

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Б. В. Костров

(Москва)

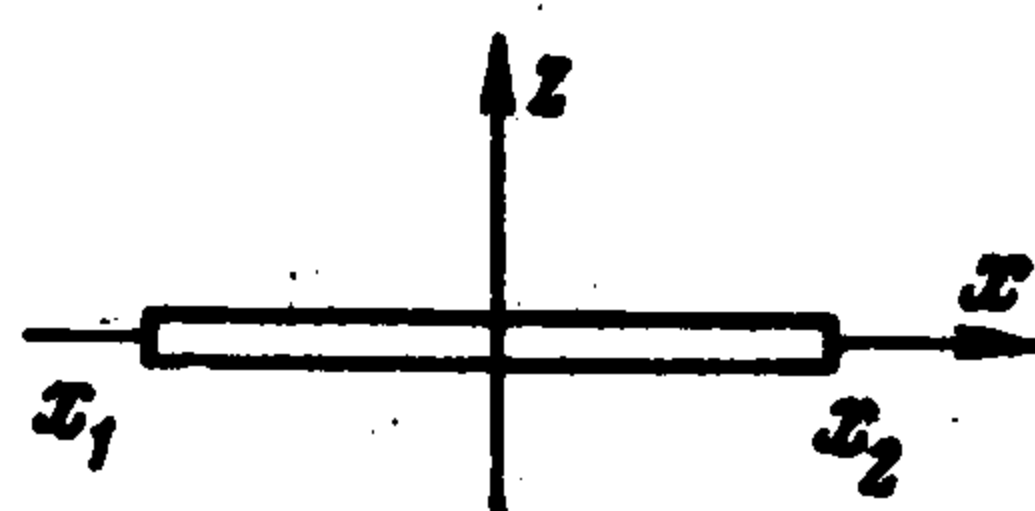
Во всех задачах о неустановившемся распространении трещин, которые до сих пор поддавались решению [1-3], предполагалось, что трещина распространяется с постоянной скоростью. Это предположение вызывалось не физической сущностью задач, а только методами решения, что ограничивает применимость полученных результатов. Более естественно было бы уметь определять скорость распространения трещины как функцию времени на основе явно высказанных физических гипотез. К сожалению, в общем случае получающиеся при этом задачи не поддаются решению существующими методами. Однако для задачи о трещине продольного сдвига, т. е. для плоской задачи, когда смещение параллельно краю трещины, можно построить решение при произвольно заданной переменной скорости распространения, используя метод, развитый в теории сверхзвукового обтекания [4,5].

Заметим, что равновесные трещины продольного сдвига рассматривались в работах [6,7].

1. **Постановка задачи.** Пусть безграничная упругая среда с модулем сдвига $\mu = 1$ скоростью распространения поперечных волн $b = 1$ заполняет пространство вне трещины (фиг. 1)

$$x_1 < x < x_2, \quad -\infty < y < \infty, \quad z = 0 \quad (1.1)$$

Примем, что все усилия, приложенные к среде, направлены по оси y и постоянны вдоль этой оси. Тогда вектор смещения также направлен



Фиг. 1

по оси y . Обозначим его единственную компоненту через w . Тензор напряжения имеет только две отличные от нуля компоненты

$$\tau_{xy} = \partial w / \partial x, \quad \tau_{yz} = \partial w / \partial z \quad (1.2)$$

Все эти величины не зависят от y . Будем считать также, что напряженное состояние среды таково, что w является нечетной функцией z . При помощи принципа суперпозиции можно, выделяя слагаемые, соответствующие начальному напряженному состоянию и напряженному состоянию, создаваемому объемными силами в отсутствие трещины, свести любую задачу к задаче с нулевыми начальными условиями и заданными усилиями на поверхности трещины

$$w \equiv 0, \quad \partial w / \partial t \equiv 0, \quad \text{при } t = 0 \quad (1.3)$$

$$\tau_{yz} = -p(x, t) \quad \text{при } x_1 < x < x_2, \quad z = 0 \quad (1.4)$$

Будем пока решать задачу в предположении, что положение краев трещины задано в любой момент времени

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t) \quad (1.5)$$

где $x_2(t)$ — монотонно возрастающая, а $x_1(t)$ — монотонно убывающая функции времени, т. е.

$$\dot{x}_1(t) < 0, \quad \dot{x}_2(t) > 0, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени.

