

О ХАРАКТЕРЕ СИЛЬНЫХ СКАЧКОВ В НЕКОТОРЫХ СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Изучению свойств ударных волн посвящены многочисленные исследования, из которых отметим работы [1-5].

В предлагаемой работе развиваются основные предпосылки, предложенные в [6] для исследования структуры ударных волн в вязком газе. Показывается, что в гипоупругой среде с точностью до малых деформаций все разрывные величины внутри слоя ударной волны изменяются подобно. Это обстоятельство позволяет исследовать распространение ударных волн в гипоупругой среде.

В качестве конкретного приложения полученных уравнений рассматривается задача о структуре поперечной ударной волны в среде Кельвина.

1. Для исследования структуры ударных волн введем подвижную систему координат (x_1, x_2, x_3) так, чтобы ее начало лежало на некоторой срединной поверхности Σ , расположенной внутри слоя ударной волны, а плоскость (x_1, x_2) совпадала с касательной плоскостью к этой поверхности.

Используя определение δ -производной по времени уравнения сохранения массы и импульса запишем в виде

$$\{\rho(v_z - G)\}_{,z} + (\rho v_\alpha)_{,\alpha} + \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{iz,z} + \sigma_{i\alpha,\alpha} = \rho(v_z - G)v_{i,z} + \rho v_\alpha v_{i,\alpha} + \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} \quad (1.2)$$

Первый член в левой части (1.1) и первые члены в левой и правой частях уравнения (1.2) внутри слоя ударной волны велики по сравнению с остальными членами.

В случае нестационарного течения со скоростью G будет двигаться срединная поверхность Σ . Расстояние от переднего ударного фронта до Σ обозначим через h^+ , от заднего ударного фронта до Σ — через h^- . Тогда сумма $(h^+ + h^-) = h$ — толщина ударного слоя. Можно считать, что положение поверхности Σ в любой момент времени известно из невязкого течения. При уменьшении коэффициента вязкости до нуля оба ударных фронта стремятся к поверхности Σ .

Разные разрывные функции в общем претерпевают свои основные изменения на разных расстояниях от Σ . Поэтому каждой разрывной функции соответствует своя толщина ударного слоя. Обозначим толщины ударного слоя для функций ρ, v_i, σ_{ij} соответственно через $h^\pm, h_i^\pm, h_{ij}^\pm$, а полные толщины как

$$h^+ + h^- = h, \quad h_i^+ + h_i^- = h_i, \quad h_{ij}^+ + h_{ij}^- = h_{ij} \quad (1.3)$$

Обозначим ρ^* , v_i^* , σ_{ij}^* значения плотности, скорости и напряжения на Σ . Тогда толщины ударного слоя можно определить равенствами:

$$\rho_{,3}^* = \pm \frac{\rho^\pm - \rho^*}{h^\pm}, \quad v_{i,3}^* = \pm \frac{v_i^\pm - v_i^*}{h_i^\pm}, \quad \sigma_{ij,3}^* = \pm \frac{\sigma_{ij}^\pm - \sigma_{ij}^*}{h_{ij}^\pm} \quad (1.4)$$

Здесь предполагается, что градиенты разрывных функций поперек ударного слоя велики, а соответствующие толщины малы. Заметим, что это не единственный способ определения толщин ударного слоя.

Между толщинами ударного слоя можно установить некоторые зависимости. Для этого, пренебрегая малыми членами в (1.1) и (1.2), получим

$$\rho_{,3} (v_3 - G) + \rho v_{3,3} = 0, \quad \sigma_{i3,3} = \rho (v_3 - G) v_{i,3} \quad (1.5)$$

К системе (1.5) следует присоединить интегралы этих уравнений для ударного слоя

$$\rho (v_3 - G) = C, \quad \sigma_{i3} = C v_i + C_i \quad (1.6)$$

Подставляя (1.4) в (1.5) и используя (1.6), получим

$$h_3^\pm = h^\pm \rho^* / \rho^\pm, \quad h_i^\pm = h_{i3}^\pm \quad (1.7)$$

Для плотных газов, жидкостей и других реологических сред плотность на ударной волне претерпевает небольшие изменения, поэтому в (1.7) можно считать $h_3^\pm \approx h^\pm$. Для идеального газа $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$, $\sigma_{\alpha\beta} = 0$, откуда следует, что $h_{11}^\pm = h_{22}^\pm = h_{33}^\pm$, а из (1.7) получим, что

$$h^\pm \approx h_3^\pm = h_{11}^\pm = h_{22}^\pm = h_{33}^\pm \quad (1.8)$$

Таким образом, в случае распространения ударных волн в идеальном газе все разрывные величины претерпевают основные изменения на одном и том же расстоянии от Σ .

