Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Г. М. Валов

(*Кострома*)

В 1852 г. Ляме [1] сформулировал первую основную задачу теории упругости для прямоугольного параллелепипеда. Приближенное решение этой задачи с использованием вариационного принципа Кастильяно дано М. М. Филоненко-Бородичем [2,3]. В дальнейшем М. Мишонов [4] представил приближенное решение задачи Ляме в виде расходящихся тройных тригонометрических рядов. Эти ряды содержат постоянные, которые находятся из бесконечных систем линейных уравнений. В работе Теодореску [5] рассмотрен частный случай задачи Ляме. Используя свой метод, автор дает представление решения задачи в виде двойных рядов, аналогичных тем, которые получены нами [6-8] и Э. Н. Байда [9, 10] при решении задач о равновесии прямоугольного параллелепипеда. Решение задачи приводится к трем бесконечным системам линейных уравнений, при этом автор утверждает, что эти бесконечные системы будут регулярными. Ниже показано (§ 5), что бесконечные системы, полученные Теодореску, наоборот, не будут регулярными.

В перечисленных выше работах, посвященных исследованию проблемы Ляме, авторы ограничиваются или получением решения приближенным методом, или доводят процесс решения задачи до получения бесконечных систем, оставляя их не исследованными. Следует подчеркнуть, что основная трудность решения этой задачи состоит в исследовании полученных бесконечных систем, которые существенно отличаются от бесконечных систем соответствующей плоской задачи.

В настоящей статье дается решение первой основной задачи теории упругости для прямоугольного параллелепипеда, на поверхности которого заданы внешние напряжения (§ 2, 3, 4). Для решения этой задачи использовано представление общего решения однородных уравнений Ляме, содержащее пять произвольных гармонических функций и являющееся обобщением известного решения Папковича—Нейбера (§ 1). Решение задачи представлено в виде двойных рядов, содержащих четыре серии неизвестных постоянных, которые находятся из четырех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Полученные бесконечные системы линейных уравнений исследованы для значений коэффициента Пуассона, удовлетворяющих неравенству $0 < \sigma \leqslant 0.18$. Доказано, что для этих значений σ бесконечные системы квазивполне регулярны.

§ 1. Запишем уравнения статики упругого тела при отсутствии массовых сил

$$\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\Delta u=0,\qquad \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\Delta v=0,\qquad \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\Delta w=0 \quad (1.1)$$

$$\left(\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, θ — объемная деформация, Δ — оператор Лапласа.

Ищем чисто гармонические решения уравнений (1.1) в виде

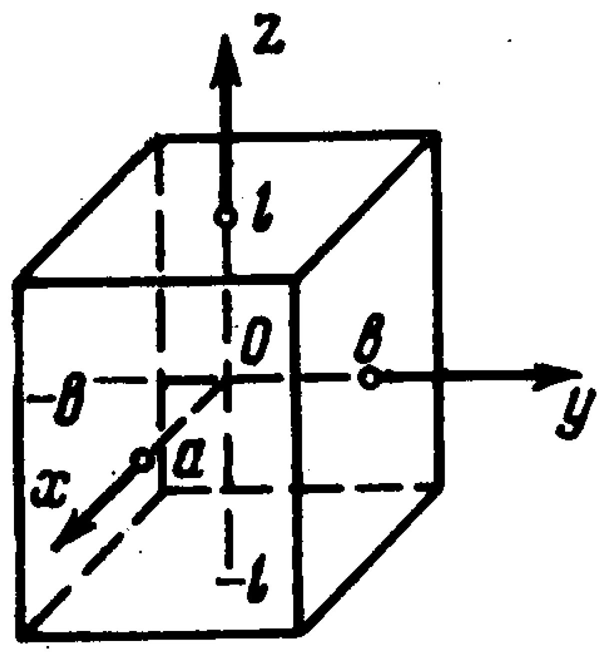
$$u=\delta_4(x,y,z),\qquad v=\delta_5(x,y,z),\qquad w=\delta_6(x,y,z) \quad (1.2)$$

где δ_4, δ_5 и δ_6 — гармонические функции. Если они удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial \delta_4}{\partial x} + \frac{\partial \delta_5}{\partial y} + \frac{\partial \delta_6}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

то очевидно, что уравнения (1.1) удовлетворяются.

Прибавляя к решению (1.2) бигармоническую часть решения Папковича—Нейбера, получим следующее представление общего решения уравнений (1.1):



$$\begin{aligned} u &= \delta_4 + \delta_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial x} (x\delta_1 + y\delta_2 + z\delta_3) \\ v &= \delta_5 + \delta_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial y} (x\delta_1 + y\delta_2 + z\delta_3) \\ w &= \delta_6 + \delta_3 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial z} (x\delta_1 + y\delta_2 + z\delta_3) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 и δ_6 — гармонические функции, связанные соотношением (1.3). Полагая в (1.4)

$$\delta_4 = \frac{\partial \delta_0}{\partial x}, \qquad \delta_5 = \frac{\partial \delta_0}{\partial y}, \qquad \delta_6 = \frac{\partial \delta_0}{\partial z}$$

где $\delta_0 (x, y, z)$ — гармоническая функция, получим решение Папковича—Нейбера.

В решении Папковича—Нейбера из четырех произвольных гармонических функций только одна дает чисто гармонические решения, что затрудняет построение этих решений. На этот недостаток решения Папковича—Нейбера указал Хата [11]. Из пяти произвольных гармонических функций, входящих в представление (1.4), две дают чисто гармонические решения. Это намного упрощает подбор указанных решений уравнений (1.1) и тем самым облегчает построение решений граничных задач для параллелепипеда, что подтверждается нижеследующим решением задачи Ляме.

§ 2. Не умаляя общности, изложим метод решения задачи на частном случае: считаем деформацию параллелепипеда симметричной относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ (фигура), что имеет место при его сжатии и растяжении.

Итак, требуется найти функции $u (x, y, z)$, $v (x, y, z)$ и $w (x, y, z)$, удовлетворяющие внутри параллелепипеда $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-l \leqslant z \leqslant l$ дифференциальным уравнениям (1.1), а на его поверхности условиям

$$2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\theta\right) = \psi_1 (x, y) \quad \text{при } z = l \tag{2.1}$$

$$2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\theta\right) = \psi_2 (x, y) \quad \text{при } z = -l \tag{2.2}$$

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f_1 (x, y), \qquad G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = F_1 (x, y) \quad \text{при } z = l \tag{2.3}$$

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = f_2 (x, y), \qquad G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = F_2 (x, y) \quad \text{при } z = -l \tag{2.4}$$

$$2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\theta\right) = -q (y, z) \quad \text{при } x = \pm a \tag{2.5}$$

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \qquad G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{при } x = \pm a \tag{2.6}$$

$$2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\theta\right) = -\varphi (x, z) \quad \text{при } y = \pm b \tag{2.7}$$

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \qquad G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{при } y = \pm b \tag{2.8}$$

Здесь G — модуль сдвига. Смысл граничных условий очевиден из формул закона Гука. Граничные функции предполагаются представимыми рядами Фурье (2.9)

$$\psi_i(x, y) = \sum_{p, m=0}^{\infty} \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(i)} \cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b} \qquad \begin{pmatrix} -a \leqslant x \leqslant a \\ -b \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2)$$

$$f_i(x, y) = \sum_{p, m=0}^{\infty} \lambda_{pm} f_{pm}^{(i)} \sin\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b} \qquad \begin{pmatrix} -a \leqslant x \leqslant a \\ -b \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix} \qquad (i = 1,2)$$

$$F_i(x, y) = \sum_{p, m=0}^{\infty} \lambda_{pm} F_{pm}^{(i)} \cos\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad \begin{pmatrix} -a \leqslant x \leqslant a \\ -b \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2)$$

$$q(y, z) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{mn} q_{mn} \cos\frac{m\pi y}{b}\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l} \qquad \begin{pmatrix} -b \leqslant y \leqslant b \\ -l \leqslant z \leqslant l \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x, z) = \sum_{n, p=0}^{\infty} \lambda_{np}\varphi_{np} \cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l} \qquad \begin{pmatrix} -a \leqslant x \leqslant a \\ -l \leqslant z \leqslant l \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1/4 \text{ при } i = j = 0 \\ 1/2 \text{ при } i = 0, j > 0;\ j = 0,\ i > 0 \\ 1 \text{ при } i > 0,\ j > 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Запишем условие равновесия внешних напряжений, приложенных к параллелепипеду