К перечисленным условиям следует добавить уравнение движения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

эквивалентное волновому уравнению для w

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (1.7)$$

В силу предположенной симметрии задачи решение можно искать только в полуплоскости $z > 0$, причем на границе $z = 0$, кроме условия (1.4), должно выполняться условие

$$w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad -\infty < x < x_1, \quad x_2 < x < \infty \quad (1.8)$$

так как w непрерывно вне трещины и является нечетной функцией от z .

2. Вычисление τ_{yz} при $z = 0$. В дальнейшем будем опускать индексы у τ_{yz} , т. е. писать τ вместо τ_{yz} .

Методом Вольтерра легко получить соотношение

$$w(x_0, z_0, t_0) = \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{\tau(x, t) dx dt}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 - z_0^2}} \quad (\tau(x, t) \equiv \tau(x, 0, t)) \quad (2.1)$$

справедливое при $z_0 \geq 0$. Здесь S — часть плоскости xt , попадающая внутрь конуса

$$(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 - z_0^2 \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (2.2)$$

При $z_0 = 0$ получаем

$$w(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi} \iint_{S_0} \tau(x, t) \frac{dx dt}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2}} \quad (2.3)$$

Здесь S_0 — треугольник

$$(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (2.4)$$

В силу условия (1.8) имеем

$$\iint_{S_0} \tau(x, t) \frac{dx dt}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2}} = 0 \quad (2.5)$$

при $x_0 < x_1(t)$ или $x_0 > x_2(t)$.

Для случая $x_0 > x_2(t)$ рассмотрим сначала интервал времени $0 < t_0 < x_0 - x_1(0)$, когда возмущения от левого края трещины еще не дошли до точки наблюдения. Очевидно, что из-за однородности начальных условий $\tau(x, t) \equiv 0$ при $x > t + x_2(0)$. Следовательно, в этом случае область интегрирования определяется соотношениями

$$t_0 - t \geq |x_0 - x|, \quad t > x - x_2(0)$$

Часть этой области, лежащую при $x < x_2(t)$, назовем S_1 , а часть, лежащую при $x > x_2(t)$ назовем S_2 . На S_1 величина $\tau(x, t)$ задана условием (1.4). Таким образом

$$\iint_{S_2} \tau(x, t) \frac{dxdt}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2}} = \iint_{S_1} p(x, t) \frac{dxdt}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2}} \quad (2.6)$$

Здесь правая часть — известная функция от x_0 и t_0 .

Введем характеристические переменные

$$\xi = (t - x) / \sqrt{2}, \quad \eta = (t + x) / \sqrt{2} \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.6) примет вид

$$\int_{-x_2(0)/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0 - \xi}} \int_{\eta_2(\xi)}^{\eta_0} \tau_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = \int_{-x_2(0)/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0 - \xi}} \int_{-\xi}^{\eta_2(\xi)} p_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} \quad (2.8)$$

$(\tau_1(\xi, \eta) \equiv \tau(x, t), \quad p_1(\xi, \eta) \equiv p(x, t))$

Функция $\eta_2(\xi)$ есть решение уравнения

$$\eta_2 - \xi = \sqrt{2}x_2 \left(\frac{\eta_2 + \xi}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.9)$$

т. е. уравнение $\eta = \eta_2(\xi)$ определяет положение правого края трещины в переменных ξ, η .

Очевидно, уравнение (2.8) будет выполнено, если

$$\int_{\eta_2(\xi)}^{\eta_0} \tau_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = \int_{-\xi}^{\eta_2(\xi)} p_1(\xi, \eta) \frac{d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} \quad (2.10)$$

Это уравнение есть интегральное уравнение Абеля относительно $\tau_1(\xi, \eta)$. Его решение имеет вид

$$\tau_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{\eta_0 - \eta_2(\xi_0)}} \int_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)} p_1(\xi_0, \eta) \frac{\sqrt{\eta_2(\xi_0) - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta \quad (2.11)$$

Это выражение справедливо при $\eta_0 > \eta_2(\xi_0)$, т. е. справа от трещины. Напряжение слева от трещины получается аналогично и оказывается равным

$$\tau_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{\xi_0 - \xi_1(\eta_0)}} \int_{-\eta_0}^{\xi_1(\eta_0)} p_1(\xi, \eta_0) \frac{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi \quad (2.12)$$

