Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ УДАРЕ КОНУСОМ ПО ТОНКОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЕ

С. С. Григорян, Д. М. Григорян

(Москва)

Задачей расчета параметров движения тонкой мембраны при ударе по ней твердым телом занимался ряд авторов (см. книгу [1] и имеющуюся в ней библиографию), однако рационального ее решения получено не было. В предлагаемой работе дается полное качественное исследование решения этой задачи для случая нормального удара с постоянной скоростью круговым конусом по неограниченной упругой мембране постоянной толщины. Это — простейший, но важный для понимания основных особенностей явления случай. В «мембранном» приближении толщина слоя оказывается несущественным параметром, поэтому в описанной постановке задача автомодельна, и ее решение сводится к задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основные соотношения для постановки задачи заимствуем из [1]. Срединная плоскость мембраны выбрана в качестве плоскости $y = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, y, конус движется вдоль оси oy с постоянной скоростью v_0. Уравнения движения при этом имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_t r\cos\gamma) - \frac{\sigma_\varphi}{r}, \qquad \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_t r\sin\gamma) \tag{1}$$

$$\sin\gamma = -\frac{1}{1+e_t}\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{1+e_t}\left(1+\frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{2}$$

Здесь u, w — смещения точек срединной поверхности в направлениях осей y и r соответственно; r — лагранжева координата точки срединной поверхности мембраны; t — время; ρ — плотность материала мембраны; σ_t, σ_φ — компоненты напряжения, отнесенные к первоначальным площадям граней, на которые они действуют, а компоненты деформации даются формулами

$$e_t = \left[\left(1+\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]^{1/2} - 1, \qquad e_\varphi = \frac{w}{r} \tag{3}$$

Для упругой мембраны имеют место соотношения

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(e_t + \nu e_\varphi), \qquad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}(e_\varphi + \nu e_t) \tag{4}$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Именно соотношения (4) в данном случае рассматриваются как определение упругого закона.

Исключив из соотношений (1)—(4) напряжения и деформации, можно получить два уравнения для двух функций u, w. Дополнительными условиями, определяющими решение описанной выше задачи, являются начальные данные

$$u(r, 0) = w(r, 0) = 0 \tag{5}$$

и граничное условие в точке удара

$$w(0, t) = 0, \qquad u(0, t) = v_0 t \tag{6}$$

Кроме того, функции u, w должны, очевидно, удовлетворять кинематическим условиям, вытекающим из возможного взаимного расположения мембраны и конуса (мембрана может частично облегать конус и частично будет расположена вне конуса). Искомые функции u, w зависят, таким образом, от независимых переменных r, t и параметров задачи θ, v_0, E, ν, ρ (2θ — угол при вершине конуса) поэтому задача автомодельна и ее решение имеет вид

$$u = a_0 t Y(z;\ \nu,\ m,\ \theta_0), \qquad w + r = a_0 t X(z;\ \nu,\ m,\ \theta_0)$$

$$z = \frac{r}{a_0 t}, \qquad a_0 = \left(\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\right)^{1/2}, \qquad m = \frac{v_0}{a_0} \tag{7}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению функций X, Y, удовлетворяющих соответствующим обыкновенным дифференциальным уравнениям и граничным условиям. Можно показать, что, вообще говоря, существуют три разных диапазона изменения переменной z, в которых эти функции определяются по-разному. Самую внешнюю область $r > a_0 t$, т. е. $z > 1$, где $w \equiv u \equiv 0$, естественно, не причисляем сюда. В области $z_* \leqslant z \leqslant 1$ будем иметь [1]

$$Y \equiv 0, \qquad X = z - c\omega_1(z), \qquad c = \mathrm{const}$$

$$\omega_1(z) \equiv \ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2} \qquad (z_* \leqslant z \leqslant 1) \tag{8}$$