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \psi_1(x, y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \psi_2(x, y)\,dx\,dy = +P$$

где P — заданное значение проекции, равнодействующей на грани $z = l$. Подставляя выражения (2.9) для $\psi_i(x, y)$, получим, что их коэффициенты Фурье связаны соотношением

$$\psi_{00}^{(1)} = \psi_{00}^{(2)} = +\frac{P}{ab} \qquad (2.11)$$

Запишем известное выражение гармонической функции (2.12)

$$\begin{aligned} \delta = {} & (C_{11}\cos\alpha_p x + C_{12}\sin\alpha_p x)(C_{13}\cos\beta_m y + C_{14}\sin\beta_m y)(C_{15}\operatorname{ch}\gamma_{pm}z + \\ & + C_{16}\operatorname{sh}\gamma_{pm}z) + (C_{21}\cos\alpha_p x + C_{22}\sin\alpha_p x)(C_{23}\operatorname{ch}\beta_{np}y + C_{24}\operatorname{sh}\beta_{np}y)\times \\ & \times[C_{25}\cos\gamma_n(z-l) + C_{26}\sin\gamma_n(z-l)] + (C_{31}\operatorname{ch}\alpha_{mn}x + C_{32}\operatorname{sh}\alpha_{mn}x)\times \\ & (C_{33}\cos\beta_m y + C_{34}\sin\beta_m y)[C_{35}\cos\gamma_n(z-l) + C_{36}\sin\gamma_n(z-l)]] \end{aligned}$$

$$\alpha_p = \frac{p\pi}{a}, \qquad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \qquad \gamma_n = \frac{n\pi}{2l} \qquad (2.13)$$

$$\alpha_{mn} = \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}, \qquad \beta_{np} = \sqrt{\gamma_n^2 + \alpha_p^2}, \qquad \gamma_{pm} = \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_m^2}$$

Здесь $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{36}$ — произвольные постоянные.

При построении решения граничной задачи будем выбирать, используя (2.12), такие выражения для гармонических функций, входящих в (1.4), чтобы ряды, составленные из частных решений (1.4), удовлетворяли бы граничным условиям (2.3), (2.4), (2.6) и (2.8) в касательных направлениях к поверхности параллелепипеда. Это достигается за счет выбора постоянных, входящих в (2.12), и учета четности и нечетности соответствующих перемещений и напряжений. Так, полагая в (1.4)

$$\delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \delta_3 = \frac{1}{l\gamma_{pm}^2 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l}\left[C_{pm}^{(3)} \operatorname{sh}\gamma_{pm}z + C_{pm}^{(4)} \operatorname{ch}\gamma_{pm}z\right] \times$$
$$\times \cos\alpha_p x \cos\beta_m y$$

$$\delta_4 = -\alpha_p\left[C_{pm}^{(3)} M_{pm}^{(3)} \operatorname{ch}\gamma_{pm}z + C_{pm}^{(4)} M_{pm}^{(4)} \operatorname{sh}\gamma_{pm} z\right] \sin\alpha_p x \cos\beta_m y +$$
$$+ \frac{\lambda_{pm}}{4G}\Big\{\left[(2\gamma_{pm}^2 - \alpha_p^2)(f_{pm}^{(1)} - f_{pm}^{(2)}) - \beta_m\alpha_p(F_{pm}^{(1)} - F_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm}z}{\gamma_{pm}^3 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l} +$$
$$+ \left[(2\gamma_{pm}^2 - \alpha_p^2)(f_{pm}^{(1)} + f_{pm}^{(2)}) - \beta_m\alpha_p(F_{pm}^{(1)} + F_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm}z}{\gamma_{pm}^3 \operatorname{ch}\gamma_{pm} l}\Big\} \sin\alpha_p x \cos\beta_m y$$

$$\delta_5 = -\beta_m\left[C_{pm}^{(3)} M_{pm}^{(3)} \operatorname{ch}\gamma_{pm} z + C_{pm}^{(4)} M_{pm}^{(4)} \operatorname{sh}\gamma_{pm} z\right] \cos\alpha_p x \sin\beta_m y +$$
$$+ \frac{\lambda_{pm}}{4G}\Big\{\left[(2\gamma_{pm}^2 - \beta_m^2)(F_{pm}^{(1)} - F_{pm}^{(2)}) - \alpha_p\beta_m(f_{pm}^{(1)} - f_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm}z}{\gamma_{pm}^3 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l} +$$
$$+ \left[(2\gamma_{pm}^2 - \beta_m^2)(F_{pm}^{(1)} + F_{pm}^{(2)}) - \alpha_p\beta_m(f_{pm}^{(1)} + f_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm}z}{\gamma_{pm}^3 \operatorname{ch}\gamma_{pm} l}\Big\} \cos\alpha_p x \sin\beta_m y$$

$$\delta_6 = \gamma_{pm}\left[C_{pm}^{(3)} M_{pm}^{(3)} \operatorname{sh}\gamma_{pm} z + C_{pm}^{(4)} M_{pm}^{(4)} \operatorname{ch}\gamma_{pm} z\right] \cos\alpha_p x \cos\beta_m y -$$
$$- \frac{\lambda_{pm}}{4G}\Big\{\left[\alpha_p(f_{pm}^{(1)} - f_{pm}^{(2)}) + \beta_m(F_{pm}^{(1)} - F_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm}z}{\gamma_{pm}^2 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l} +$$
$$+ \left[\alpha_p(f_{pm}^{(1)} + f_{pm}^{(2)}) + \beta_m(F_{pm}^{(1)} + F_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm}z}{\gamma_{pm}^2 \operatorname{ch}\gamma_{pm} l}\Big\} \cos\alpha_p x \cos\beta_m y$$

$$M_{pm}^{(3)} = \frac{2\sigma - 1 + \gamma_{pm} l \operatorname{cth}\gamma_{pm} l}{4(1-\sigma) l\gamma_{pm}^3 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l}, \qquad M_{pm}^{(4)} = \frac{2\sigma - 1 + \gamma_{pm} l \operatorname{th}\gamma_{pm} l}{4(1-\sigma) l\gamma_{pm}^3 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l}$$

получим следующие частные решения уравнений Ляме (1.1):

$$u_{pm}^{(3)} = \frac{\alpha_p}{4(1-\sigma) l\gamma_{pm}^3 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l}\{C_{pm}^{(3)}\left[(1 - 2\sigma - \gamma_{pm} l \operatorname{cth}\gamma_{pm} l)\operatorname{ch}\gamma_{pm}z + \gamma_{pm}z \times\right.$$
$$\left.\times \operatorname{sh}\gamma_{pm}z\right] + C_{pm}^{(4)}\left[(1 - 2\sigma - \gamma_{pm} l \operatorname{th}\gamma_{pm} l)\operatorname{sh}\gamma_{pm}z + \gamma_{pm}z \operatorname{ch}\gamma_{pm}z\right]\} \sin\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b} +$$
$$+ \frac{\lambda_{pm}}{4G\gamma_{pm}^3}\Big\{\left[(2\gamma_{pm}^2 - \alpha_p^2)(f_{pm}^{(1)} - f_{pm}^{(2)}) - \beta_m\alpha_p(F_{pm}^{(1)} - F_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm}z}{\operatorname{sh}\gamma_{pm} l} +$$
$$+ \left[(2\gamma_{pm}^2 - \alpha_p^2)(f_{pm}^{(1)} + f_{pm}^{(2)}) - \beta_m\alpha_p(F_{pm}^{(1)} + F_{pm}^{(2)})\right]\frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm}z}{\operatorname{ch}\gamma_{pm} l}\Big\} \sin\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}$$

$$v_{pm}^{(3)} = \frac{\beta_m}{4(l-\sigma) l\gamma_{pm}^3 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l}\{C_{pm}^{(3)}\left[(1 - 2\sigma - \gamma_{pm} l \operatorname{cth}\gamma_{pm} l)\operatorname{ch}\gamma_{pm} z +\right.$$
$$\left. + \gamma_{pm}z \operatorname{sh}\gamma_{pm} z\right] + C_{pm}^{(4)}\left[(1 - 2\sigma - \gamma_{pm} l \operatorname{th}\gamma_{pm} l)\operatorname{sh}\gamma_{pm} z +\right. \qquad (2.14)$$
$$\left. + \gamma_{pm} z \operatorname{ch}\gamma_{pm} z\right]\} \cos\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} + \frac{\lambda_{pm}}{4G\gamma_{pm}^3} \times$$

