Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

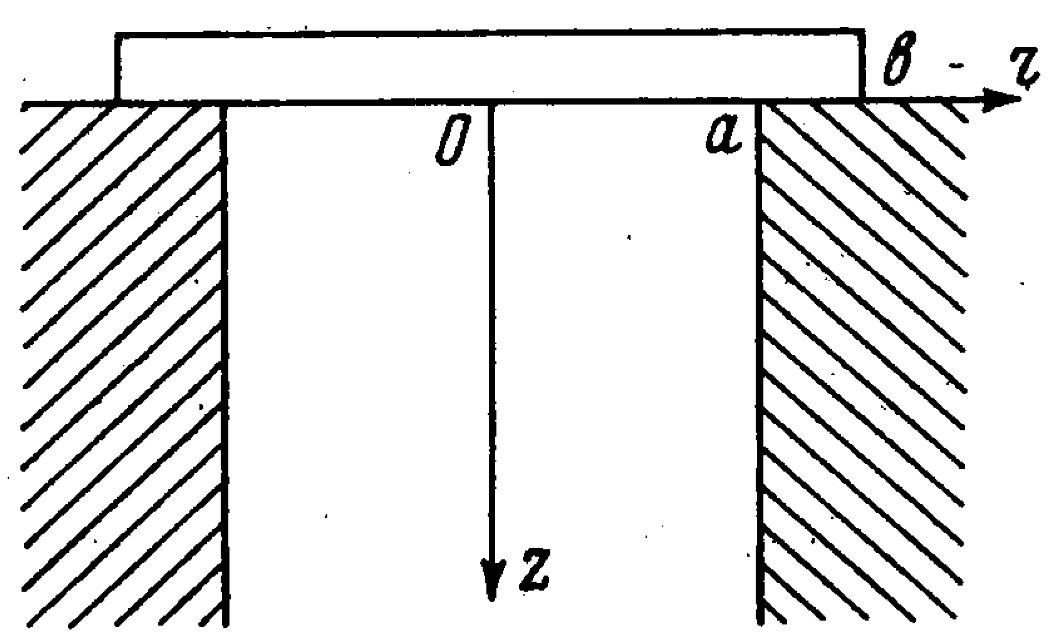
О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян

(Ереван)

В работе приводятся решения двух осесимметричных контактных задач для упругого полупространства с цилиндрическим отверстием и для полупространства из двух материалов, когда поверхность $r = a$ будет поверхностью раздела этих материалов.

§ 1. Рассмотрим первую задачу о кручении упругого полупространства с круглым цилиндрическим отверстием, когда скручивание осуществляется при помощи поворота жесткого круглого штампа радиусом $r = b$, жестко закрепленного к полупространству симметрично относительно отверстия (фиг. 1). На остальных частях поверхности полого полупространства действуют произвольные (абсолютно суммируемые) касательные усилия. Как известно, эта задача сводится к определению функции перемещения $\Phi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет дифференциальному уравнению Митчела



Фиг. 1

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1)$$

и следующим граничным условиям

$$v(r, 0) = f_1(r) = \varkappa r \qquad (1 \leqslant r < b)$$
$$\tau_z(r, 0) = f_2(r) \qquad (b < r < \infty)$$
$$\tau_r(1, z) = f_3(r) \quad (0 \leqslant z < \infty) \qquad (1.2)$$

Здесь $\varkappa$ — угол поворота штампа. Касательные напряжения τ_r, τ_z и перемещение v определяются через функцию перемещения $\Phi(r, z)$ формулами

$$\tau_r = Gr\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \qquad \tau_z = Gr\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad v = r\Phi(r, z) \qquad (1.3)$$

Следуя И. Снеддону [1], решение уравнения (1.1) представим в виде суммы интегралов Фурье

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \frac{\psi(\xi)}{\xi r} e^{-\xi z} J_1(\xi r)\, d\xi + \int_0^\infty \frac{\chi(\xi)}{\xi r} K_1(\xi r) \sin \xi z dz \qquad (1.4)$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода от действительного аргумента, $K_n(x)$ — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента, а $\psi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ — неизвестные функции.