Это — область чисто радиального движения элементов мембраны, ограниченная снаружи фронтом упругой волны $z = 1$. Внутренняя граница этой области $z = z_*$ и постоянная c заранее неизвестны и должны быть найдены в процессе решения задачи. В области $z_{**} \leqslant z \leqslant z_*$, где мембрана прогибается, но еще не контактирует с поверхностью конуса, функции X, Y являются решением уравнений

$$X'' = \frac{z\,[(1+\nu)z - \nu X]\,X'R' - z(1+\nu-R)\,RX' + \nu z R\,(X')^2 + R^2[(1+\nu)z - \nu z R - X]}{zR\,\{[1+\nu-R(1-z^2)]\,z - \nu X\}}$$

$$R' = \frac{[X-(1+\nu)z]\,X' + zR(1+\nu-R)}{z^2(1-z^2)\,R}, \qquad Y' = \sqrt{R^2-(X')^2} \tag{9}$$

удовлетворяющим в точках $z = z_*$, $z = z_{**}$ некоторым граничным условиям, о которых будет сказано ниже. Уравнения (9) получаются из соотношений (1)—(4), (7). Величина $z = z_{**}$, определяющая точку, в которой мембрана примыкает к поверхности конуса, также неизвестна.

Наконец, в области $0 \leqslant z \leqslant z_{**}$ мембрана облегает поверхность конуса и функции X, Y определяются соотношениями

$$X = U(z)\sin\theta, \qquad Y = m - U(z)\cos\theta, \qquad R = U'(z)$$

$$U(z) = \frac{1+\nu}{1+\lambda}\,z + c_1 z^\lambda F\left(\frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda-1}{2},\ \lambda+1;\ z^2\right) \tag{10}$$

Здесь $\lambda = \sin\theta$, $c_1 = \mathrm{const}$, а F — гипергеометрическая функция [1]

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}\,x + \ldots \tag{11}$$

Здесь неизвестным параметром, подлежащим определению, является постоянная c_1. Таким образом, искомые функции X, Y в областях $z_* \leqslant z \leqslant$

$\leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant z_{**}$ определяются конечными формулами (8) и (10), (11) соответственно, а в промежуточной области $z_{**} \leqslant z \leqslant z_*$ — обыкновенными дифференциальными уравнениями (9). Выбор решения последних и определение параметров z_{**}, z_*, c, c_1 должен быть произведен при помощи условий сопряжения в точках $z = z_*$, $z = z_{**}$. Этими условиями, очевидно, прежде всего, будут условия непрерывности X и Y. Кроме того, в этих точках, физически соответствующих распространяющимся поверхностям разрыва, должны удовлетворяться обычные законы сохранения (массы, импульса).

Рассмотрим сначала условия в точке $z = z_*$. Снабдив индексами *1* и *2* величины в этой точке, соответственно для сторон $z < z_*$ и $z > z_*$, получим условие сохранения массы

$$\frac{\beta - X_2 + z_* X_2'}{R_2} = \frac{(\beta - X_1 + z_* X_1')\cos\gamma + (Y_1 - z_* Y_1')\sin\gamma}{R_1} \tag{12}$$

и теорему количества движения

$$(\beta - X_2 + z_* X_2')(X_2' - X_1')\frac{z_*}{R_2} = R_2 + \frac{\nu}{z_*}X_2 - \\ - \left[R_1 + \frac{\nu}{z_*}X_1 - (1+\nu)\right]\cos\gamma \qquad \left(\beta = \frac{b}{a_0}\right) \tag{13}$$

$$-(\beta - X_2 + z_* X_2')Y_1'\frac{z_*}{R_2} = \left[R_1 + \frac{\nu}{z_*}X_1 - (1+\nu)\right]\sin\gamma \tag{14}$$

Здесь b — скорость распространения разрыва вдоль оси or, γ — угол между меридиональными элементами мембраны с двух сторон разрыва. Кроме соотношений (12)—(14), очевидны еще следующие:

$$X_1 = X_2, \qquad Y_1 = 0, \qquad \beta = X_2, \qquad R_2 = X_2' \tag{15}$$

а также кинематические соотношения

$$\sin\gamma = -\frac{Y_1'}{R_1}, \qquad \cos\gamma = \frac{X'_1}{R_1} \tag{16}$$