при $\xi_0 > \xi_1(\eta_0)$, т. е. слева от трещины. Здесь $\xi_1(\eta)$ — решение уравнения

$$\eta - \xi_1 = \sqrt{2}x_1 \left(\frac{\eta + \xi_1}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.13)$$

В физических переменных выражения (2.11) и (2.12) принимают вид: при $x_0 > x_2(t_0)$

$$\tau(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{x_0 - x_2(t_2)}} \int_{x_0 - t_0}^{x_2(t_2)} p(x, t_0 - x_0 + x) \frac{\sqrt{x_2(t_2) - x}}{x_0 - x} dx \quad (2.14)$$

где t_2 — решение уравнения

$$t_0 - x_0 = t_2 - x_2(t_2) \quad (2.15)$$

при $x_0 < x_1(t_0)$

$$\tau(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{x_1(t_1) - x_0}} \int_{x_0+t_0}^{x_1(t_1)} p(x, t_0 + x_0 - x) \frac{\sqrt{x - x_1(t_1)}}{x_0 - x} dx \quad (2.16)$$

где t_1 — решение уравнения

$$t_0 + x_0 = t_1 + x_1(t_1) \quad (2.17)$$

Выражения (2.14) и (2.16) получены для отрезков времени $0 < t_0 < x_0 - x_1(0)$ и $0 < t_0 < x_2(0) - x_0$, соответственно. При этом отрезки интегрирования в обоих выражениях лежат целиком на поверхности трещины. Для вычисления $\tau(x_0, t_0)$ при больших значениях времени нужно подставлять выражения (2.14) и (2.16) одно в другое, полагая $p(x, t) \equiv -\tau(x, t)$ на тех участках отрезков интегрирования, где нагрузка неизвестна. Эта процедура соответствует многократной дифракции волн на краях трещины.

3. Коэффициент интенсивности напряжения. Выражения (2.14) и (2.16) дают бесконечные значения напряжения на краях трещины. Вблизи правого края трещины из (2.14) получается следующее асимптотическое выражение для $\tau(x_0, t_0)$:

$$\tau(x_0, t_0) \approx \frac{k_2}{\pi \sqrt{x_0 - x_2(t_0)}} \quad \text{при } x_0 \rightarrow x_2(t_0) \quad (3.1)$$

Здесь k_2 — коэффициент интенсивности напряжения у правого края трещины, равный

$$k_2 = \sqrt{1 - x_2^2(t_0)} \int_{x_2(t_0)-t_0}^{x_2(t_0)} p(x, t_0 - x_2(t_0) + x) \frac{dx}{\sqrt{x_2(t_0) - x}} \quad (3.2)$$

Аналогично

$$\tau(x_0, t_0) \approx \frac{k_1}{\pi \sqrt{x_1(t_0) - x_0}} \quad \text{при } x_0 \rightarrow x_1(t_0) \quad (3.3)$$

где

$$k_1 = \sqrt{1 + x_1^2(t_0)} \int_{x_1(t_0)}^{x_1(t_0)+t_0} p(x, t_0 + x_1(t_0) - x) \frac{dx}{\sqrt{x - x_1(t_0)}} \quad (3.4)$$

Если перейти в движущуюся систему координат с началом у края трещины и осью x , направленной вдоль трещины, то для коэффициента интенсивности напряжения получится следующее выражение, справедливое как для правого, так и для левого края:

$$k = \sqrt{1 - v} \int_0^t p(x', t - x') \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \quad (3.5)$$

где $x' > 0$ на трещине, $x' < 0$ на ее продолжении, а v — скорость пере-

мещения края. Для левого края трещины $x' = x - x_1(t)$, $v = -\dot{x}_1$, а для правого края $x' = x_2(t) - x$, $v = \dot{x}_2$.

При помощи выражения (3.5) можно перенести некоторые результаты статической теории трещин на динамический случай. Пусть $p_0(x, t)$ — распределение сил сцепления в краевой области трещины. Тогда коэффициент интенсивности напряжения, вычисленный с учетом сил сцепления, будет равен

$$k' = \sqrt{1-v} \int_0^t [p(x', t-x') - p_0(x', t-x')] \frac{dx'}{\sqrt{x'}}$$

Теперь можно потребовать конечности напряжения у края трещины (условие Христиановича — Баренблатта [8]). Для этого должно быть $k' = 0$. Если величину

$$K(v, t) = \sqrt{1-v} \int_0^t p_0(x', t-x') \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \quad (3.6)$$

назвать модулем сцепления, то получится условие

$$k = K(v, t) \quad (3.7)$$

где k — коэффициент интенсивности напряжения, вычисленный без учета сил сцепления.

