффициенты разложения функций $\gamma(k)$, $\chi(k)$ и $\Gamma(k)$ в ряд по степеням $(-ik)$.

В частном случае изотропной среды с кинематическими переменными u и Ω' (континуум Коссера) уравнения (1.28) во втором приближении записываются в форме

$$\rho \ddot{u} - (\alpha_0 + \alpha_2\Delta)\,\Delta u - (\beta_0 + \beta_2\Delta)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u + 2\,(\chi_0 + \chi_2\Delta)\,\mathrm{rot}\,\Omega' = q$$
$$I\ddot{\Omega}' + (\chi_0 + \chi_2\Delta)\,\mathrm{rot}\,u - 2\,(\chi_0 - \varkappa_2\Delta)\,\Omega' = m \tag{2.5}$$

где константы $\alpha_0, \alpha_2, \ldots$ очевидным образом связаны с коэффициентами операторов (2.4) в изотропном случае.

Уравнения среды со слабой дисперсией содержат как частный случай уравнения линейной несимметричной (моментной) теории упругости [5–7]. Так например, для того чтобы получить уравнения работы [7], следует рассмотреть модель, в которой кинематическими переменными являются u, ε', Ω' и ограничиться в первом уравнении системы (1.28) нулевым приближением по всем переменным, а во втором уравнении — нулевым приближением по u и вторым приближением по ε' и Ω'. Подобную несогласованность в приближениях, по-видимому, невозможно обосновать в рамках теории упругой среды с пространственной дисперсией. В работах [5,6] рассматривается континуум Коссера при аналогичной несогласованности порядков приближений в первом и втором уравнениях.

3. Как указывалось в [2], при макроскопическом описании среды с микроструктурой наибольший интерес представляет акустическая область колебаний, в которой основной кинематической переменной является смещение центра масс u. Выделенная роль этой переменной связана с тем обстоятельством, что в допустимой акустической области система уравнений (1.27) может быть эквивалентно преобразована в уравнение, содержащее лишь одну переменную u, и уравнения, явно выражающие

остальные кинематические переменные η через u. В прямых матричных обозначениях уравнения (1.27) совпадают с соответствующими уравнениями для одномерного случая и, следовательно, общая схема преобразования уравнений сохраняется и для трехмерного случая. Это позволяет, не останавливаясь на деталях, привести окончательные результаты.

Введем матрицу

$$A\,(k,\omega) = \|\Gamma\,(k) - \omega^2 I\|^{-1} = A^+\,(k,\omega) \tag{3.1}$$

Аналогично тому, как это сделано в [2], можно показать, что $A\,(k,\omega)$ существует в некоторой конечной части акустической области, содержащей начало координат (допустимая акустическая область), и может быть явно выражена через коэффициенты разложения $\Gamma\,(k)$ в ряд по k. При помощи матрицы $A\,(k,\omega)$ система (1.27) преобразуется к виду

$$\omega^2 \rho g^{\alpha\beta} u_\beta - \psi^{\alpha\beta\lambda\mu}\,(k,\omega)\, k_\lambda k_\mu u_\beta = -Q^\alpha \tag{3.2}$$

$$\eta_{p\alpha} = i a_{p\alpha}^{\cdot\cdot\mu\beta}\,(k,\omega)\, k_\mu u_\beta + A_{p\alpha q\beta}\,(k,\omega)\,\mu^{q\beta} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\psi^{\alpha\beta\lambda\mu}\,(k,\omega) = \gamma^{\lambda\alpha\mu\beta}\,(k) - [\chi^{+\lambda\alpha p\nu}\,(k)\, A_{p\nu q\tau}\,(k,\omega)\, \chi^{q\tau\mu\beta}\,(k)]_{(\lambda\mu)}$$

$$a_{p\alpha}^{\cdot\cdot\mu\beta}\,(k,\omega) = A_{p\alpha q\tau}\,(k,\omega)\,\chi^{q\tau\mu\beta}\,(k) \tag{3.4}$$

$$Q^\alpha = q^\alpha + i k_\lambda \mu^{\lambda\alpha}, \qquad \mu^{\lambda\alpha} = -a^{+\lambda\alpha}_{\cdot\cdot\, q\beta}\,(k,\omega)\,\mu^{q\beta}$$