Условие (12) в силу (15) и (16) обращается в тождество, а (13) и (14) дают с учетом (8) и условия $Y' \neq 0$

$$R_1(z_*) = \frac{\nu X_2(z_*) - (1+\nu)z_*}{z_*(z_*^2 - 1)} \tag{17}$$

$$X_1(z_*) = X_2(z_*) = z_* - c(z_*)\omega_1(z_*) \tag{18}$$

$$c(z_*) = \frac{z_*^2}{\omega_1'(z_*)(z_*^2 - 1) - \nu z_*^{-1}\omega_1(z_*)} \tag{19}$$

Таким образом, вся неопределенность в точке $z = z_*$ свелась к неопределенности самой величины z_*, формула (19) определяет параметр c из (8) через z_*, а соотношения (17), (18) вместе с условием $Y_1(z_*) = 0$ полностью определяют условия перехода в точке $z = z_*$ от формул (8) к решению уравнений (9), определяющему решение нашей задачи в области $z_{**} \leqslant z \leqslant z_*$. Обратимся теперь к условиям в точке $z = z_{**}$.

Уравнение сохранения массы в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{(\beta_r - X_1 + z_{**}X_1')\sin\theta_1 - (\beta_y - Y_1 + z_{**}Y_1')\cos\theta_1}{R_1} =$$
$$= \frac{(\beta_r - X_2 + z_{**}X_2')\sin\theta_2 - (\beta_y - Y_2 + z_{**}Y_2')\cos\theta_2}{R_2} \qquad (20)$$

Здесь индексами *1*, *2* обозначены предельные значения соответствующих величин по обе стороны поверхности разрыва, θ_1, θ_2 — углы наклона к оси or элементов мембраны по обе стороны разрыва. Кроме (20), имеем: еще условия непрерывности смещений

$$X_1 = X_2, \qquad Y_1 = Y_2 \qquad (21)$$

соотношения для компонентов β_r, β_y скорости поверхности разрыва

$$\beta_r = X_1(z_{**}), \qquad \beta_y = Y(z_{**}) \qquad (22)$$

а также кинематические соотношения

$$\frac{X_1'}{R_1} = \sin\theta_1, \quad \frac{Y_1'}{R_1} = -\cos\theta_1, \quad \frac{X_2'}{R_2} = \sin\theta_2, \quad \frac{Y_2'}{R_2} = -\cos\theta_2 \qquad (23)$$

Очевидно, здесь также соотношения (21)—(23) обращают условие (20) в тождество, и существенные условия в точке $z = z_{**}$ дает лишь теорема количества движения (конечно, с учетом (21)—(23)):

$$z_{**}^2(X_1' - X_2') = \frac{X_1'}{R_1}\left(R_1 + \nu\frac{X_1}{z_{**}} - 1 - \nu\right) -$$
$$- \frac{X_2'}{R_2}\left(R_2 + \nu\frac{X_2}{z_{**}} - 1 - \nu\right) + \frac{X_1}{z_{**}}q_r \qquad (24)$$

$$z_{**}^2(Y_1' - Y_2') = \frac{Y_1'}{R_1}\left(R_1 + \nu\frac{X_1}{z_{**}} - 1 - \nu\right) -$$
$$- \frac{Y_2'}{R_2}\left(R_2 + \nu\frac{X_2}{z_{**}} - 1 - \nu\right) + \frac{X_1}{z_{**}}q_y \qquad (25)$$

$$q_r = \frac{Q_r}{\rho a_0^2\delta}, \qquad q_y = \frac{Q_y}{\rho a_0^2\delta} \qquad (26)$$