$$\times \left\{ [(2\gamma_{pm}^2 - \beta_m^2)(F_{pm}^{(1)} - F_{pm}^{(2)}) - \alpha_p\beta_m (f_{pm}^{(1)} - f_{pm}^{(2)})] \frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm}z}{\operatorname{sh}\gamma_{pm}l} + \right.$$

$$\left. + [(2\gamma_{pm}^2 - \beta_m^2)(F_{pm}^{(1)} + F_{pm}^{(2)}) - \alpha_p\beta_m (f_{pm}^{(1)} + f_{pm}^{(2)})] \frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm}z}{\operatorname{ch}\gamma_{pm}l} \right\} \cos\frac{p\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

$$w_{pm}^{(3)} = \frac{1}{4(1-\sigma) l\gamma_{pm}^2 \operatorname{sh}\gamma_{pm} l} \{C_{pm}^{(3)} [(2 - 2\sigma + \gamma_{pm} l \operatorname{cth}\gamma_{pm} l) \operatorname{sh}\gamma_{pm} z -$$

$$- \gamma_{pm} z \operatorname{ch}\gamma_{pm} z] + C_{pm}^{(4)} [(2 - 2\sigma + \gamma_{pm} l \operatorname{th}\gamma_{pm} l) \operatorname{ch}\gamma_{pm} z - \gamma_{pm} z \operatorname{sh}\gamma_{pm} z]\} \times$$

$$\times \cos\frac{p\pi x}{a} \cos\frac{m\pi y}{b} - \frac{\lambda_{pm}}{4G\gamma_{mp}^2} \left\{ [\alpha_p (f_{pm}^{(1)} - f_{pm}^{(2)}) + \beta_m (F_{pm}^{(1)} - F_{pm}^{(2)})] \frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm} z}{\operatorname{sh}\gamma_{pm} l} + \right.$$

$$\left. + [\alpha_p (f_{pm}^{(1)} + f_{pm}^{(2)}) + \beta_m (F_{pm}^{(1)} + F_{pm}^{(2)})] \frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm} z}{\operatorname{ch}\gamma_{pm} l} \right\} \cos\frac{p\pi x}{a} \cos\frac{m\pi y}{b}$$

$$(p, m = 0, 1, 2, \ldots, \gamma_{pm} \neq 0)$$

Здесь $C_{pm}^{(3)}$ и $C_{pm}^{(4)}$ — произвольные постоянные, $F_{pm}^{(i)}$ и $f_{pm}^{(i)}$ — коэффициенты Фурье рядов (2.9).

В полученных выражениях (2.14) выделим частные решения, содержащие только постоянную $C_{pm}^{(3)}$ и осуществим в них круговую перестановку переменных и параметров. В результате получим еще два типа частных решений уравнений Ляме

$$u_{mn}^{(1)} = \frac{C_{mn}^{(1)}}{4(1-\sigma) a\alpha_{mn}^2 \operatorname{sh} a\alpha_{mn}} [(2 - 2\sigma + \alpha_{mn} a \operatorname{cth}\alpha_{mn} a) \operatorname{sh}\alpha_{mn} x -$$

$$- \alpha_{mn} x \operatorname{ch}\alpha_{mn} x] \cos\frac{m\pi y}{b} \cos\frac{n\pi (z-l)}{2l}$$

$$v_{mn}^{(1)} = \frac{\beta_m C_{mn}^{(1)}}{4(1-\sigma) a\alpha_{mn}^3 \operatorname{sh} a\alpha_{mn}} [(1 - 2\sigma - \alpha_{mn} a \operatorname{cth}\alpha_{mn} a) \operatorname{ch}\alpha_{mn} x +$$

$$+ \alpha_{mn} x \operatorname{sh}\alpha_{mn} x] \sin\frac{m\pi y}{b} \cos\frac{n\pi (z-l)}{2l} \qquad (2.15)$$

$$w_{mn}^{(1)} = \frac{\gamma_n C_{mn}^{(1)}}{4(1-\sigma) a\alpha_{mn}^3 \operatorname{sh} a\alpha_{mn}} [(1 - 2\sigma - a\alpha_{mn} \operatorname{cth} a\alpha_{mn}) \operatorname{ch}\alpha_{mn} x +$$

$$+ \alpha_{mn} x \operatorname{sh}\alpha_{mn} x] \cos\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi (z-l)}{2l}$$

$$u_{np}^{(2)} = \frac{\alpha_p C_{np}^{(2)}}{4(1-\sigma) b\beta_{np}^3 \operatorname{sh} b\beta_{np}} [(1 - 2\sigma - b\beta_{np} \operatorname{cth} b\beta_{np}) \operatorname{ch}\beta_{np} y +$$

$$+ \beta_{np} y \operatorname{sh}\beta_{np} y] \sin\frac{p\pi x}{a} \cos\frac{n\pi (z-l)}{2l}$$

$$v_{np}^{(2)} = \frac{C_{np}^{(2)}}{4(1-\sigma) b\beta_{np}^2 \operatorname{sh} b\beta_{np}} [(2 - 2\sigma + b\beta_{np} \operatorname{cth} b\beta_{np}) \operatorname{sh}\beta_{np} y -$$

$$- \beta_{np} y \operatorname{ch}\beta_{np} y] \cos\frac{p\pi x}{a} \cos\frac{n\pi (z-l)}{2l} \qquad (2.16)$$

$$w_{np}^{(2)} = \frac{\gamma_n C_{np}^{(2)}}{4(1-\sigma) b\beta_{np}^3 \operatorname{sh} b\beta_{np}} [(1 - 2\sigma - b\beta_{np} \operatorname{cth} b\beta_{np}) \operatorname{ch}\beta_{np} y +$$

$$+ \beta_{np} y \operatorname{sh}\beta_{np} y] \cos\frac{p\pi x}{a} \sin\frac{n\pi (z-l)}{2l}$$

$$(m, n, p = 0, 1, 2, \ldots, \beta_{np} \neq 0, \alpha_{mn} \neq 0)$$

Здесь $C_{mn}^{(1)}$ и $C_{np}^{(2)}$ — произвольные постоянные.

Ищем решение поставленной задачи в виде двойных рядов

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}C_0^{(1)}x + \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' u_{mn}^{(1)} + \sum_{n,p=0}^{\infty}{}' u_{np}^{(2)} + \sum_{p,m=0}^{\infty}{}' u_{pm}^{(3)} \\
v &= \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}C_0^{(2)}y + \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' v_{mn}^{(1)} + \sum_{n,p=0}^{\infty}{}' v_{np}^{(2)} + \sum_{p,m=0}^{\infty}{}' v_{pm}^{(3)} \\
w &= \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}C_0^{(3)}z + \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' w_{mn}^{(1)} + \sum_{n,p=0}^{\infty}{}' w_{np}^{(2)} + \sum_{p,m=0}^{\infty}{}' w_{pm}^{(3)}
\end{aligned}
\qquad (2.17)
$$

где $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$ и $C_0^{(3)}$ — произвольные постоянные. Штрих над суммами означает, что индексы суммирования одновременно не обращаются в нуль. Ряды (2.17) без указания способа их построения были приведены в [6] при решении смешанной задачи о сжатии прямоугольного параллелепипеда.

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что функции, представленные рядами (2.17), удовлетворяют граничным условиям (2.3), (2.4), (2.6) и (2.8) для касательных напряжений. Неизвестные постоянные $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$, . . ., $C_{pm}^{(4)}$, входящие в ряды (2.17), однозначно определяются из граничных условий (2.1), (2.2), (2.5) и (2.7).