Пусть размер краевой зоны трещины равен l . Обычно можно считать l весьма малым по сравнению с любым характерным размером задачи. Рассмотрим случай $t \gg l$. Тогда выражение (3.6) можно упростить, пренебрегая величиной x' по сравнению с t . Получаем

$$K(v, t) = \int_0^l p_0(x', t) \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \sqrt{1-v} \quad (3.8)$$

Предположим теперь, что распределение сил сцепления у края распространяющейся трещины зависит только от скорости распространения трещины и не зависит явно от времени. Это предположение естественным образом обобщает гипотезу Г. И. Баренблатта об автономности краевой зоны трещины. В таком случае модуль сцепления будет функцией только от v и будет равен

$$K(v) = \int_0^l p_0(x', v) \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \sqrt{1-v} \quad (3.9)$$

4. Энергетическое условие. Влияние сил сцепления сказывается на распределении напряжений в среде только на расстояниях порядка l от края трещины. Поэтому при малых l можно считать краевую зону точкой и не учитывать сил сцепления. Тогда, конечно, условие конечности напряжения не может быть выполнено, но можно получить другое условие, определяющее коэффициент интенсивности напряжения. Именно, предположим, что работа, затрачиваемая при разрушении (на преодоление сил сцепления) зависит только от скорости распространения трещины,

т. е. является стандартной для данного материала функцией скорости распространения

$$P = P(v) \quad (4.1)$$

Рассматривая интеграл энергии для уравнения движения, можно связать эту величину с коэффициентом интенсивности напряжения соотношением

$$P(v) = \pi^{-1} (1 - v^2)^{-1/2} k^2 \quad (4.2)$$

где k дается выражением (3.2) или (3.4). Соотношение (4.2) можно переписать в виде

$$k \equiv K(v) = \sqrt{\pi P(v) \sqrt{1 - v^2}} \quad (4.3)$$

При $v \rightarrow 0$ это условие переходит в условие Гриффиса для статической трещины продольного сдвига.

Функция (4.1) должна определяться либо экспериментально, либо теоретически из некоторых физических предположений о механизме разрушения. Например, если предположить, что при образовании трещины не происходит пластических деформаций, и вся работа затрачивается только на увеличение поверхностной энергии, то

$$K(v) = \sqrt{2\pi T \sqrt{1 - v^2}} \quad (4.4)$$

где T — поверхностное натяжение, являющееся константой материала. Экспериментально удобнее определять не функцию (4.1), а коэффициент интенсивности напряжения, т. е. в конечном счете, модуль сцепления $K(v)$.

Теперь можно уже не считать $x_1(t)$ и $x_2(t)$ известными функциями времени. Подставляя выражения (3.2) и (3.4) в условие (3.7) получим дифференциальные уравнения для определения положения концов трещины в любой момент времени, например

$$\int_{x_2-t}^{x_2} p(x, t - x_2 + x) \frac{dx}{\sqrt{x_2 - x}} = \frac{K(x_2)}{\sqrt{1 - x_2}} \quad (4.5)$$

5. Примеры. Исследование задач для трещин конечного размера может быть проведено только численно, так как кратные интегралы, связанные с многократно дифрагированными волнами, не вычисляются в конечном виде даже в простейших случаях. Поэтому ниже рассматриваются примеры только для полубесконечной трещины. Правда, результаты, полученные для полубесконечной трещины, применимы и для конечных трещин в такие моменты времени, когда возмущения от одного края трещины не дошли до другого края.

(а) Рассмотрим случай, когда в сплошной упругой среде, находящейся первоначально в однородном напряженном состоянии, таком, что $\tau_{yz} = \tau_0$, в момент $t = 0$ мгновенно проводится полубесконечный разрез вдоль отрицательной полуоси x . В этом случае $p = \tau_0$ и не зависит ни от x ни от t .