Здесь Q_r, Q_y — компоненты сосредоточенной силы, которая может возникнуть в точке схода мембраны с поверхности конуса; δ — начальная толщина мембраны. В рассматриваемом случае, когда $z_{**} < z_*$, необходимо положить $Q_r = Q_y = 0$. Учитывая это условие и соотношение $Y' = -\sqrt{R^2 - (X')^2}$, приводим (24), (25) к виду

$$X_1'\left[z_{**}^2 - 1 - \nu\frac{X_1}{R_1 z_{**}} + \frac{1+\nu}{R_1}\right] = X_2'\left[z_{**}^2 - 1 - \nu\frac{X_2}{R_2 z_{**}} + \frac{1+\nu}{R_2}\right] \qquad (27)$$

$$R_1\left[z_{**}^2 - 1 - \nu\frac{X_1}{R_1 z_{**}} + \frac{1+\nu}{R_1}\right] = R_2\left[z_{**}^2 - 1 - \nu\frac{X_2}{R_2 z_{**}} + \frac{1+\nu}{R_2}\right] \qquad (28)$$

Из (28) следует, что $R_1 = R_2$, а из (27) при условии, что выражение в квадратных скобках не равно нулю, следует непрерывность X' и, следовательно, и Y', т. е. $X_1' = X_2'$, $Y_1' = Y_2'$. Обращение выражения в квадратных скобках в нуль может произойти лишь случайно, поэтому общий результат из рассмотрения условий в точке $z = z_{**}$ сводится к тому, что в этой точке функции X, X', Y, Y', R непрерывны, т. е. в точке схода мембраны с поверхности конуса имеется лишь слабый разрыв.

Таким образом, нужное решение уравнений (9), которое вместе с формулами (8), (10) определит полностью решение задачи, должно быть построено по условиям (17), (18) в точке $z = z_*$ и условиям непрерывного сопряжения с формулами (10) в точке $z = z_{**}$.

Для построения решения задаем значения угла θ и параметра ν. Тогда в формулах (10) единственным неопределенным элементом остается c_1.

Задаемся некоторым значением этого параметра и значением $z = z_{**}$. Тогда значения X, X', R в точке $z = z_{**}$, определяемые однозначно по формулам (10), дают полный набор начальных данных для первых двух уравнений системы (9). Решаем численно получающуюся задачу Коши и находим точки $z = z_{*X}$, $z = z_{*R}$, в которых графики построенных функций $X = X(z)$, $R = R(z)$ пересекаются с линиями, определяемыми соотношениями (17), (18). В общем случае окажется, что $z_{*X} \neq z_{*R}$. Тогда меняем z_{**} и повторяем процедуру. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет удовлетворено условие $z_{*X} = z_{*R}$. Таким образом, основным элементом численного решения будет отыскание корня z_{**} уравнения

$$f(z_{**}) \equiv z_{*X}(z_{**};\ \theta, c_1, \nu) - z_{*R}(z_{**};\ \theta, c_1, \nu) = 0 \tag{29}$$

После того как это сделано, становятся известными числа z_{**}, z_* и функции X, R всюду в интервале $0 \leqslant z \leqslant 1$. Для завершения построения решения необходимо вычислить квадратуру

$$Y(z) = -\int_{z_*}^{z} \sqrt{R^2 - (X')^2}\, dz \tag{30}$$

Условие непрерывности Y в точке $z = z_{**}$ дает с учетом (30) и (10)

$$Y(z_{**}) = -\int_{z_*}^{z_{**}} \sqrt{R^2 - (X')^2}\, dz = m - U(z_{**})\cos\theta \tag{31}$$

Отсюда находим значение безразмерной скорости конуса m, соответствующее выбранным значениям θ, ν и c_1,

$$m = U(z_{**})\cos\theta + \int_{z_{**}}^{z_*} \sqrt{R^2 - (X')^2}\, dz \tag{32}$$

Эти вычисления можно выполнить для разных значений параметра c_1, что будет давать решения, соответствующие разным скоростям удара. Нужно, однако, как-то определить диапазон возможного изменения параметра c_1, для которого реализуется описанная выше схема движения.