Выразим касательные напряжения и перемещение через эти функции

$$
\begin{aligned}
v(r, z) &= \int_0^\infty \xi^{-1}\psi(\xi) J_1(\xi r) e^{-\xi z} d\xi + \int_0^\infty \xi^{-1}\chi(\xi) K_1(\xi r) \sin \xi z d\xi \\
\tau_z(r, z) &= -G\int_0^\infty \psi(\xi) J_1(\xi r) e^{-\xi z} d\xi + G\int_0^\infty \chi(\xi) K_1(\xi r) \cos \xi z\, d\xi \qquad (1.5)\\
\tau_r(r, z) &= -G\int_0^\infty \psi(\xi) J_2(\xi r) e^{-\xi z} d\xi - G\int_0^\infty \chi(\xi) K_2(\xi r) \sin \xi z d\xi
\end{aligned}
$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2), для определения неизвестных функций $\psi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ получим следующую систему интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \xi^{-1}\psi(\xi) J_1(\xi r) d\xi = f_1(r) \qquad (1 \leqslant r < b)\\
&\int_0^\infty \psi(\xi) J_1(\xi r) d\xi = g(r) \qquad (b < r < \infty) \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^\infty \psi(\xi) J_2(\xi) e^{-\xi z} d\xi + \int_0^\infty \chi(\xi) K_2(\xi) \sin \xi z\, d\xi + \frac{1}{G} f_3(z) = 0 \qquad (0 \leqslant z < \infty) \qquad (1.7)
$$

Здесь

$$
g(r) = \int_0^\infty \chi(\xi) K_1(\xi r) d\xi - \frac{1}{G} f_2(r) \qquad (1.8)
$$

Парные интегральные уравнения типа (1.6), когда $0 \leqslant r < \infty$, были рассмотрены во многих работах [2-3]. Если область изменения r является $1 \leqslant r < \infty$, то для полноты к уравнениям (1.6) добавляется новое уравнение типа (1.7). Подобная система была исследована в работе Р. П. Сривастава [4]. Однако автор рассматривает только случай $f_3(z) = 0$, $f_1(r) = 0$, причем последнее условие играет важную роль при решении уравнений. В нашей задаче случай $f_1(r) = 0$ не представляет интереса, поэтому будем считать $\varkappa \neq 0$.

Пользуясь результатами работ [2,3], решение парных интегральных уравнений (1.6) ищем в виде

$$
\psi(\xi) = \left(\frac{2\xi^3}{\pi}\right)^{1/2}\left[\int_1^b y^{3/2} F_1(y) J_{1/2}(\xi y)\, dy - \int_b^\infty y^{3/2} F_2(y) J_{1/2}(\xi y)\, dy\right] \qquad (1.9)
$$

Функция $F_1(y)$ определяется формулой

$$
F_1(y) = \frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\int_1^y \frac{u^2 f_1(u)\, du}{(y^2-u^2)^{1/2}}
$$

Функция $F_2(y)$ удовлетворяет условию

$$
\lim_{y\to\infty} y F_2(y) = 0 \qquad (1.10)
$$

Выражение (1.9) удовлетворяет первому уравнению (1.6). Для того чтобы оно удовлетворяло второму уравнению (1.6), функция $F_2(y)$, как следует из работы [2,3], должна иметь вид

$$F_2(y)+\int_y^\infty \frac{g(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}=0 \tag{1.11}$$

Подставляя в (1.11) значение $g(r)$ из (1.8), получим

$$yF_2(y)+\pi\int_0^\infty \xi^{-1}\chi(\xi)e^{-\xi y}\,d\xi-\frac{y}{G}\int_y^\infty \frac{f_2(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}=0 \tag{1.12}$$

Теперь из соотношения (1.7) выразим $\chi(\xi)$ через функцию $\psi(\xi)$

$$\frac{\pi}{2}\chi(\xi)K_2(\xi)+\xi\int_0^\infty \frac{\psi(\alpha)J_2(\alpha)}{\alpha^2+\xi^2}\,d\alpha+\frac{1}{G}\int_0^\infty f_3(z)\sin\xi z\,dz=0$$

Подставляя сюда значение функции $\psi(\xi)$ из (1.9), получим

$$\chi(\xi)+\frac{2\xi I_2(\xi)}{\pi K_2(\xi)}\left[\int_b^\infty yF_2(y)e^{-y\xi}\,dy-\int_1^b yF_1(y)e^{-y\xi}\,dy\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi GK_2(\xi)}\int_0^\infty f_3(z)\sin\xi z\,dz=0 \tag{1.13}$$