Уравнение (3.2) по форме совпадает с уравнением движения упругой среды простой структуры [1]. Однако в данном случае $\psi^{\alpha\beta\lambda\mu}$ зависит не только от k, но и от ω, т. е., помимо пространственной, имеется также и временная дисперсия, которая, очевидно, не связана с диссипацией энергии. Легко показать, что при малых k и ω временная дисперсия проявляется, начиная лишь со второго приближения.

В правую часть (3.2) входит эквивалентная плотность внешних сил Q^α, которая равна средней плотности внешних сил q^α минус дивергенция плотности микромоментов $\mu^{\lambda\alpha}$, как и в обычной макроскопической теории.

Рассуждая аналогично [1], можно получить выражение для плотности упругой энергии и определить симметричный тензор напряжений. Для этого введем тензор (S — оператор симметрирования, определенный в [1])

$$c^{\lambda\alpha\mu\beta}\,(k,\omega) = S\psi^{\alpha\beta\lambda\mu}\,(k,\omega) \tag{3.5}$$

симметричный по первой паре индексов, и обозначим через $\zeta_{\lambda\alpha}$ упругую дисторсию

$$\zeta_{\lambda\alpha}\,(x) = \partial_\lambda u_\alpha\,(x) = \varepsilon_{\lambda\alpha}\,(x) + \Omega_{\lambda\alpha}\,(x)$$

Тогда плотность упругой энергии $\varphi\,(x)$ можно представить в виде

$$\varphi\,(x) = {}^1\!/_2\,\sigma^{\lambda\alpha}\,(x)\,\varepsilon_{\lambda\alpha}\,(x) \tag{3.6}$$

где симметричный тензор $\sigma^{\lambda\alpha}$ может быть интерпретирован как тензор напряжений [1].

---

[1] В то же время не представляется целесообразным вводить непосредственно в уравнениях (1.28) набор (вообще говоря, бесконечный) тензоров моментных напряжений, так как они не являются хорошо определимыми физическими величинами. Это следует из анализа исходной микроскопической модели.

В (k, ω)-представлении

$$\sigma^{\lambda\alpha}(k) = c^{\lambda\alpha\mu\beta}(k, \omega)\,\zeta_{\mu\beta}(k) \tag{3.7}$$

Чтобы (3.6) было инвариантным относительно вращения, необходимо и достаточно потребовать

$$\psi_0^{\alpha\beta\lambda\mu} = \psi_0^{\lambda\mu\alpha\beta} \tag{3.8}$$

Несложные вычисления показывают, что (3.8) совпадает с условием (1.24). Соотношение (3.7) является обобщенным законом Гука. В (x, t)-представлении закон Гука записывается в очевидной операторной форме, а уравнения движения принимают обычный вид

$$\operatorname{div} \sigma = \rho \ddot{u} - Q \tag{3.9}$$

В случае слабой дисперсии в нулевом по k и ω приближении уравнения (3.2) переходят в уравнения классической теории упругости, а $c_0^{\lambda\alpha\mu\beta} = c^{\lambda\alpha\mu\beta}(0, 0)$ совпадает с обычным тензором упругих констант, которые измеряются в макроэксперименте. Из (3.4) и (3.5) можно получить зависимость $c_0^{\lambda\alpha\mu\beta}$ от микроскопических силовых констант