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), (2.2), (2.5) и (2.7), получим четыре равенства

$$
\frac{\sigma G}{2(1-\sigma)}\left[C_0^{(1)} + C_0^{(2)} + C_0^{(3)}\frac{1-\sigma}{\sigma}\right] + \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' \Phi_5(x, m, n)\cos\frac{m\pi y}{b} +
$$

$$
+ \sum_{n,p=0}^{\infty}{}' \Phi_6(y, n, p)\cos\frac{p\pi x}{a} + \sum_{p,m=0}^{\infty}{}' \left\{\frac{G}{2(1-\sigma)}\left[L_{pm}^{(3)}\frac{C_{pm}^{(3)}}{\gamma_{pm}l} + R_{pm}^{(4)}\frac{C_{pm}^{(4)}}{l\gamma_{pm}}\right] +\right.
$$

$$
\left. + \omega_{pm}^{(1)}\right\}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b} = \sum_{p,m=0}^{\infty} \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(1)}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}
$$

$$
\frac{\sigma G}{2(1-\sigma)}\left[C_0^{(1)} + C_0^{(2)} + \frac{1-\sigma}{\sigma}C_0^{(3)}\right] + \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' (-1)^n\Phi_5(x, m, n)\cos\frac{m\pi y}{b} +
$$

$$
+ \sum_{n,p=0}^{\infty}{}' (-1)^n\Phi_6(y, n, p)\cos\frac{p\pi x}{a} + \sum_{p,m=0}^{\infty}{}' \left\{\frac{G}{2(1-\sigma)l\gamma_{pm}}[L_{pm}^{(3)}C_{pm}^{(3)} -\right.
$$

$$
\left. - R_{pm}^{(4)}C_{pm}^{(4)}] + \omega_{pm}^{(2)}\right\}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b} = \sum_{p,m=0}^{\infty} \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(2)}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b} \qquad (2.18)
$$

$$
\frac{\sigma G}{2(1-\sigma)}\left[\frac{1-\sigma}{\sigma}C_0^{(1)} + C_0^{(2)} + C_0^{(3)}\right] + \frac{G}{2(1-\sigma)}\sum_{m,n=0}^{\infty}{}' \frac{C_{mn}^{(1)}L_{mn}^{(1)}}{a\alpha_{mn}}\cos\frac{m\pi y}{b} \times
$$

$$
\times \cos\frac{n\pi(z-l)}{2l} + \sum_{n,p=0}^{\infty}{}' \Phi_1(y, n, p)\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l} +
$$

$$
+ \sum_{p,m=0}^{\infty}{}' \Phi_2(z, p, m)\cos\frac{m\pi y}{b} = -\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}q_{mn}\cos\frac{m\pi y}{b}\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l}
$$

$$\frac{\sigma G}{2(1-\sigma)}\left[C_0^{(1)}+\frac{1-\sigma}{\sigma}C_0^{(2)}+C_0^{(3)}\right]+\frac{G}{2(1-\sigma)}\sum_{n,\,p=0}^{\infty}{}' \frac{C_{np}^{(2)}L_{np}^{(2)}}{b\beta_{np}}\cos\frac{p\pi x}{a}\times$$
$$\times\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l}+\sum_{m,\,n=0}^{\infty}{}'\Phi_3(x,m,n)\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l}+$$
$$+\sum_{p,\,m=0}^{\infty}{}'\Phi_4(z,p,m)\cos\frac{p\pi x}{a}=-\sum_{p,\,n=0}^{\infty}\lambda_{np}\varphi_{np}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{n\pi(z-l)}{2l}$$

при этом введены обозначения

$$L_{mn}^{(1)}=\operatorname{cth}a\alpha_{mn}+\frac{\alpha_{mn}a}{\operatorname{sh}^2\alpha_{mn}a},\qquad L_{np}^{(2)}=\operatorname{cth}\beta_{np}b+\frac{\beta_{np}b}{\operatorname{sh}^2\beta_{np}b}\tag{2.19}$$
$$L_{pm}^{(3)}=\operatorname{cth}\gamma_{pm}l+\frac{\gamma_{pm}l}{\operatorname{sh}^2\gamma_{pm}l},\qquad R_{pm}^{(4)}=1-\frac{2\gamma_{pm}l}{\operatorname{sh}2\gamma_{pm}l}$$

$$\omega_{pm}^{(1)}=-\frac{\lambda_{pm}}{2\gamma_{pm}}\{[\alpha_p(f_{pm}^{(1)}-f_{pm}^{(2)})+\beta_m(F_{pm}^{(1)}-F_{pm}^{(2)})]\operatorname{cth}\gamma_{pm}l+$$
$$+[\alpha_p(f_{pm}^{(1)}+f_{pm}^{(2)})+\beta_m(F_{pm}^{(1)}+F_{pm}^{(2)})\operatorname{th}\gamma_{pm}l]\}\tag{2.20}$$

$$\omega_{pm}^{(2)}=-\frac{\lambda_{pm}}{2\gamma_{pm}}\{[\alpha_p(f_{pm}^{(1)}-f_{pm}^{(2)})+\beta_m(F_{pm}^{(1)}-F_{pm}^{(2)})]\operatorname{cth}\gamma_{pm}l-$$
$$-[\alpha_p(f_{pm}^{(1)}+f_{pm}^{(2)})+\beta_m(F_{pm}^{(1)}+F_{pm}^{(2)})]\operatorname{th}\gamma_{pm}l\}$$

$$\Phi_1(y,n,p)=\frac{G(-1)^pC_{np}^{(2)}}{2(1-\sigma)b\beta_{np}^3\operatorname{sh}b\beta_{np}}\{[(1-2\sigma)\alpha_p^2+2\sigma\beta_{np}^2-$$
$$-\alpha_p^2b\beta_{np}\operatorname{cth}b\beta_{np}]\operatorname{ch}\beta_{np}y+\alpha_p^2\beta_{np}y\operatorname{sh}\beta_{np}y\}$$

$$\Phi_2(z,p,m)=\frac{G(-1)^pC_{pm}^{(3)}}{2(1-\sigma)l\gamma_{pm}^3\operatorname{sh}\gamma_{pm}l}\{[(1-2\sigma)\alpha_p^2+2\sigma\gamma_{pm}^2-$$
$$-\alpha_p^2\gamma_{pm}l\operatorname{cth}\gamma_{pm}l]\operatorname{ch}\gamma_{pm}z+\alpha_p^2\gamma_{pm}z\operatorname{sh}\gamma_{pm}z\}+$$
$$+\frac{G(-1)^pC_{pm}^{(4)}}{2(1-\sigma)l\gamma_{pm}^3\operatorname{sh}\gamma_{pm}l}\{[(1-2\sigma)\alpha_p^2+2\sigma\gamma_{pm}^2-\tag{2.21}$$
$$-\alpha_p^2l\gamma_{pm}\operatorname{th}\gamma_{pm}l]\operatorname{sh}\gamma_{pm}z+\alpha_p^2\gamma_{pm}z\operatorname{ch}\gamma_{pm}z\}+$$
$$+\frac{(-1)^p\lambda_{pm}}{2\gamma_{pm}^3}\{[\alpha_p(2\gamma_{pm}^2-\alpha_p^2)(f_{pm}^{(1)}-f_{pm}^{(2)})-\beta_m\alpha_p^2(F_{pm}^{(1)}-F_{pm}^{(2)})]\frac{\operatorname{ch}\gamma_{pm}z}{\operatorname{sh}\gamma_{pm}l}+$$
$$+[\alpha_p(2\gamma_{pm}^2-\alpha_p^2)(f_{pm}^{(1)}+f_{pm}^{(2)})-\beta_m\alpha_p^2(F_{pm}^{(1)}+F_{pm}^{(2)})]\frac{\operatorname{sh}\gamma_{pm}z}{\operatorname{ch}\gamma_{pm}l}\right\}$$

$$\Phi_3(x,m,n)=\frac{G(-1)^mC_{mn}^{(1)}}{2(1-\sigma)a\alpha_{mn}^3\operatorname{sh}a\alpha_{mn}}\{\beta_m^2\alpha_{mn}x\operatorname{sh}\alpha_{mn}x+$$
$$+[(1-2\sigma)\beta_m^2+2\sigma\alpha_{mn}^2-\beta_m^2a\alpha_{mn}\operatorname{cth}a\alpha_{mn}]\operatorname{ch}\alpha_{mn}x\}$$

$$\Phi_4(z,p,m)=\frac{G(-1)^m}{2(1-\sigma)l\gamma_{pm}^3\operatorname{sh}\gamma_{pm}l}\{C_{pm}^{(3)}[(2\sigma\gamma_{pm}^2+(1-2\sigma)\beta_m^2-$$
$$-\beta_m^2\gamma_{pm}l\operatorname{cth}\gamma_{pm}l)\operatorname{ch}\gamma_{pm}z+\beta_m^2\gamma_{pm}z\operatorname{sh}\gamma_{pm}z]+$$