Подставляя это значение в выражение (3.2), находим коэффициент интенсивности напряжения

$$k = 2 \sqrt{1 - x} \tau_0 \sqrt{t} \quad (5.1)$$

где $x(t)$ — координата края трещины в момент времени t . До тех пор, пока величина коэффициента интенсивности напряжения не достигнет значения статического модуля сцепления, трещина остается неподвижной, т. е.

$$x = 0 \quad \text{при } t < t^{\circ} = [K(0)]^2 / 4\tau_0^2 \quad (5.2)$$

С момента $t = t^{\circ}$ начинается распространение трещины и k должно быть равно модулю сцепления $K(x)$, т. е.

$$K(x)(1-x)^{-1/2} = 2\tau_0 \sqrt{t} \quad (5.3)$$

Это дифференциальное уравнение определяет $x(t)$. Если $K(x)$ ограничен, то

$$x \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

т. е. скорость распространения трещины стремится со временем к скорости поперечных волн в среде, и распространение трещины никогда не прекращается. Это естественно, так как не существует решения для полубесконечной равновесной трещины в однородном поле напряжения.

(б) В качестве второго примера рассмотрим полубесконечную трещину, к берегам которой в точке $x = -x^{\circ}$ прикладывается при $t = 0$ сосредоточенная нагрузка $p = p^{\circ} \delta(x + x^{\circ})$. В этом случае из (3.2) получаем

$$k = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+x^{\circ}}} H(t-x^{\circ}) p^{\circ} \quad (5.4)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда. Это выражение равно нулю при $t < x^{\circ}$, т. е. до тех пор, пока возмущение не дошло до края трещины. При этом трещина не распространяется и

$$x = 0 \quad \text{при } t < x^{\circ} \quad (5.5)$$

В момент $t = x^{\circ}$ величина k становится равной

$$k = \frac{p^{\circ}}{\sqrt{x^{\circ}}} \sqrt{1-x^{\circ}(0)} \leq \frac{p^{\circ}}{\sqrt{x^{\circ}}} \quad (5.6)$$

Если эта величина меньше статического модуля сцепления, трещина вообще не начнет распространяться, так как из (5.4) видно, что при распространении трещины k может только уменьшиться. Таким образом, распространение трещины будет происходить только при условии

$$\frac{p^{\circ}}{\sqrt{x^{\circ}}} > K(0)$$

В этом случае приравняв выражение (5.4) динамическому модулю сцепления, получаем дифференциальное уравнение для $x(t)$