В дальнейшем понадобятся некоторые соотношения для толщин разрывных функций f_j и φ_i , связанных между собой линейной зависимостью

$$\varphi_i = A_{ij} f_j + B_i, \quad |A_{ij}| \neq 0 \quad (1.9)$$

Величины A_{ij} и B_i не зависят от x_3 .

Лемма 1. Если для всех функций f_j толщины ударного слоя h^+ и h^- одинаковы, то и для функций φ_i толщины h_i^+ и h_i^- будут равны h^+ и h^- соответственно.

Лемма 2. Если все функции f_j изменяются внутри ударного слоя подобно одна другой, т. е. $f_j - f_j^+ = v [f_j]$, то функции φ_i внутри ударного слоя изменяются тоже подобно, причем $\varphi_i - \varphi_i^+ = v [\varphi_i]$, а функциям f_j и φ_i соответствует одна и та же толщина ударного слоя

$$h = 1 / v_{,3}^*, \quad h^+ = -v^* / v_{,3}^*, \quad h^- = (1 + v^*) / v_{,3}^* \quad (1.10)$$

Из этих лемм следует, что в упругой среде с точностью до малых деформаций все разрывные величины изменяются внутри ударного слоя подобно и имеют одинаковые толщины.

Чтобы получить основные уравнения для исследования структуры ударной волны, проинтегрируем по x_3 уравнения (1.1) и (1.2). Учитывая

(1.7), получим

$$\rho (v_3 - G) = C - \varphi, \quad C = \rho^+ (v_3^+ - G) \quad (1.11)$$

$$\varphi = \int_{h^+}^{x_3} \left\{ (\rho v_\alpha)_{,\alpha} + \frac{\delta \rho}{\delta t} \right\} dx_3, \quad -h^- \leq x_3 \leq h^+ \quad (1.12)$$

$$\sigma_{i3} - C v_i = C_i - \varphi_i, \quad C_i = \sigma_{i3}^+ - C v_i^+ \quad (1.13)$$

$$\varphi_i = \int_{h_i^+}^{x_3} \left\{ \sigma_{i\alpha, \alpha} - \rho v_\alpha v_{i,\alpha} - \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} \right\} dx_3 + \int_{v_i^+}^{v_i} \varphi dv_i, \quad -h_i^- \leq x_3 \leq h_i^- \quad (1.14)$$

Подынтегральное выражение в (1.10) конечно, а интервал интегрирования мал, поэтому φ мало. По этой же причине первый интеграл в (1.12) мал. Второй же интеграл в (1.12) мал, так как φ мало. Итак, φ и φ_i — малые функции, определенные внутри ударного слоя.

Так как на ударной волне нулевой толщины имеют место динамические условия для разрывов [7]

$$[\rho (v_3 - G)] = 0, \quad [\sigma_{i3} - C v_i] = 0 \quad (1.15)$$

то для ударной волны, имеющей малую толщину, их можно считать в первом приближении справедливыми. Тогда из (1.11) и (1.13) получим, что φ и φ_i обращаются в нуль на обоих фронтах ударного слоя. Если предположить, что эти функции не обращаются в нуль нигде внутри ударного слоя, то, аппроксимируя их параболой, получим

$$\varphi \approx \frac{A}{2h} (x_3 - h^+) (x_3 + h^-), \quad A = \left[(\rho v_\alpha)_{,\alpha} + \frac{\delta \rho}{\delta t} \right] \quad (1.16)$$

$$\varphi_i \approx \frac{A_i}{2h_i} (x_3 - h_i^+) (x_3 + h_i^-)$$

$$A_i = \left[\sigma_{i\alpha, \alpha} - \rho v_\alpha v_{i,\alpha} - \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} \right] + \left\{ (\rho^* v_\alpha^*)_{,\alpha} + \frac{\delta \rho^*}{\delta t} \right\} [v_i] \quad (1.17)$$

Величины φ и φ_i обращаются тождественно в нуль при одномерном установившемся течении. Эти малые функции вносят существенный вклад при малых разрывах на ударной волне, когда их значение в (1.11) и (1.13) возрастает.

При h, h_i и $h_{ij} \rightarrow 0$ соотношения (1.11) и (1.13) переходят в соотношения (1.16), если при этом φ и $\varphi_i \rightarrow 0$. Для этого достаточно, чтобы подынтегральные выражения в (1.12) и (1.14) были конечными всюду внутри ударного слоя, что приводит к требованию ограниченности величин:

- а) плотности,
- б) касательных составляющих скорости к поверхности Σ ,
- в) напряжений на площадках с произвольной нормалью, лежащей на поверхности Σ .