$$+C_{pm}^{(4)}\left[(2\sigma\gamma_{pm}^2+(1-2\sigma)\beta_m^2-\beta_m^2\gamma_{pm}l\,\mathrm{th}\,\gamma_{pm}l)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}z+\beta_m^2\gamma_{pm}z\,\mathrm{ch}\,\gamma_{pm}z\right]\}+$$

$$+\frac{(-1)^m\beta_m\lambda_{pm}}{2\gamma_{pm}^3}\left\{\left[(2\gamma_{pm}^2-\beta_m^2)(F_{pm}^{(1)}-F_{pm}^{(2)})-\beta_m\alpha_p(f_{pm}^{(1)}-f_{pm}^{(2)})\right]\frac{\mathrm{ch}\,\gamma_{pm}z}{\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}l}+\right.$$

$$\left.+\left[(2\gamma_{pm}^2-\beta_m^2)(F_{pm}^{(1)}+F_{pm}^{(2)})-\alpha_p\beta_m(f_{pm}^{(1)}+f_{pm}^{(2)})\right]\frac{\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}z}{\mathrm{ch}\,\gamma_{pm}l}\right\}$$

$$\Phi_5(x,m,n)=\frac{GC_{mn}^{(1)}}{2(1-\sigma)\,a\alpha_{mn}^3\,\mathrm{sh}\,a\alpha_{mn}}\{\gamma_n^2\alpha_{mn}x\,\mathrm{sh}\,\alpha_{mn}x+$$

$$+\left[(1-2\sigma)\gamma_n^2+2\sigma\alpha_{mn}^2-\gamma_n^2a\alpha_{mn}\,\mathrm{cth}\,\alpha_{mn}a\right]\mathrm{ch}\,\alpha_{mn}x\}$$

$$\Phi_6(y,n,p)=\frac{GC_{np}^{(2)}}{2(1-\sigma)\,b\beta_{np}^3\,\mathrm{sh}\,b\beta_{np}}\{\gamma_n^2\beta_{np}y\,\mathrm{sh}\,\beta_{np}y+$$

$$+\left[(1-2\sigma)\gamma_n^2+2\sigma\beta_{np}^2-\gamma_n^2b\beta_{np}\,\mathrm{cth}\,b\beta_{np}\right]\mathrm{ch}\,\beta_{np}y\}$$

Чтобы определить значения неизвестных постоянных $C_0^{(1)},\ldots,C_{pm}^{(4)}$, нужно приравнять коэффициенты Фурье функций, стоящих в левых и правых частях равенств (2.18). Для этого разложим функции (2.21) в соответствующие ряды Фурье и подставим их выражения в равенства (2.18). Затем приравнивая коэффициенты Фурье при нулевых значениях обоих индексов, получим три уравнения для определения постоянных $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$ и $C_0^{(3)}$

$$C_0^{(1)}+C_0^{(2)}+\frac{1-\sigma}{\sigma}C_0^{(3)}=\frac{(1-\sigma)\psi_{00}^{(1)}}{2\sigma G}$$

$$\frac{1-\sigma}{\sigma}C_0^{(1)}+C_0^{(2)}+C_0^{(3)}=\frac{1-\sigma}{\sigma G}\left[-\frac{q_{00}}{2}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{a(-1)^s(f_{s0}^{(1)}-f_{s0}^{(2)})}{2\pi ls}\right]$$

$$C_0^{(1)}+\frac{1-\sigma}{\sigma}C_0^{(2)}+C_0^{(3)}=\frac{1-\sigma}{\sigma G}\left[-\frac{\varphi_{00}}{2}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b(-1)^s(F_{0s}^{(1)}-F_{0s}^{(2)})}{2\pi ls}\right] \qquad (2.22)$$

причем из первых двух равенств (2.18), в силу (2.11), получается одно первое уравнение (2.22). Приравнивая в (2.18) коэффициенты Фурье при значениях индексов, одновременно не равных нулю, получим четыре соотношения, которые после некоторых преобразований принимают вид

$$A_{mn}^{(1)}=-\sum_{p=0}^{\infty}H_{mnp}^{(11)}A_{np}^{(2)}-$$

$$-\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}H_{nsm}^{(12)}\{[1+(-1)^n]A_{sm}^{(3)}+[1-(-1)^n]A_{sm}^{(4)}\}+b_{mn}^{(1)} \qquad (2.23)$$

$(m,n=0,1,\ldots;\ m\neq 0$ и $p\neq 0$ при $n=0;\ s\neq 0$ и $n\neq 0$ при $m=0)$

$$A_{np}^{(2)}=-\sum_{m=0}^{\infty}H_{pmn}^{(21)}A_{mn}^{(1)}-$$

$$-\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}H_{nps}^{(22)}\{[1+(-1)^n]A_{ps}^{(3)}+[1-(-1)^n]A_{ps}^{(4)}\}+b_{np}^{(2)} \qquad (2.24)$$

$(n,p=0,1,2,\ldots;\ p\neq 0$ и $m\neq 0$ при $n=0;\ s\neq 0$ и $n\neq 0$ при $p=0)$

$$A_{pm}^{(3)} = -\sum_{n=0,\,2,\,\ldots}^{\infty} H_{pmn}^{(31)} A_{mn}^{(1)} - \sum_{s=0,\,2,\,\ldots}^{\infty} H_{msp}^{(32)} A_{sp}^{(2)} + b_{pm}^{(3)} \tag{2.25}$$

$(p,\ m = 0,\ 1,\ 2, \ldots;\ s \neq 0$ и $m \neq 0$ при $p = 0$; $p \neq 0$ и $n \neq 0$ при $m = 0)$

$$A_{pm}^{(4)} = \sum_{n=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} H_{pmn}^{(41)} A_{mn}^{(1)} + \sum_{s=1,\,3,\,\ldots}^{\infty} H_{msp}^{(42)} A_{sp}^{(2)} + b_{pm}^{(4)} \tag{2.26}$$

$(p,\ m = 0,\ 1,\ 2, \ldots;\ p \neq 0$ при $m = 0$; $m \neq 0$ при $p = 0)$

где

$$H_{mnp}^{(11)} = \frac{4\lambda_m g(\alpha_p, \beta_m, \gamma_n)}{aL_{mn}^{(1)}\beta_{np}}, \quad H_{nsm}^{(12)} = \frac{4\lambda_n g(\gamma_n, \alpha_s, \beta_m)}{aL_{mn}^{(1)}\gamma_{sm}}$$

$$H_{pmn}^{(21)} = \frac{4\lambda_p g(\alpha_p, \beta_m, \gamma_n)}{bL_{np}^{(2)}\alpha_{mn}}, \quad H_{nps}^{(22)} = \frac{4\lambda_n g(\beta_s, \gamma_n, \alpha_p)}{bL_{np}^{(2)}\gamma_{ps}}$$

$$H_{pmn}^{(31)} = \frac{4\lambda_p g(\gamma_n, \alpha_p, \beta_m)}{lL_{pm}^{(3)}\alpha_{mn}}, \quad H_{msp}^{(32)} = \frac{4\lambda_m g(\beta_m, \gamma_s, \alpha_p)}{4L_{pm}^{(3)}\beta_{sp}} \tag{2.27}$$

$$H_{pmn}^{(41)} = \frac{4\lambda_p g(\gamma_n, \alpha_p, \beta_m)}{lL_{pm}^{(4)}\alpha_{mn}}, \quad H_{msp}^{(42)} = \frac{4\lambda_m g(\beta_m, \gamma_s, \alpha_p)}{lL_{pm}^{(4)}\beta_{sp}}$$

$$g(\alpha_p, \beta_m, \gamma_n) = \frac{\alpha_p^2 \beta_m^2}{(\alpha_p^2 + \beta_m^2 + \gamma_n^2)^2} + \frac{\sigma\gamma_n^2}{\alpha_p^2 + \beta_m^2 + \gamma_n^2} \tag{2.28}$$

$$L_{pm}^{(4)} = R_{pm}^{(4)} \operatorname{th}\gamma_{mp} l = \operatorname{th}\gamma_{pm} l - \frac{\gamma_{pm} l}{\operatorname{ch}^2 \gamma_{pm} l}, \qquad L_{pm}^{(4)} > 0$$

$$b_{mn}^{(1)} = \frac{l(-1)^m(-1)^n}{a^2\alpha_{mn}} \xi_{mn}^{(1)}, \qquad b_{np}^{(2)} = \frac{l(-1)^n(-1)^p}{b^2\beta_{np}} \xi_{np}^{(2)} \tag{2.29}$$