$$c_0^{\lambda\alpha\mu\beta} = S\psi_0^{\alpha\beta\lambda\mu} \tag{3.10}$$

Нетрудно показать, что (3.10) совпадает с соответствующей формулой, приведенной в [3]. Интересно отметить, что (3.10) существенно упрощается при выполнении условия (2.1), так как в этом случае не требуется производить обращения матрицы $\Gamma_0^{p\alpha q\beta}$. Формула (3.10) при этом принимает вид

$$c_0^{\lambda\alpha\mu\beta} = S\,[\alpha\beta, \lambda\mu] \tag{3.11}$$

При переходе к следующим приближениям в уравнении (3.2) целесообразно, как и ранее, различать случаи гиротропной и негиротропной среды относительно уравнения (3.2). При этом следует отметить, что свойство гиротропности в указанном смысле не инвариантно относительно проведенного выше преобразования уравнений. Так например, если выполняется условие (2.1), а взаимодействие парное, то среда, описываемая уравнениями (1.27), вообще говоря, гиротропна. Однако можно показать, что при переходе к уравнению (3.2) первое приближение в этом случае совпадает с нулевым и лишь в уравнениях (3.3) явно проявляется негиротропность.

В общем случае гиротропной среды оператор $\mathbf{c}$ в (x, t)-представлении в первом приближении имеет вид

$$\mathbf{c}^{\lambda\alpha\mu\beta} = c_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + c_1^{\lambda\alpha\mu\beta\tau}\partial_\tau \tag{3.12}$$

и соответственно для негиротропной среды во втором приближении $(\partial_t = \partial / \partial t)$

$$\mathbf{c}^{\lambda\alpha\mu\beta} = c_0^{\lambda\alpha\mu\beta} + c_2^{\lambda\alpha\mu\beta\tau\varkappa}\partial_\tau\partial_\varkappa + c_2'^{\lambda\alpha\mu\beta}\partial_t^2 \tag{3.13}$$

Для изотропной среды в общем случае сильной дисперсии

$$c^{\varkappa\alpha\tau\beta}(k, \omega) = \lambda(k, \omega)\,\delta^{\varkappa\alpha}\delta^{\tau\beta} + \mu(k, \omega)\,(\delta^{\alpha\beta}\delta^{\varkappa\tau} + \delta^{\varkappa\beta}\delta^{\tau\alpha}) \tag{3.14}$$

где λ и μ — четные аналитические функции k и ω. Четность относительно ω очевидна, а относительно k вытекает из того, что не существуют изотропные тензоры нечетной валентности.

Уравнение (3.2) для изотропной среды в (x, t)-представлении во втором приближении записывается в виде

$$Ju^{\cdot\cdot} - (\mu_0 + \mu_2\Delta)\,\Delta u - [\lambda_0 + \mu_0 + (\lambda_2 + \mu_2)\Delta]\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,u = Q \tag{3.15}$$

Здесь величину

$$J = \rho - \mu_2'\Delta - (\lambda_2' + \mu_2')\,\mathrm{graddiv} \tag{3.16}$$

можно рассматривать как операторную инерционную характеристику среды. Уравнение (3.15) совпадает с соответствующим уравнением работы [7]. В статическом случае (3.15) совпадает с уравнением равновесия для среды простой структуры и, следовательно, при его решении можно использовать статический тензор Грина, приведенный, например, в [1].

Авторы благодарны Г. И. Баренблатту, А. И. Лурье, В. А. Пальмову, Ю. Н. Работнову и Л. И. Седову за полезные дискуссии.

Поступила 22 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин И. А. Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
2. Кунин И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Одномерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
3. Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. Huang K. On the atomic theory of elasticity, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 203, № 178.
5. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, вып. 9.
6. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
7. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 16, № 1, pp. 51—78.
8. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, № 2, pp. 85—112.
9. Green A. E., Rivlin R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, № 2, pp. 113—147.
10. Оскотский В. С., Эфрос А. Л. К теории кристаллических решеток с нецентральным межатомным взаимодействием. Физ. тверд. тела, 1961, т. 3, вып. 2, стр. 611—624.