Здесь $I_n(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента; при этом использовано значение интеграла

$$\int_0^\infty x^{3/2}J_2(ax)J_{1/2}(yx)\frac{dx}{x^2+\xi^2}=-\left(\frac{\pi}{2y}\right)I_2(a\xi)e^{-y\xi}\qquad (y>a)$$

Исключив функцию $\chi(\xi)$ из формул (1.12) и (1.13), для определения функции $f(y)=yF_2(y)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$f(y)+\int_b^\infty K(x+y)f(x)\,dx=F(y)\qquad (b<y<\infty) \tag{1.14}$$

При этом введены следующие обозначения:

$$K(z)=-2\int_0^\infty \frac{I_2(\xi)}{K_2(\xi)}e^{-\xi z}\,d\xi\qquad (z\geqslant 2b>2) \tag{1.15}$$

$$F(y)=\frac{y}{G}\int_y^\infty \frac{f_2(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}+\frac{2}{G}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi y}d\xi}{\xi K_2(\xi)}\int_0^\infty f_3(z)\sin\xi z\,dz-\int_1^b rF_1(r)K(r+y)\,dr \tag{1.16}$$

Здесь $I_2(x)$ и $K_2(x)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго от мнимого аргумента.

Из соотношений (1.14)—(1.16) следует, что условие (1.10) на функцию $F_2(y)$ равносильно условию

$$\lim_{y\to\infty} y\int_y^\infty \frac{f_2(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}=0 \tag{1.17}$$

Это условие будет иметь место, если при $r \to \infty$ функция $f_2(r)$ стремилась бы к нулю, как $r^{-\alpha}$, где $\alpha > 1 + \varepsilon$. Но из условия абсолютной суммируемости внешних касательных усилий следует, что $f_2(r) = O(r^{-2-\varepsilon_1})$, где $\varepsilon_1 > 0$, поэтому условие (1.17) выполняется. При этом свободный член интегрального уравнения $F(y)$ при $y \to \infty$ стремится к нулю, как $y^{-2-\varepsilon_1}$. Если $f_2(r) = 0$ при $b < c < r$, то функция $F(y)$ будет стремиться к нулю экспоненциальным законом. Ядро интегрального уравнения (1.15) при $b > 1$ непрерывная и монотонно убывающая функция.

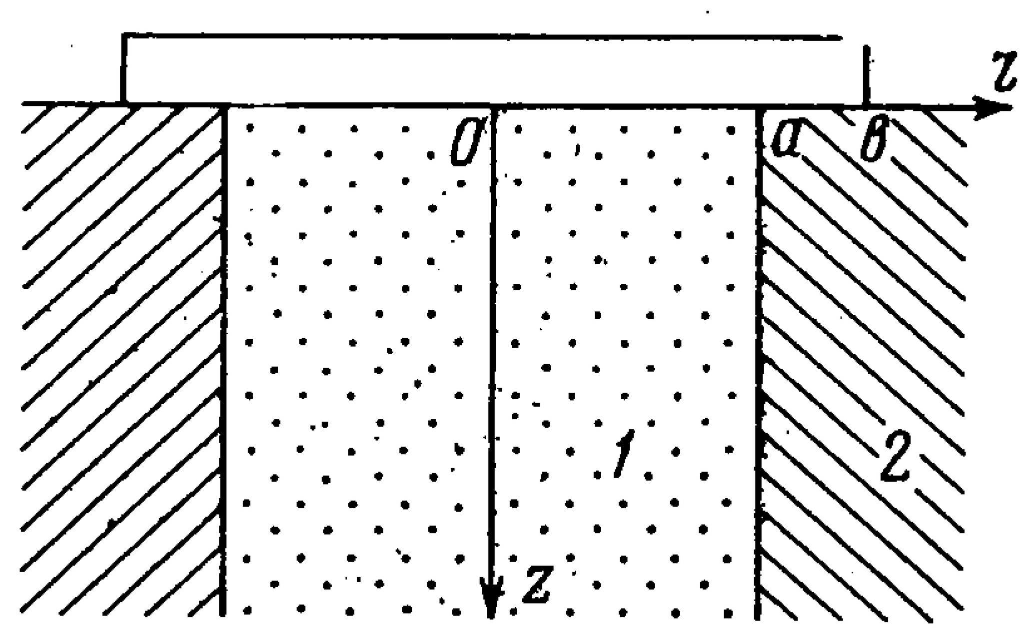
Покажем, что интегральное уравнение (1.14) можно решать методом последовательных приближений. Для этого нужно вычислить интегралы