$$b_{pm}^{(3)} = \frac{(-1)^p(-1)^m}{\gamma_{pm} l} \xi_{pm}^{(3)}, \quad b_{pm}^{(4)} = \frac{(-1)^p(-1)^m}{\gamma_{pm} l \operatorname{th}\gamma_{pm} l} \xi_{pm}^{(4)} \tag{2.30}$$

$$\xi_{mn}^{(1)} = -\frac{a\alpha_{mn}}{L_{mn}^{(1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n \eta_n^{(1)}(s, m) - \frac{2(1-\sigma)a}{GL_{mn}^{(1)}} \lambda_{mn}\alpha_{mn} q_{mn} \qquad (s \neq 0 \text{ при } m = 0)$$

$$\xi_{np}^{(2)} = -\frac{b\beta_{np}}{L_{np}^{(2)}} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_n \eta_n^{(2)}(p, s) - \frac{2(1-\sigma)b}{GL_{np}^{(2)}} \lambda_{np}\beta_{np}\varphi_{np} \qquad (s \neq 0 \text{ при } p = 0)$$

$$\xi_{pm}^{(3)} = \frac{(1-\sigma)\gamma_{pm} l}{GL_{pm}^{(3)}} \left[-\omega_{pm}^{(1)} - \omega_{pm}^{(2)} + \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(1)} + \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(2)}\right]$$

$$\xi_{pm}^{(4)} = \frac{(1-\sigma)\gamma_{pm} l}{GR_{pm}^{(4)}} \left[\omega_{pm}^{(2)} - \omega_{pm}^{(1)} + \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(1)} - \lambda_{pm}\psi_{pm}^{(2)}\right]$$

$$\eta_n^{(1)}(s, m) = \frac{2(1-\sigma)(-1)^s \lambda_{sm}\alpha_s}{Gl\gamma_{sm}^2(\gamma_n^2 + \gamma_{sm}^2)} \{(2\gamma_{sm}^2 - \alpha_s^2)\,[f_{sm}^{(1)} - (-1)^n f_{sm}^{(2)}] - \beta_m\alpha_s\,[F_{sm}^{(1)} - (-1)^n F_{sm}^{(2)}]\}$$

$$\eta_n^{(2)}(p, s) = \frac{2(1-\sigma)(-1)^s \lambda_{ps}\beta_s}{Gl\gamma_{ps}^2(\gamma_n^2 + \gamma_{ps}^2)} \{(2\gamma_{ps}^2 - \beta_s^2)\,[F_{ps}^{(1)} - (-1)^n F_{ps}^{(2)}] - \beta_s\alpha_p\,[f_{ps}^{(1)} - (-1)^n f_{ps}^{(2)}]\}$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 1/2, & \text{при } i = 0 \\ 1 & \text{при } i = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.31}$$

при этом вместо неизвестных постоянных $C_{mn}^{(1)}, \ldots, C_{pm}^{(4)}$ введены новые постоянные $A_{mn}^{(1)}, \ldots, A_{pm}^{(4)}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&C_{mn}^{(1)} = \frac{a^2}{l}(-1)^m(-1)^n\alpha_{mn}A_{mn}^{(1)}, \qquad C_{np}^{(2)} = \frac{b^2}{l}(-1)^n(-1)^p\beta_{np}A_{np}^{(2)} \\
&C_{pm}^{(3)} = l(-1)^p(-1)^m\gamma_{pm}A_{pm}^{(3)}, \quad C_{pm}^{(4)} = l(-1)^p(-1)^m\gamma_{pm}A_{pm}^{(4)}\,\mathrm{th}\,\gamma_{pm}l
\end{aligned}
\qquad (2.32)
$$

функции $g(\beta_m, \gamma_n, \alpha_p)$, $g(\gamma_n, \alpha_p, \beta_m)$ получаются из функции $g(\alpha_p, \beta_m, \gamma_n)$ круговой перестановкой аргументов.

Таким образом, удовлетворены все граничные условия поставленной задачи, и ее решение представлено рядами (2.17). Постоянные $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$ и $C_0^{(3)}$, входящие в ряды (2.17), определяются из уравнений (2.22), а постоянные $C_{mn}^{(1)}, \ldots, C_{pm}^{(4)}$ выражаются через новые постоянные $A_{mn}^{(1)}, \ldots$ $\ldots, A_{pm}^{(4)}$ при помощи формул (2.32). Для нахождения последних получены бесконечные системы (2.23)—(2.26) линейных алгебраических уравнений.

§ 3. Легко видеть, что, применяя формулу прямоугольников, получим

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma^3}{(\gamma^2+p^2)(\gamma^2+\beta^2+p^2)} < \gamma^3\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(\gamma^2+x^2)(\gamma^2+\beta^2+x^2)} \qquad (\gamma > 0)$$

или, вычислив интеграл

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma^3}{(\gamma^2+p^2)(\gamma^2+\beta^2+p^2)} < \frac{\pi}{2}\frac{\gamma^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,(\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\gamma)} \qquad (\gamma > 0) \qquad (3.1)$$

Аналогично получаются неравенства

$$\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\gamma^3}{(\gamma^2+p^2)(\gamma^2+\beta^2+p^2)} < \frac{\pi}{4}\frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2+\beta^2}\,(\sqrt{\gamma^2+\beta^2}+\gamma)} \qquad (\gamma > 0) \qquad (3.2)$$

$$\sum_{p=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\gamma^3}{(\gamma^2+p^2)(\gamma^2+\beta^2+p^2)} < \frac{\pi}{4}\frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2+\beta^2}\,(\sqrt{\gamma^2+\beta^2}+\gamma)} \qquad (\gamma > 0) \qquad (3.3)$$

Далее оценим сверху сумму ряда

$$J_1 = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma^2 p}{(\gamma^2+p^2)^2} \qquad (3.4)$$

Его производящая функция

$$f(x) = \frac{x}{(\gamma^2+x^2)^2}$$

при $x > 0$ имеет один экстремум-максимум в точке $x_1 = \gamma/\sqrt{3}$ и один перегиб в точке $x_2 = \gamma$. График этой функции при $0 \leqslant x \leqslant \gamma$ является выпуклой кривой. В промежутке $\gamma \leqslant x < +\infty$ функция монотонно убывает. Обозначим целую часть числа γ через $h = [\gamma]$. При оценке сверху суммы ряда (3.4) применяются формула трапеций на выпуклой части графика $f(x)$ и формула прямоугольников на остальной его части. При этом логически представляются три возможности: (1) $x_1 \leqslant h \leqslant \gamma$; (2) $h < x_1 < \gamma$, но $f(h) \geqslant f(h+1)$; (3) $h < x_1 < \gamma$, но $f(h) < f(h+1)$. Нетрудно показать, что во всех трех случаях справедливо неравенство

$$J_1 < \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2+1)} + \frac{\gamma^2}{2}f(x_1) + \gamma^2\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$$

Подставляя значение $f(x_1)$ и вычисляя интеграл, получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma^2 p}{(\gamma^2+p^2)^2} < \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{32\gamma} - \frac{1}{2(\gamma^2+1)^2} \qquad (\gamma>0) \tag{3.5}$$

Аналогично устанавливаются неравенства

$$\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\gamma^2 p}{(\gamma^2+p^2)^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4(\gamma^2+1)} + \frac{3\sqrt{3}}{32\gamma} - \frac{1}{2(\gamma^2+1)^2} \qquad (\gamma>0) \tag{3.6}$$

$$\sum_{p=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\gamma^2 p}{(\gamma^2+p^2)^2} < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{32\gamma} - \frac{1}{4(\gamma^2+1)^2} \qquad (\gamma>0) \tag{3.7}$$

Несколько другие оценки для левых частей (3.5), (3.6) даны в [12].