Верхняя граница этого диапазона определяется, очевидно, условием $z_{**} = z_*$. Нижняя граница — условием $z_{**} = 0$.

Можно показать, что при $\theta \neq 0$, как бы мала ни была скорость удара, условие $z_{**} = 0$ не может быть достигнуто, т. е. при любой скорости удара часть мембраны будет облегать поверхность конуса, как бы тонок последний ни был. Это обстоятельство устанавливается рассмотрением асимптотики решений уравнений (9) при $z \to 0$. Если бы при каких-то значениях скорости удара и угла θ было бы $z_{**} = 0$ и мембрана соприкасалась с конусом лишь в одной точке — в вершине конуса, то должно было бы существовать решение уравнений (9), обладающее в окрестности точки $z = 0$ асимптотическим свойством $Y' = aX'$, $a = \text{const} < 0$. Однако анализ уравнений (9) показывает, что подобной асимптотики они не допускают, кроме случая $a = -\infty$. Это доказывает сделанное выше утверждение и одновременно означает, что при точечном ударе с постоянной скоростью по мембране (частный случай $\theta = 0$) меридиональное сечение деформированной мембраны в точке удара имеет точку возврата.

Таким образом, нижняя граница области изменения параметра c_1 есть нуль, ибо при $c_1 \to 0$ решение (10) также стремится к нулю, а оно при $\theta \neq 0$ содержится в полном решении задачи при любых значениях скорости удара и стремится к нулю вместе с этой скоростью, т. е. при $m \to 0$ будет и $c_1 \to 0$.

Обратимся теперь к определению верхней границы области изменения c_1. Это легко сделать, подставив в условия (17), (18) значения $X_1(z_*)$ и $R_1(z_*)$, определяемые формулами (10), что соответствует условию $z_{**} = z_*$, определяющему $\max c_1$. В результате получим два уравнения для определения $\max c_1$ и соответствующего значения $z_* = z_{**} = z_{*0}$. Соответствующие формулы таковы

$$\frac{X_2(z_{*0}) - (a\sin\theta)\, z_{*0}}{Q(z_{*0})\sin\theta} = \frac{R_2(z_{*0}) - a}{Q'(z_{*0})}$$

$$Q(z) = z^\lambda F\left(\frac{\lambda}{2},\ \frac{\lambda-1}{2},\ \lambda+1;\ z^2\right), \qquad a = \frac{1+\nu}{1+\lambda}, \qquad \lambda = \sin\theta \tag{33}$$

$$X_2(z) = z\left[1 - \frac{z^2}{z(1-z^2)(\omega_2(z)/(\omega_1(z)) - \nu)}\right], \quad R_2(z) = \left[1 + \frac{z^3}{\nu\,\omega_2(z)/\omega_1(z) - z}\right]^{-1}$$

$$\omega_2(z) = -\omega_1'(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + \ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} \tag{34}$$

$$\max c_1 = \frac{R_2(z_{*0}) - a}{Q'(z_{*0})} = \frac{X_2(z_{*0}) - (a\sin\theta)\, z_{*0}}{Q(z_{*0})\sin\theta}$$

Для построения решения задачи при малых θ могут быть полезными асимптотические формулы. Устремив θ к нулю в соотношениях (33), (34), получим асимптотическое уравнение для z_{*0}

$$\psi(z_{*00})\, X_2(z_{*00}) = z_{*00}\,[R_2(z_{*00}) - (1+\nu)]$$

$$\psi(z) \equiv \lim_{\theta\to 0}\frac{Q'(z;\ \theta)}{\theta\, Q(z;\ \theta)}, \qquad c_1|_{\theta\to 0} \to \frac{X_2(z_{*00})}{\theta} \tag{35}$$

Полученный результат любопытен: при $\theta \to 0$ значение z_{*0} стремится к пределу z_{*00}, т. е. координата точки схода мембраны с поверхности конуса для случая, когда отсутствует промежуточная область $z_{**} = z_*$ при малых θ не зависит от θ. Конечно, при этом скорость удара растет с убыванием θ, ибо $c_1 \to \infty$, а m ведет себя, примерно как c_1 (см. (22)).