$$u(b) = \int_b^\infty \int_b^\infty K^2(x+y)\,dx\,dy = \int_0^\infty x K^2(x+2b)\,dx$$

$$-v(b) = \int_b^\infty K(t+b)\,dt = \int_0^\infty K(x+2b)\,dx$$

Приводим некоторые значения этих интегралов, вычисленные на электронно-вычислительной машине «Наири»

$b =$	1.05	1.10	1.20	1.50	2.00
$u(b) =$	0.1368	0.0396	0.0029	0.00003	—
$-v(b) =$	0.4421	0.2234	0.0982	0.0269	0.0050



Фиг. 2

Как видно из этого вывода, интегральное уравнение (1.14) при $b \geqslant 1.05$ успешно можно решать методом последовательных приближений, причем чем больше b, тем быстрее сходится этот процесс.

Вопрос разрешимости интегрального уравнения (1.14) при $1 < b < 1.05$ остается открытым.

При $b = 1$ имеем $u(1) = -v(1) = \infty$. Но в этом случае, как нетрудно заметить, поставленная задача решается точно, без применения интегральных уравнений. Это решение можно получить элементарным путем, если в первом интеграле формулы (1.4) функцию $J_1(\xi r)$ заменить функцией

$$W_1(\xi, r) = J_1(\xi r)\,Y_2(\xi a) - J_2(\xi a)\,Y_1(\xi r)$$

где $Y_n(x)$ — функция Бесселя второго рода от действительного аргумента.

§ 2. Рассмотрим теперь вторую задачу о кручении полупространства, составленного из двух материалов, когда поверхность раздела этих материалов является цилиндрической поверхностью $r = a$. Полупространство скручивается при помощи поворота жесткого круглого штампа радиусом b $(b > a)$, жестко закрепленного с обоими материалами симметрично относительно включения (фиг. 2).

Для этой задачи граничные условия имеют вид

$$v(r, 0) = f_1(r) \quad (0 \leqslant r < b), \qquad \tau_z(r, 0) = f_2(r) \quad (b < r < \infty) \tag{2.1}$$

Функцию перемещения $\Phi(r, z)$ ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \begin{cases} \Phi_1(r, z) & (0 \leqslant r \leqslant a,\ 0 \leqslant z < \infty) \\ \Phi_2(r, z) & (a < r < \infty,\ 0 \leqslant z < \infty) \end{cases} \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что функции $\Phi_i(r, z)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.1), граничным условиям

$$\begin{gathered} v_1(r, 0) = f_1(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant a), \qquad v_2(r, 0) = f_1(r) \quad (a \leqslant r < b) \\ \tau_z^{(2)}(r, 0) = f_2(r) \qquad (b < r < \infty) \end{gathered} \tag{2.3}$$

и условиям сопряжения внутренней и внешней частей полупространства

$$\Phi_1(a, z) = \Phi_2(a, z), \qquad G_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = G_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} \tag{2.4}$$

Здесь напряжения $\tau_r^{(i)}$, $\tau_z^{(i)}$ и перемещение v_i определяются через функцию перемещения $\Phi(r, z)$ формулами (1.3), где G и Φ фигурируют с индексом i $(i = 1;\ 2)$.

Функции Φ_1 и Φ_2 представим в следующем виде:

$$\begin{gathered} \Phi_1(r, z) = \int_0^\infty C(\xi) \frac{I_1(\xi r)}{\xi r} \sin \xi z \, d\xi + \sum_{k=1}^\infty A_k e^{-\mu_k z} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \\ \Phi_2(r, z) = \int_0^\infty D(\xi) \frac{K_1(\xi r)}{\xi r} \sin \xi z d\xi + \int_0^\infty B(\xi) e^{-\xi z} \frac{J_1(\xi r)}{\xi r} d\xi \end{gathered} \tag{2.5}$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu, a) = 0$.