§ 4. Переходя к исследованию бесконечных систем, оценим сверху сумму модулей коэффициентов бесконечной системы (2.23), обозначив ее через $T_{mn}^{(1)}$. Видно, что

$$T_{mn}^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} H_{mnp}^{(11)} + \sum_{s=0}^{\infty} H_{nsm}^{(12)} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

Случаи, когда m или n обращаются в нуль, записываем отдельно

$$T_{0n}^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} H_{0np}^{(11)} + \sum_{s=1}^{\infty} H_{ns0}^{(12)}, \quad T_{m0}^{(1)} = \sum_{p=1}^{\infty} H_{m0p}^{(11)} + \sum_{s=0}^{\infty} H_{0sm}^{(12)} \quad (m, n = 1, 2 \ldots) \tag{4.2}$$

Подставляя (2.27), (2.28), (2.31) в (4.1) и выделяя члены с нулевыми индексами, получим

$$T_{mn}^{(1)} = t_{mn}^{(11)} + t_{mn}^{(12)} + r_{mn}^{(12)} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

Здесь

$$t_{mn}^{(11)} = \frac{4}{aL_{mn}^{(1)}} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 \alpha_p^2}{\beta_{np}(\alpha_{mn}^2+\alpha_p^2)^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 \alpha_s^2}{\gamma_{sm}(\alpha_{mn}^2+\alpha_s^2)^2} \right\}$$

$$t_{mn}^{(12)} = \frac{4\sigma}{aL_{mn}^{(1)}} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 \beta_{np}}{\beta_{np}^2(\alpha_{mn}^2+\alpha_p^2)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 \gamma_{sm}}{\gamma_{sm}^2(\alpha_{mn}^2+\alpha_s^2)} \right\}$$

$$r_{mn}^{(12)} = \frac{4\sigma(\gamma_n+\beta_m)}{aL_{mn}^{(1)}\alpha_{mn}^2}$$

Используя неравенства

$$\beta_{np} \geqslant \alpha_p, \quad \gamma_{sm} \geqslant \alpha_s, \quad L_{mn}^{(1)} > \operatorname{cth} \alpha_{mn} a > 1, \quad \gamma_n < \beta_{np} \tag{4.4}$$

и выражения (2.13), оцениваем $t_{mn}^{(11)}$

$$t_{mn}^{(11)} < \frac{4}{a} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2 \alpha_p}{(\alpha_{mn}^2+\alpha_p^2)^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 \alpha_s}{(\alpha_{mn}^2+\alpha_s^2)^2} \right\} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{mn} a/\pi)^2 p}{[(\alpha_{mn} a/\pi)^2+p^2]^2}$$

или, в силу (3.5),

$$t_{mn}^{(11)} < \frac{2}{\pi} + r_{mn}^{(13)}, \qquad r_{mn}^{(13)} = \frac{3\sqrt{3}}{8a\alpha_{mn}} - \frac{2}{\pi[(\alpha_{mn} a/\pi)^2+1]^2} \tag{4.5}$$

Далее, используя неравенства

$$\frac{\gamma_n\beta_{np}}{\beta_{np}^2} \leqslant \frac{\gamma_n^2+\beta_{np}^2}{2\beta_{np}^2}, \qquad \frac{\beta_m\gamma_{sm}}{\gamma_{sm}^2} \leqslant \frac{\beta_m^2+\gamma_{sm}^2}{2\gamma_{sm}^2} \tag{4.6}$$

выражения (2.13), неравенство (3.1) и тождество

$$\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+p^2} = \operatorname{cth}\pi x - \frac{1}{\pi x} \tag{4.7}$$

оцениваем $t_{mn}^{(12)}$

$$t_{mn}^{(12)} \leqslant \frac{2\sigma}{aL_{mn}^{(1)}}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma_n(\gamma_n^2+\beta_{np}^2)}{\beta_{np}^2(\alpha_{mn}^2+\alpha_p^2)} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_m(\beta_m^2+\gamma_{pm}^2)}{\gamma_{pm}^2(\alpha_{mn}^2+\alpha_p^2)}\right\} =$$

$$= \frac{2\sigma}{\pi L_{mn}^{(1)}}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{(\gamma_n a/\pi)^3}{[(\gamma_n a/\pi)^2+p^2]\,[(\alpha_{mn}a/\pi)^2+p^2]} + \frac{\gamma_n a/\pi}{(\alpha_{mn}a/\pi)^2+p^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\beta_m a/\pi)^3}{[(\beta_m a/\pi)^2+p^2]\,[(\alpha_{mn}a/\pi)^2+p^2]} + \frac{\beta_{mn}a/\pi}{(\alpha_{mn}a/\pi)^2+p^2}\right\} =$$

$$= \frac{\sigma}{L_{mn}^{(1)}}\left\{\frac{1}{\alpha_{mn}}\left[\frac{\gamma_n^2}{\alpha_{mn}+\gamma_n} + \frac{\beta_m^2}{\alpha_{mn}+\beta_m}\right] + \frac{\gamma_n+\beta_m}{\alpha_{mn}}\operatorname{cth}\alpha_{mn}a - \frac{\gamma_n+\beta_m}{a\alpha_{mn}^2}\right\}$$

Легко установить неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}+x} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+y}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{2} \qquad \begin{pmatrix} x>0 \\ y>0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$t_{mn}^{(12)} < \frac{\sigma}{L_{mn}^{(1)}}\left\{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2}\operatorname{cth}\alpha_{mn}a - \frac{\gamma_n+\beta_m}{a\alpha_{mn}^2}\right\}$$

или, в силу (4.4),

$$t_{mn}^{(12)} < 2\sigma + r_{mn}^{(14)}, \qquad r_{mn}^{(14)} = -\frac{\sigma(\gamma_n+\beta_m)}{L_{mn}^{(1)}a\alpha_{mn}^2} \tag{4.8}$$

Из (4.3), (4.5) и (4.8) следует неравенство (4.9)

$$T_{mn}^{(1)} < 2\sigma + \frac{2}{\pi} + r_{mn}^{(11)} \quad (m, n = 1, 2, \ldots), \qquad r_{mn}^{(11)} = r_{mn}^{(12)} + r_{mn}^{(13)} + r_{mn}^{(14)}$$

Далее, подставляя (2.27), (2.28), (2.31) в (4.2) и последовательно используя неравенства (4.4), выражения (2.13), (4.7), неравенство (3.5), оцениваем $T_{0n}^{(1)}$

$$T_{0n}^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{2\sigma\gamma_n^2}{aL_{0n}^{(1)}\beta_{np}^3} + \frac{4}{aL_{0n}^{(1)}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\gamma_n^2\alpha_s}{(\gamma_n^2+\alpha_s^2)^2} < \frac{2\sigma}{a\gamma_n L_{0n}^{(1)}} +$$

$$+ \frac{2\sigma}{aL_{0n}^{(1)}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\gamma_n^2+\alpha_p^2} + \frac{4}{a}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\gamma_n^2\alpha_s}{(\gamma_n^2+\alpha_s^2)^2} = \frac{2\sigma}{a\gamma_n L_{0n}^{(1)}} +$$

$$+ \frac{2\sigma}{\pi L_{0n}^{(1)}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\gamma_n a/\pi}{(\gamma_n a/\pi)^2+p^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\gamma_n a/\pi)^2 s}{[(\gamma_n a/\pi)^2+s^2]^2} =$$

$$= \frac{2\sigma}{a\gamma_n L_{0n}^{(1)}} + \frac{\sigma}{L_{0n}^{(1)}}\left[\operatorname{cth}\gamma_n a - \frac{1}{\gamma_n a}\right] + \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(\gamma_n a/\pi)^2 s}{[(\gamma_n a/\pi)^2 + s^2]^2} <$$

$$< \frac{\sigma}{a\gamma_n L_{0n}^{(1)}} + \sigma + \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}\pi}{32\gamma_n a}\right]$$

$$T_{0n}^{(1)} < \sigma + \frac{2}{\pi} + r_{0n}^{(11)} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad r_{0n}^{(11)} = \frac{\sigma}{\gamma_n a L_{0n}^{(1)}} + \frac{3\sqrt{3}}{8\gamma_n a} \tag{4.10}$$

Аналогично получаем оценку для $T_{m0}^{(1)}$:

$$T_{m0}^{(1)} < \sigma + \frac{2}{\pi} + r_{m0}^{(11)} \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad r_{m0}^{(11)} = \frac{\sigma}{\beta_m a L_{m0}^{(1)}} + \frac{3\sqrt{3}}{8\beta_m a} \tag{4.11}$$

При всех σ из промежутка $0 < \sigma \leqslant 0.18$ справедливы неравенства

$$2\sigma + \frac{2}{\pi} < 0.9968, \qquad \sigma + \frac{2}{\pi} < 0.9968$$

Поэтому, из неравенств (4.9)—(4.11) получаем общую оценку

$$T_{mn}^{(1)} < 0.9968 + r_{mn}^{(11)} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 < \sigma \leqslant 0.18) \tag{4.12}$$