Описанная выше процедура позволяет решить задачу для $c_1 < \max c_1$ и скоростей удара m, не превышающих $m = m(\max c_1)$. При больших значениях скорости удара схема движения будет соответствовать полному облеганию конуса на интервале $0 \leqslant z \leqslant z_*$ и области радиального движения $z_* \leqslant z \leqslant 1$, однако уже компоненты сосредоточенной силы q_r, q_y не будут равны нулю. Решение в области $0 \leqslant z \leqslant z_*$ по-прежнему будет определяться формулами (10), а в области $z_* \leqslant z \leqslant 1$ — формулами (8), однако постоянные c, c_1 и значение z_* должны быть определены по-другому. Из условия $Y_1(z_*) = Y_2(z_*) = 0$ получаем $U(z_*) \cos\theta = m$, что позволяет выразить параметр c_1 через m и z_* в виде

$$c_1 = \bar{c}_1(z_*) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{1+\nu}{1+\lambda} z_*\right) \Big/ z_*^{\lambda} F\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \lambda+1; z_*^2\right) \quad (36)$$

Из условия $X_1(z_*) = X_2(z_*)$ с учетом (8) и (10) получаем выражение

$$c = \bar{c}(z_*) = \frac{z_* - m \operatorname{tg}\theta}{\omega_1(z_*)} \quad (37)$$

Уравнение сохранения массы при $z = z_*$, как уже отмечалось, выполняется автоматически и остается удовлетворить лишь теореме количества движения, т. е. соотношениям (24), (25), если в них заменить z_{**} на z_*. Тогда с учетом формул (8), (10), (36), (37) эти соотношения позволяют выразить q_r и q_y через z_*. Если обозначить через φ угол трения между материалами мембраны и конуса, т. е. $\varphi \equiv \operatorname{arc\,tg} f$, где f — коэффициент трения мембраны о конус, то, приняв допущение, что сосредоточенная сила (q_r, q_y) отклонена от нормали на угол φ, получим соотношение

$$q_y = q_r \operatorname{tg}(\theta - \varphi) \quad (38)$$

Если сюда подставить упомянутые выражения q_r и q_y через z_*, то получим уравнение для определения z_*, решив которое, получим полное решение задачи для соответствующих значений скоростей из рассматриваемого интервала. При этом нужно проверить, есть ли скольжение мембраны по конусу в точке $z = z_*$, т. е. выполнено ли условие $U(z_*) - z_* U'(z_*) \neq 0$. Если при некоторой скорости удара одновременно выполняются условия (39) и

$$U(z_*) - z_* U'(z_*) = 0 \quad (39)$$

то это значение скорости разделяет рассматриваемый диапазон скоростей удара на две части: для одной имеет место проскальзывание и выполнено условие (38), для другой — скольжения нет и выполняется условие (39). Критическое значение z_* легко определить по имеющимся формулам. По-видимому, сначала будет режим движения без проскальзывания, а после достижения критической скорости — с проскальзыванием.

Эта схема определяет решение для значений скоростей, при которых $z_* < 1$. При скорости $m = \operatorname{ctg}\theta$ будет достигнуто состояние $z_* = 1$ и для $m > \operatorname{ctg}\theta$ решение должно строиться иначе. В этом случае область радиального движения существовать не может и будет $z_* > 1$. Здесь уже значение z_* находится просто: $z_* = m \operatorname{tg}\theta$, и решить задачу только с одним разрывом при $z = z_*$ становится невозможным. Устранить это обстоятельство можно, введя второй разрыв $z = z_{**} < z_*$ в области, где решение описывается формулами типа (10). Это вполне аналогично тому, что имеет место в задаче об ударе клином по нити [1].

Поступила 12 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А., Рахматулин Х. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.