Из первого условия (2.3) для A_k получается значение

$$A_k = \frac{2\mu_k}{a^2 J_0^2(\mu_k a)} \int_0^a r f_1(r) J_1(\mu_k r) \, dr = -\frac{2\varkappa}{J_0(\mu_k a)} \tag{2.6}$$

Для определения функции $B(\xi)$ из последних двух условий (2.3) получаем парные интегральные уравнения

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \xi^{-1} B(\xi) J_1(\xi r) \, d\xi = f_1(r) \quad (a \leqslant r \leqslant b) \\ \int_0^\infty B(\xi) J_1(\xi r) \, d\xi = g(r) \quad (b < r < \infty) \end{gathered} \tag{2.7}$$

правые части которых зависят от неизвестной функции $D(\xi)$

$$g(r) = \int_0^\infty D(\xi) K_1(\xi r) \, d\xi - \frac{1}{G_2} f_2(r) \tag{2.8}$$

а для определения неизвестных функций $C(\xi)$ и $D(\xi)$ из условий (2.4) получается следующая система уравнений:

$$C(\xi) I_1(\xi a) - D(\xi) K_1(\xi a) = \frac{2\xi^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{B(\alpha) J_1(\alpha a)}{\alpha(\alpha^2 + \xi^2)} d\alpha \tag{2.9}$$

$$G_1 C(\xi) I_2(\xi a) + G_2 D(\xi) K_2(\xi a) = \frac{2\xi}{\pi} \left[G_1 \frac{\varkappa a}{\xi} \frac{I_2(\xi a)}{I_1(\xi a)} - G_2 \int_0^\infty \frac{B(\alpha) J_2(\alpha a)}{\alpha^2 + \xi^2} d\alpha \right]$$

Из системы (2.9) имеем (9.10)

$$C(\xi)=\frac{2\xi}{\pi\Delta}\left\{G_1\frac{\varkappa a}{\xi}\frac{K_1(\xi a)I_2(\xi a)}{I_1(\xi a)}+G_2\int\limits_0^\infty\frac{\xi K_2(\xi a)J_1(\alpha a)-\alpha K_1(\xi a)J_2(\alpha a)}{\alpha(\alpha^2+\xi^2)}B(\alpha)\,d\alpha\right\}$$

$$D(\xi)=\frac{2\xi}{\pi\Delta}\left\{G_1\frac{\varkappa a}{\xi}I_2(\xi a)-\int\limits_0^\infty\frac{G_1\xi I_2(\xi a)J_2(\alpha a)+G_2\alpha I_1(\xi a)J_2(\alpha a)}{\alpha(\alpha^2+\xi^2)}B(\alpha)\,d\alpha\right\}$$

Здесь

$$\Delta=G_1K_1(\xi a)I_2(\xi a)+G_2K_2(\xi a)I_1(\xi a) \tag{2.11}$$

Представим теперь решение парных уравнений (2.7) в виде

$$B(\xi)=\left(\frac{2\xi^3}{\pi}\right)^{1/2}\left[\int\limits_a^b y^{3/2}F_1(y)J_{1/2}(\xi y)\,dy-\int\limits_b^\infty y^{3/2}F_2(y)J_{1/2}(\xi y)\,dy\right] \tag{2.12}$$

$$F_1(y)=\frac{1}{y^2}\frac{d}{dy}\int\limits_a^y\frac{u^2f_1(u)\,du}{(r^2-y^2)^{1/2}},\quad F_2(y)+\int\limits_y^\infty\frac{g(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}=0,\quad \lim_{y\to\infty}yF_2(y)=0$$

Подставляя значение $g(r)$ из (2.8) в (2.12), получим

$$yF_2(y)+\pi\int\limits_0^\infty\xi^{-1}D(\xi)e^{-\xi y}\,d\xi-\frac{y}{G_2}\int\limits_y^\infty\frac{f_2(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}=0 \tag{2.13}$$

причем условие (2.13) на функцию $F_2(y)$ принимает вид

$$\lim_{y\to\infty}y\int\limits_y^\infty\frac{f_2(r)\,dr}{(r^2-y^2)^{1/2}}=0 \tag{2.14}$$

Но так как из условия абсолютной суммируемости внешних касательных усилий следует, что $f_2(r)=O(r^{-2-\varepsilon})$, то условие (2.14) удовлетворяется. Вместе с ним удовлетворяется также условие (2.12).