где $r_{mn}^{(11)}$ определяется формулами (4.9), (4.10) и (4.11). Очевидно,

$$r_{mn}^{(11)} = O\left((m^2 + n^2)^{-1/2}\right)$$

Обозначим суммы модулей коэффициентов бесконечных систем (2.24)—(2.26) соответственно $T_{np}^{(2)}$, $T_{pm}^{(3)}$, $T_{pm}^{(4)}$. Используя неравенства § 3 и выполняя аналогичные действия, получим аналогичные оценки

$$\begin{aligned} &T_{np}^{(2)} < 0.9968 + r_{np}^{(21)} && (n, p = 0, 1, 2, \ldots) \\ &T_{pm}^{(3)} < 0.9968 + r_{pm}^{(31)} && (p, m = 0, 1, 2, \ldots) \quad (0 < \sigma \leqslant 0.18) \\ &T_{pm}^{(4)} < 0.9968 + r_{pm}^{(41)} && (p, m = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$r_{np}^{(21)} = O\left((n^2 + p^2)^{-1/2}\right), \qquad r_{pm}^{(31)} = O\left((p^2 + m^2)^{-1/2}\right), \qquad r_{pm}^{(41)} = O\left((p^2 + m^2)^{-1/2}\right)$$

Оценки (4.12) и (4.13) показывают, что при всех значениях коэффициента Пуассона σ, удовлетворяющих неравенству $0 < \sigma \leqslant 0.18$, бесконечные системы (2.23)—(2.26), по крайней мере, квазивполне регулярны. Свободные члены (2.29), (2.30) бесконечных систем являются ограниченными. Поэтому, если решение соответствующих конечных систем единственно, то существует единственное ограниченное решение рассматриваемых бесконечных систем [13].

Отметим, что для доказательства квазивполне регулярности бесконечных систем при $0 < \sigma \leqslant 0.18$ были использованы очень грубые неравенства (4.4) и (4.6). Это позволяет надеяться, что и при значениях σ, удовлетворяющих неравенству $0.18 < \sigma \leqslant 0.5$, полученные бесконечные системы обладают свойством регулярности.

§ 5. В статье [5] Теодореску рассматривал частный случай решенной выше задачи, когда параллелепипед нагружен лишь одинаково распределенными нормальными усилиями $p(x, y)$ со стороны двух противоположных граней $z = \pm l$. Задача сведена к трем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Запишем одну из них, которая в его статье обозначена номером (4.19)

$$A_{mn} = -\frac{1}{\lambda_{mn} a \zeta_{mn}}\left[\sum_{i=0}^{\infty} h_{imn} B_{ni} + \sum_{i=0}^{\infty} g_{nim} C_{im}\right] \qquad \begin{pmatrix} m, & n = 0, 1, \ldots \\ m \neq 0 & \text{при } n = 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

$$h_{imn} = \frac{4\alpha_i^2\beta_m^2}{(\lambda_{mn}^2 + \alpha_i^2)^2} + \frac{4\nu\gamma_n^2}{\lambda_{mn}^2 + \alpha_i^2}, \qquad g_{nim} = \frac{4\gamma_n^2\alpha_i^2}{(\lambda_{mn}^2 + \alpha_i^2)^2} + \frac{4\nu\beta_m^2}{\lambda_{mn}^2 + \alpha_i^2} \tag{5.2}$$

$$\zeta_{mn} = \operatorname{cth}\lambda_{mn} a + \frac{\lambda_{mn} a}{\operatorname{sh}^2\lambda_{mn} a}, \qquad \lambda_{mn}^2 = \beta_m^2 + \gamma_n^2, \qquad \alpha_i = \frac{i\pi}{a} \tag{5.3}$$

где ν — коэффициент Пуассона. Автор утверждает, что эта система регулярна и имеет единственное ограниченное решение, причем ее исследование может быть проведено при помощи тех же рассуждений, которые содержатся в работе Калиски [14]. Это утверждение является ошибочным. В работе Калиски получены совершенно другие бесконечные системы, и процесс их исследования не имеет отношения к системе (5.1). Покажем, что бесконечная система (5.1), наоборот, не является регулярной. Действительно, вычислим сумму модулей ее коэффициентов

$$T_{mn}=\frac{1}{\lambda_{mn}a\xi_{mn}}\sum_{i=0}^{\infty}[h_{imn}+g_{nim}]=\frac{4}{\lambda_{mn}a\xi_{mn}}\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_{mn}^2(\pi i/a)^2}{[\lambda_{mn}^2+(\pi i/a)^2]^2}+\frac{\nu\lambda_{mn}^2}{\lambda_{mn}^2+(\pi i/a)^2}\right\}=$$

$$=\frac{4\nu}{\lambda_{mn}a\xi_{mn}}+\frac{4}{\pi\xi_{mn}}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{(\lambda_{mn}a/\pi)i^2}{[(\lambda_{mn}a/\pi)^2+i^2]^2}+\frac{\nu\lambda_{mn}a/\pi}{(\lambda_{mn}a/\pi)^2+i^2}\right\}$$

Отсюда, используя тождества

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{xn^2}{(x^2+n^2)^2}=\operatorname{cth}\pi x-\frac{\pi x}{\operatorname{sh}^2\pi x}, \qquad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}=\operatorname{cth}\pi x-\frac{1}{\pi x}$$

и обозначение (5.3), получим

$$T_{mn}=\frac{1}{\xi_{mn}}\left\{\operatorname{cth}\lambda_{mn}a-\frac{\lambda_{mn}a}{\operatorname{sh}^2\lambda_{mn}a}+2\nu\left[\operatorname{cth}\lambda_{mn}a-\frac{1}{\lambda_{mn}a}\right]\right\}+\frac{4\nu}{\lambda_{mn}a\xi_{mn}}=$$

$$=1+2\nu+\frac{2\nu}{\lambda_{mn}a\xi_{mn}}-\frac{2(1+\nu)\lambda_{mn}a}{\xi_{mn}\operatorname{sh}^2\lambda_{mn}a}\quad (m,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

Теперь видно, что бесконечная система (5.1) не является регулярной при всех значениях коэффициента Пуассона $0<\nu\leqslant 0.5$. Точно так же устанавливается нерегулярность двух других бесконечных систем. Отсюда следует, что и утверждения, содержащиеся в [5], о порядке решений бесконечных систем не обоснованы.

Поступила 21 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Lame G. Lecons sur la theorie mathematique de l'elasticite' des corps solides. Paris, 1852, § 66.
2. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, 1951, т. 15, вып. 2.
3. Филоненко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, 1951, т. 15, вып. 5.
4. Мишонов М. Общ метод за решение на пространствената задача на еластичността за паралелепипеда. Изв. Техн. ин-т Бълг. АН, 1960, кн. 9—10, 15—61.
5. Teodorescu P. P. Sur le probleme du parallelepipede elastique. Arch. mech. stosowanej, 1960, vol. 12, No. 5—6, pp. 705—727.
6. Валов Г. М. Задача о сжатии прямоугольного параллелепипеда, на основаниях которого заданы нормальные перемещения и касательные напряжения, а на боковой поверхности — напряжения. Научн. докл. высш. школы, Физ.-матем. науки, 1959, № 2.
7. Валов Г. М. Задача о равновесии прямоугольного параллелепипеда, на основаниях которого заданы нормальные напряжения и касательные перемещения, а на боковой поверхности — напряжения. Научн. докл. высш. школы. Физ.— матем. науки, 1958, № 4.
8. Валов Г. М. Об одной задаче о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями. Вестн. Моск. ун-та, 1959, № 3.
9. Байда Э. Н. Задача об упруго-деформированном состоянии ортотропного и изотропного параллелепипедов. Изв. высш. учебн. завед., строит. и арх., 1959, № 6.
10. Байда Э. Н. Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре. Госстройиздат, 1961.
11. Hata Kin-ichi. Some Remarks on the Three—Dimentional Problems Concerneed with the Isotropic and Anisotropic Elastic solids. Mem. Fac. Eng., Hokkaido Univ., 1956, vol. 10, No. 2, pp. 129—177.
12. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
13. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеоретиздат, 1950, стр. 37—53.
14. Kaliski S. The Dynamical Problem of the rectangular Parallelepiped. Arch. mech. stosowanej, 1958, v. 10.