Для одномерных течений два последних условия выполняются независимо от свойств среды. Если определяющие уравнения не противоречат в этом случае предположению о существовании ударной волны нулевой толщины, то распространение этой волны возможно.

При решении задачи о вязком течении внутри ударного слоя предполагается, что значение величин ρ , v_i , σ_{ij} на переднем и заднем ударном фронте совпадают со значениями этих величин из задачи о невязком течении перед ударной волной и за ней, поэтому силы вязкости на обоих фронтах ударного слоя обращаются в нуль. Следовательно, задача о структуре ударной волны сводится к нахождению зависимости от координат вязких сил внутри ударного слоя, обращаются в нуль на обоих ударных фронтах при $x_3 = \pm h^\pm$.

Если в (1.11), (1.13) и определяющих уравнениях для среды Кельвина пренебречь Φ , Φ_i и нелинейными членами, то получим, что силы вязкости тождественно обращаются в нуль внутри ударного слоя. Поэтому задача о структуре ударной волны в этом случае теряет смысл. Таким образом при постановке задачи о структуре ударной волны необходимо учитывать нелинейные члены в уравнениях, определяющих структуру ударного слоя. Отсюда вытекает, что существование толщины и структуры ударной волны в среде Кельвина есть эффект второго порядка.

2. В гипопругой, упруго-пластической и многих других средах невозможно определить скорость распространения ударных волн [8]. На примере гипопругой среды покажем, как с помощью теории о структуре ударных волн можно устранить эту неопределенность, включая параллельно с гипопругим элементом вязкий элемент.

Определяющие уравнения для гипопругой среды запишем в виде [9]

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad 2\varepsilon_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \quad (2.1)$$

Ковариантная производная по времени по Яуману в подвижной системе координат имеет вид

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = (v_3 - G) \sigma_{ij,3} + v_\alpha \sigma_{ij,\alpha} + \frac{1}{2} \sigma_{kj} (v_{k,i} - v_{i,k}) + \frac{1}{2} \sigma_{ki} (v_{k,j} - v_{j,k}) \quad (2.2)$$

Разделив (2.1) на $(v_3 - G)$ и интегрируя по x_3 от заднего ударного фронта до переднего, получим

$$[\sigma_{ij}] + \frac{\delta_{i3}}{2} P_{kjk} + \frac{\delta_{j3}}{2} P_{kik} - \frac{1}{2} (P_{zij} + P_{zji}) = \lambda J_3 \delta_{ij} + \mu (\delta_{j3} J_i + \delta_{i3} J_j) \quad (2.3)$$

Здесь

$$P_{ijk} = \int_{v_k^-}^{v_k^+} \frac{\sigma_{ij} dv_k}{v_3 - G}, \quad J_i = \int_{v_i^-}^{v_i^+} \frac{dv_i}{v_3 - G} \quad (2.4)$$

Если пренебречь нелинейными членами в (2.1), то в (2.3) следует положить $P_{ijk} = 0$. В этом случае получим те же ударные волны, что и в линейной упругой среде. Если учитывать влияние нелинейных членов в (2.1) на распространение ударной волны, то необходимо найти значение величин P_{ijk} и J_α . Для этого предположим вначале, что внутри ударной волны течение вязкое, описываемое реологической моделью при параллельном соединении гипопругого элемента с вязким.

Решая задачу о структуре ударных волн, интегрированием в (2.4) можно найти P_{ijk} и J_α . Устремляя после этого вязкость к нулю, получим предельное значение этих величин, а толщина ударной волны снова станет нулевой.

После исследования структуры ударной волны, пренебрегая нелинейными членами в определяющих уравнениях (2.1), согласно лемме 2, имеем

$$\frac{v_i - v_i^+}{[v_i]} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^+}{[\sigma_{ij}]} = v(x_k, t), \quad -1 \leq v \leq 0 \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), при $[v_3] \neq 0$ получим

$$J_i = \frac{[v_i]}{[v_3]} \ln \frac{v_3^+ - G}{v_3^- - G}, \quad P_{ijk} = \frac{[\sigma_{ij}][v_k]}{[v_3]} + \frac{\sigma_{ij}^-(v_3^+ - G) - \sigma_{ij}^+(v_3^- - G)}{[v_3]} J_k \quad (2.6)$$