Выразим функции $D(\xi)$ и $C(\xi)$ через функцию $F_2(y)$. Для этого подставим значение $B(\xi)$ из (2.12) в (2.14)

$$D(\xi)=\frac{2\xi(G_1-G_2)}{\pi\Delta}I_1(\xi a)I_2(\xi a)\left[\frac{G_1\varkappa aI_2(\xi a)}{(G_1-G_2)\xi I_1^2(\xi a)}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_a^b yF_1(y)e^{-\xi y}\,dy+\int\limits_b^\infty yF_2(y)e^{-\xi y}\,dy\right] \tag{2.15}$$

$$C(\xi)=\frac{2G_2}{\pi a\Delta}\left[\frac{G_1\varkappa a^2I_2(\xi a)'K_1(\xi a)}{G_2I_1(\xi a)}+\int\limits_a^b yF_1(y)e^{-\xi y}\,dy-\int\limits_b^\infty yF_2(y)e^{-\xi y}\,dy\right]$$

Исключив функцию $D(\xi)$ из соотношений (2.13) и (2.15), для определения неизвестной функции $F_2(y)$ получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$f(y)+\int\limits_b^\infty f(x)K(x+y)\,dx=F(y)\qquad(b\leqslant y<\infty) \tag{2.16}$$

Здесь,

$$f(y) = yF_2(y), \qquad K(z) = 2(G_1 - G_2)\int_0^\infty \frac{I_1(\xi a) I_2(\xi a)}{\Delta(\xi a)} e^{-\xi z}\, d\xi$$

$$F(y) = \int_a^b xF_1(x) K(x+y)\, dx + \frac{y}{G_2}\int_y^\infty \frac{f_2(r)\, dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} - 2G_1\varkappa a \int_0^\infty \frac{I_2(\xi a) e^{-\xi y}}{\xi \Delta(\xi a)}\, d\xi$$

Аналогичным образом, как это сделано в § 1, можно показать возможность применения метода последовательных приближений при решении интегрального уравнения (2.16).

Как частный случай при $G_1 = 0$ получаем решение задачи, рассмотренной в § 1.

В случае $G_1 = G_2$ ядро интегрального уравнения обращается в нуль, и получаем точное решение задачи о кручении упругого однородного полупространства, рассмотренной Н. А. Ростовцевым [5]. Чтобы получить решение в виде [5], нужно положить еще $a = 0$.

Полагая $G_1 = \infty$, получим решение задачи кручения упругого полупространства с жестким включением, когда скручивание осуществляется при помощи поворота жесткого круглого штампа радиусом b, жестко закрепленного к полупространству симметрично относительно включения. Для этого случая ядро интегрального уравнения (2.16) примет вид

$$K(z) = 2\int_0^\infty \frac{I_1(\xi a) e^{-\xi z}}{K_1(\xi a)}\, d\xi \qquad (z \geqslant 2b > 2a) \tag{2.17}$$

а свободный член —

$$F(y) = \int_a^b xF_1(x) K(x+y)\, dx + \frac{y}{G_2}\int_y^\infty \frac{f_2(r)\, dr}{(r^2 - y^2)^{1/2}} - 2\varkappa a \int_0^\infty \frac{e^{-\xi y} d\xi}{\xi K_1(\xi a)} \tag{2.18}$$

Поступила 3 V 1966

Институт математики и механики АНАрм.ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Sneddon I. N. Note on an Electrified circular disk situated Inside a coaxial infinite hollow cilinder. Proc. Cambridge Soc., 1962, vol. 58, No. 4, p. 621.
2. Ахиезер Н. И. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. матем. отд. физ.-мат. ф-та Харьковск. ун-та, Харьковск. матем. об-ва., 1957, т. 25, сер. 4. стр. 5—31.
3. Noble B. Certain dual integral equation. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, No. 2.
4. Srivastav R. P. An axisymmetric mixed boundry value problem for a half-space with a cylindrical cavity. J. Math. and Mech., 1964, vol. 13, No. 3, pp. 385—391.
5. Ростовцев Н. А. К задаче о кручении упругого полупространства. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1, стр. 55.