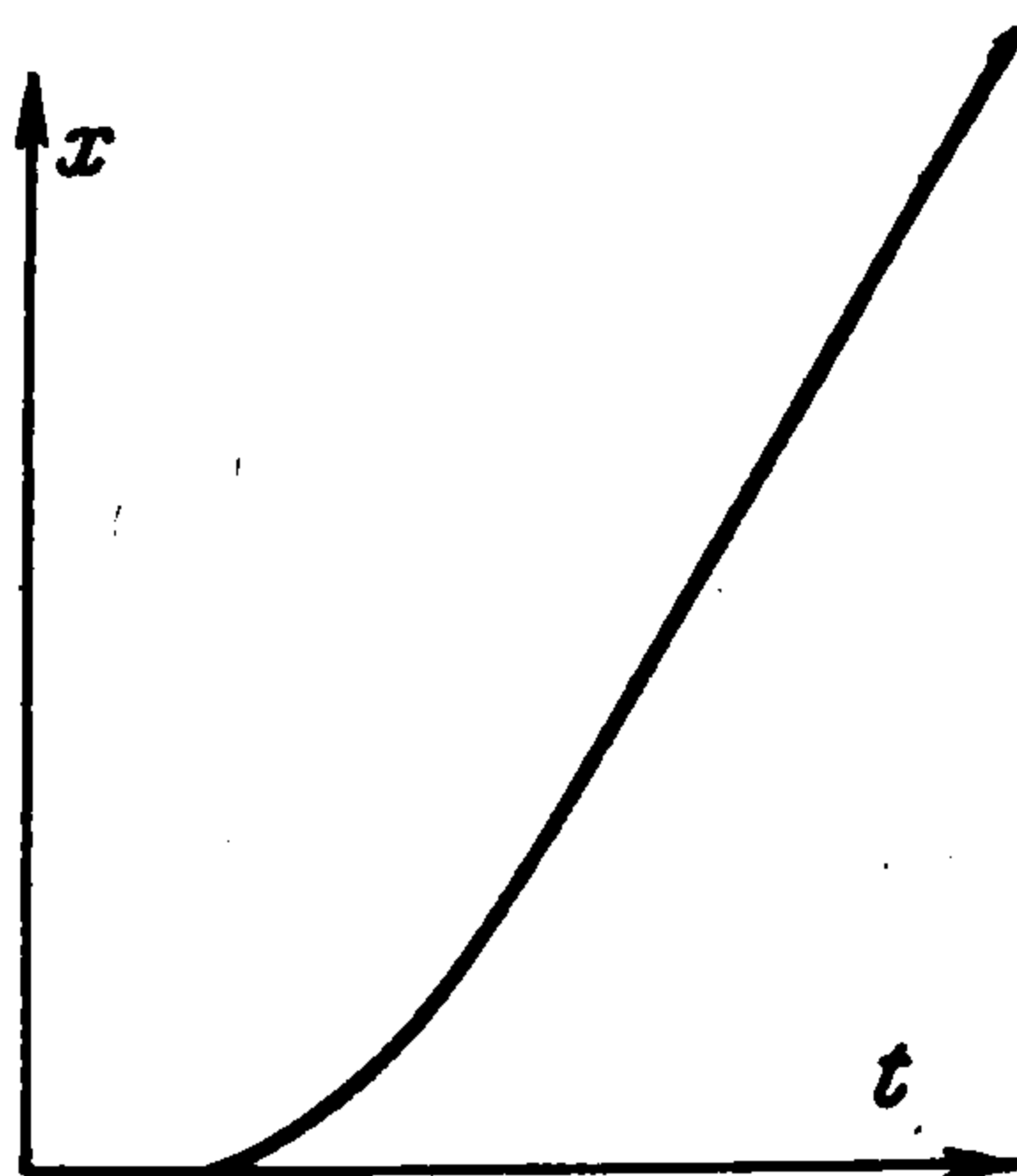
$$K(x) \frac{\sqrt{x+x^{\circ}}}{\sqrt{1-x}} = p^{\circ} \quad (5.7)$$

Вновь считая $K(x)$ ограниченным, заключаем, что трещина будет распространяться до тех пор, пока ее край не окажется в точке

$$x_m = [p^{\circ} / K(0)]^2 - x^{\circ} \quad (5.8)$$

после чего трещина останавливается.

В обоих рассмотренных примерах можно получить более подробную информацию о распространении трещины, если принять какой-то конкретный вид $K(v)$ и проин-



Фиг. 2

тегрировать уравнения (5.3) и (5.7). Чтобы остановиться на чем-то определенном, примем, что энергия разрушения постоянна, т. е. будем рассматривать чисто хрупкое разрушение, не сопровождающееся пластическими деформациями. В этом случае модуль сцепления дается формулой (4.4). Подставляя это выражение в уравнения (5.3) и (5.7) находим закон движения трещины

для примера (а)

$$x = t + \left(\frac{\pi}{2} - 1 - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{t^0} \right) t^0$$

для примера (б)

$$t = x + (x_m + x^0) \ln \left| \frac{x_m (x_m + 2x^0 - x)}{(x_m + 2x^0)(x_m - x)} \right|$$