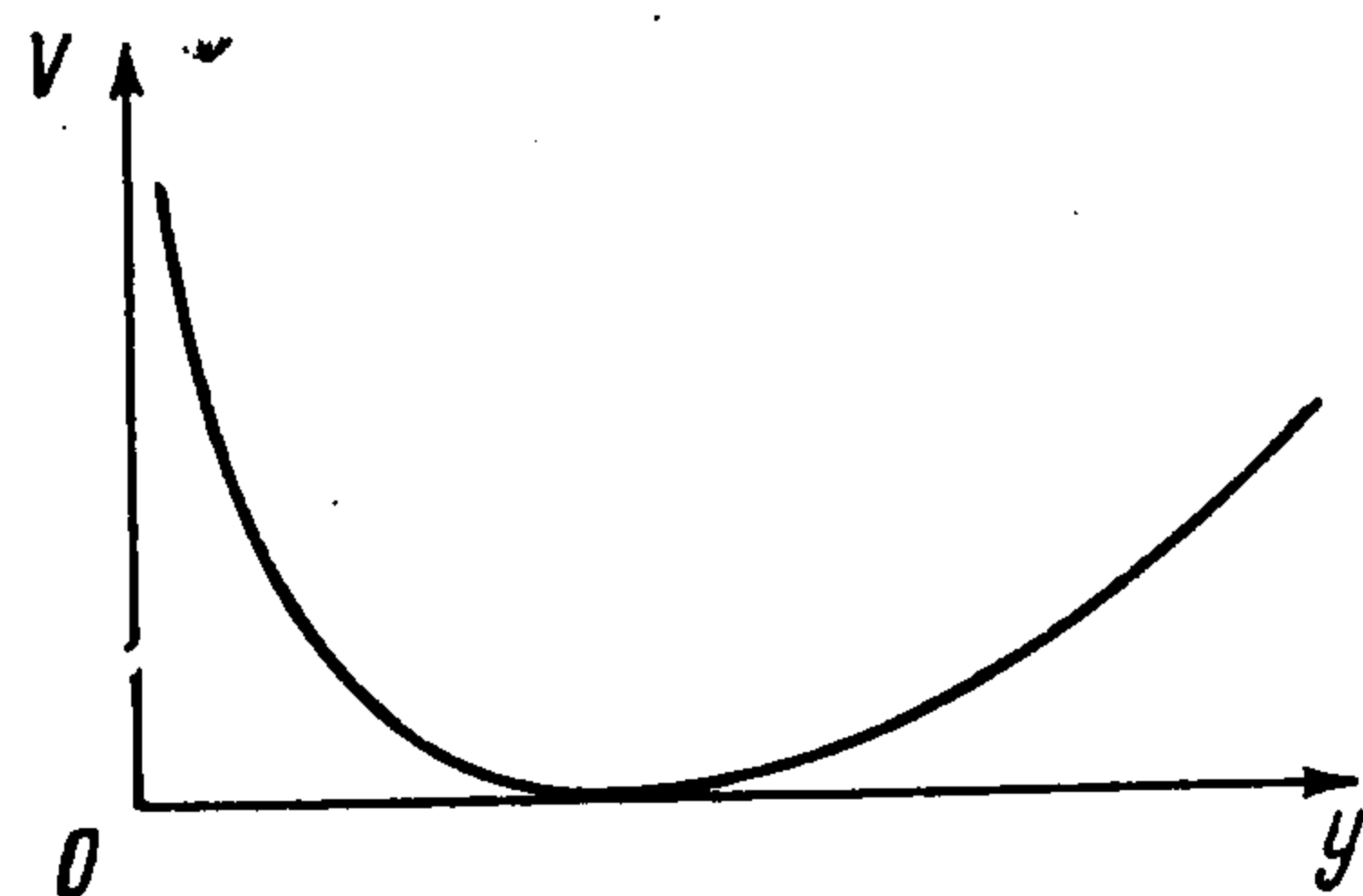
Если $[v_3] = 0$, то из (2.4) следует

$$J_i = \frac{[v_i]}{v_3 - G}, \quad P_{ijk} = \sigma_{ij}^* J_k, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) \quad (2.7)$$

Рассмотрим распространение продольной ударной волны при $[v_\alpha] = 0$ и $[v_3] \neq 0$. В этом случае $P_{ij\alpha} = J_\alpha = 0$ и, следовательно, эффект вращения среды не влияет на распространение ударных волн. Решая совместно (1.15), (2.3) и (2.6), получим

$$[\sigma_{i\alpha}] = 0, \quad \ln y = \frac{V}{y-1}, \quad y = \frac{G - v_3^+}{G - v_3^-}, \quad V = \frac{\rho^- [v_3]^2}{\lambda + 2\mu} \quad (2.8)$$

Для заданных v_3^\pm и ρ^- из (2.8) найдем два значения y_1 и y_2 , соответствующие двум возможным скоростям распространения продольной ударной волны в гипотупругой среде. Нетрудно установить, что $y_1 \geq 1$, $y_2 \leq 1$. Решая эти неравенства, найдем, что реализуется первый случай, если v_3^- лежит между v_3^+ и G , второй случай реализуется, если v_3^+ лежит между v_3^- и G . Из анализа уравнения (2.8) также следует, что v_3^+ и v_3^- одновременно больше или меньше скорости G ударной волны.