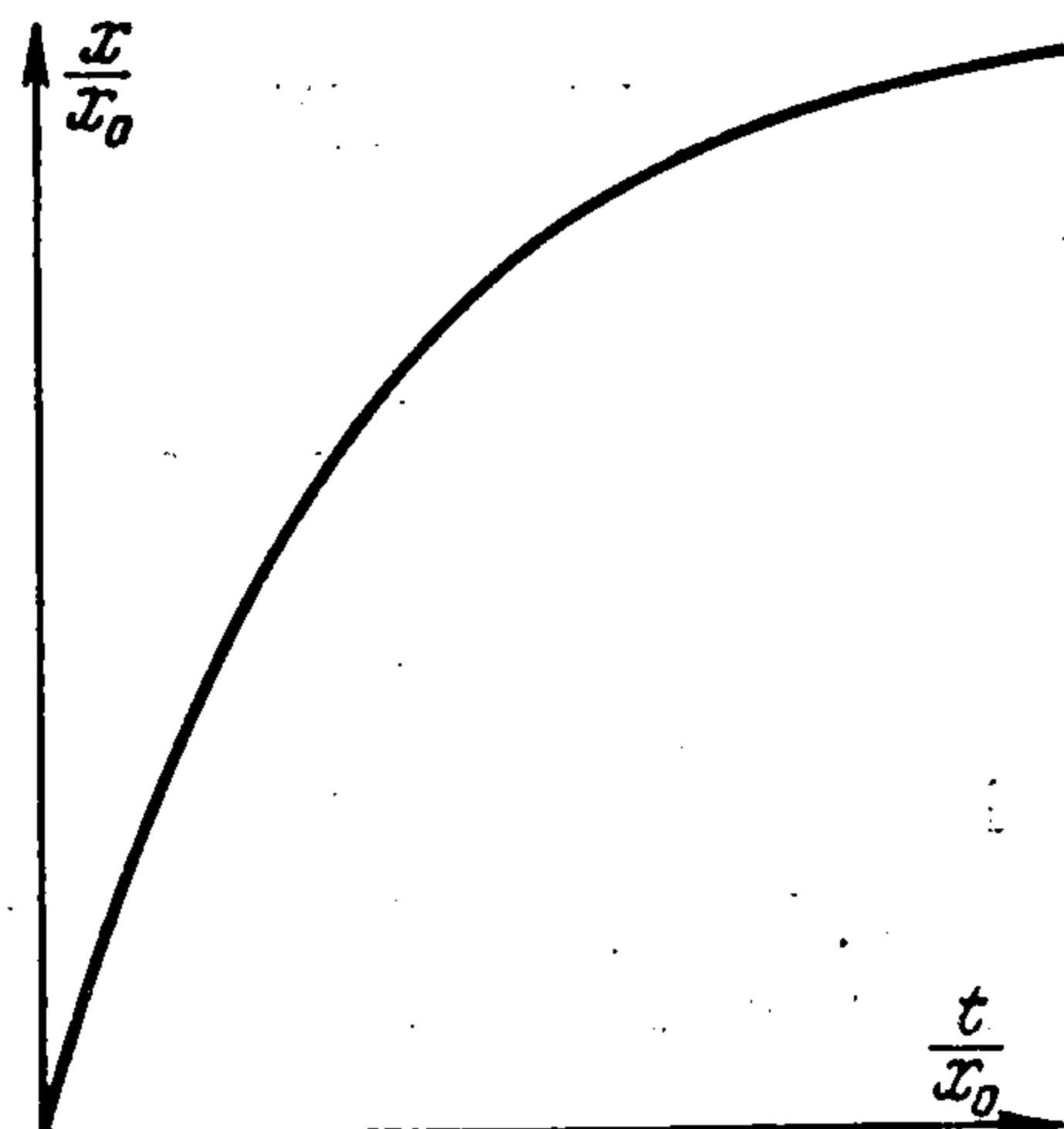
Характер соответствующих кривых показан на фиг. 2 и 3.

Полученные в работе формулы позволяют в принципе исследовать распространение трещины продольного сдвига при произвольной нагрузке и для любого интервала времени, если известна зависимость модуля сцепления от скорости распространения трещины. Имеется только одно ограничение — начальная длина [трещины должна быть конечной и большой по сравнению с размером краевой области, чтобы имело смысл понятие модуля сцепления. Особенно просто может быть исследован начальный период распространения трещины, когда еще не сказывается взаимодействие ее краев. В дальнейшем анализ сильно усложняется с ростом времени и может быть произведен только численно.

Поступила 11 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В а к е р В. R. Dynamic stresses created by a moving crack. Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1962, No. 3. (Русск. пер. Прикладная механика. Тр. Америк. об-ва инж.-мех., сер. E, 1962, т. 28, № 3).
2. В г о б е р г К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv Fys., 1960, Bd. 18, Hft. 2.
3. К о с т р о в Б. В. Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
4. К р а с и л ь щ и к о в а Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
5. М а й л с Дж. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М. Физматгиз, 1963.
6. Б а р е н б л а т т Г. И., Ч е р е п а н о в Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
7. S i h G. C. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems. Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1965, No. 1. (русск. перев. Прикладная механика. Тр. Америк. об-ва инж.-мех., сер. E, 1965, т. 32, № 1).
8. Б а р е н б л а т т Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.



Фиг. 3