Вид зависимости скорости ударной волны от величины скачка показан на фиг. 1, где V и y согласно (2.8).

В случае распространения поперечной ударной волны, уравнения (1.15), (2.3) и (2.7) сводятся к системе

$$\{\sigma_{\alpha\beta}^* - (\sigma_{33}^* - 2\rho(v_3 - G)^2 + 2\mu) \delta_{\alpha\beta}\} [v_\beta] = 0 \quad (2.9)$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим (2.10)

$$2\rho(G - v_3)^2 = 2\mu - (\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* - 2\sigma_{33}^*) \pm \{(\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*)^2 + (2\sigma_{12}^*)^2\}^{1/2}$$

Из (2.10) следует, что в гипотупругой среде поперечная ударная волна может распространяться с двумя скоростями, близкими к скорости поперечной звуковой волны, не зависящими от гидростатического давления.

3. Исследуем структуру поперечной ударной волны в среде Кельвина [10], для которой $[u_{3,3}] = 0$. Определяющие уравнения запишем в виде

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} + \xi \varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + 2\eta \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

По определению Альманси [9] тензор конечных деформаций

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j} \quad (3.2)$$

Повернем систему координат в плоскости x_1x_2 так, чтобы $[u_{2,3}] = 0$. Выражение скорости через тензор дисторсий найдем из системы

$$v_i = \frac{\delta u_i}{\delta t} - Gu_{i,3} + v_k u_{i,k} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1) в (1.13) и используя (3.2) и (3.3), получим

$$\eta v_{1,3} = B (u_{1,3} - u_{1,3}^+) (u_{1,3} - u_{1,3}^-) - \Phi v_1 - \Phi_1 \quad (3.4)$$

$$B = \frac{\mu}{\Delta} (1 - u_{1,1}) \{u_{2,1}u_{3,2} + u_{3,1}(1 - u_{2,2})\}$$

Здесь Δ — определитель системы уравнений (3.3).

Для установившегося случая из (3.4) получим квадратное уравнение для определения толщины h ударного слоя

$$\alpha h^2 + B [u_{1,3}]^2 h - \gamma [u_{1,3}] = 0 \quad (3.5)$$

Здесь

$$\alpha = A (G - v_3) u_{1,3}^* - A_1, \quad \gamma = 4\eta (G - v_3), \quad A = \rho (v_3 - G) [u_{1,31}]$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} \rho (G - v_3)^2 [u_{1,3}^2]_{,1} + \rho (G - v_3) v_2 [u_{1,32}] - \rho v_{\alpha,\alpha}^* (G - v_3) [u_{1,3}]$$

Из двух корней h_1 и h_2 следует выбрать положительный.

Интегрируя (3.4), найдем изменение v_1 поперек ударного слоя, а из (3.1) находится зависимость σ_{13} от x_3 . Остальные компоненты скорости и напряжений с точностью до малых высшего порядка можно считать непрерывными. Влияние малых добавок Φ и Φ_1 на величину толщины ударного слоя в (3.5) сказывается через коэффициент α .

Подобным образом можно исследовать распространение и структуру ударных волн в упруго-пластической среде с различным подсоединением к реологической модели вязкого элемента.

Поступила 23 I 1966

Воронежский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной. Вестн. Московск. ун-та, сер. физ.-матем. и естеств. н., 1953, № 3, стр. 95—100.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических напряжений. М., Физматгиз, 1963.
3. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, 1961.
4. Cristescu N. Elastic-plastic waves in strings. Arch. Mech. Stosowanj, 1960, № 5—6 (Сб. пер., Механика, 1961, № 4, стр. 165—175)
5. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. О распространении слабых разрывов в идеальных упруго-пластических средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1965, № 2.
6. Ландау Л., Лившиц Е. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
7. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., Мир, 1964.
8. Mandel J. Ondes plastiques dans un milieu indéfini á trois dimensions. J. mécs. 1962, vol 1, No 1, (Сб. пер., Механика, 1963, № 5).
9. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. Изд-во иностр. лит., 1963.
10. Реология, т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1962.