

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ВАКУУМ ПРИ СТЕПЕННОМ ЗАКОНЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦЕ

В. Е. Неуважаев

(Челябинск)

Рассматривается плоская автомодельная задача об истечении теплопроводного газа в вакуум. На границе газа с вакуумом задана температура, меняющаяся со временем по степенному закону. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры и плотности степенным образом. Начальная плотность газа полагается постоянной и конечной. В этом случае при определенных значениях степеней задача автомодельна, т. е. система дифференциальных уравнений в частных производных может быть сведена к решению системы обыкновенных уравнений.

На автомодельность решения задачи такого типа ранее указывалось в работах [1,2]. Изучаемая задача является частным случаем задачи о движении поршня, рассмотренной в работе [3]. Однако в предлагаемой задаче на границе с вакуумом возникает новая особая точка, тогда как в случае условий на поршне такой особенности нет.

Численное решение краевой задачи для системы обыкновенных уравнений затруднено из-за наличия особых точек у системы и разрывов в искомом решении. Эти трудности преодолеваются путем качественного исследования поведения интегральных кривых и выбора соответствующего метода численного интегрирования.

В работе показано, что в зависимости от начальных параметров задачи могут существовать два типа решений. Ранее это обстоятельство отмечалось в работах [1,3,4]. Построены примеры этих типов. Указано на вырождение решения в тривиальное, если коэффициент теплопроводности не зависит от плотности, либо зависит, но так, что с увеличением плотности коэффициент теплопроводности увеличивается.

1. Имеется холодный газ с уравнениями состояния

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T$$

Здесь R — газовая постоянная, γ — показатель адиабаты Пуассона, p — давление, ρ — плотность, T — температура, ε — внутренняя энергия. Одномерные уравнения плоского движения в Эйлеровых координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial r} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho u - \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u — скорость, κ — коэффициент теплопроводности. Газ граничит с вакуумом, где задана температура

$$T = T_0 t^n \quad (n > 0, \quad T_0 = \text{const}) \quad (1.2)$$

Если положить, что

$$\kappa = \kappa_0 \rho^{-1} T^{(1+n)/n} \quad (\kappa_0 = \text{const})$$

то задача будет автомодельна. При помощи замены переменных

$$\lambda = \frac{(n+2)r}{2\sqrt{RB_0}t^{1+1/2n}}, \quad T = B_0 t^n \theta(\lambda) \quad (B_0 = \text{const } [T^\circ])$$

$$u = \sqrt{RB_0}t^{1/2n}\zeta(\lambda), \quad \rho = \rho_0 \delta(\lambda) \quad (1.3)$$

система (1.1) сводится к системе обыкновенных уравнений

$$\theta' = -\frac{\delta'}{A}\theta^{-\frac{1+n}{n}}q, \quad \delta' = \frac{\delta\zeta'}{\lambda-\zeta}, \quad A = \frac{\kappa_0}{R^2\rho^{l+1}}B_0^{\frac{1}{n}}$$

$$\zeta' = \left(\theta' + \frac{n}{n+2}\zeta\right)\frac{\lambda-\zeta}{(\lambda-\zeta)^2-\theta}$$

$$q' = -\frac{2\delta}{(2+n)(\gamma-1)}\left[(\gamma-1)\theta\zeta' + \frac{2n}{n+2}\theta + (\zeta-\lambda)\theta'\right] \quad (1.4)$$

Здесь A — безразмерная постоянная.

Вследствие того, что фронт разлета является траекторией частиц, будем иметь

$$u = \frac{dr}{dt} = \sqrt{RB_0}t^{1/2n}\lambda_0$$

Учитывая (1.2) и (1.3), получим

$$\theta_0 = T_0/B_0, \quad \delta_0 = 0, \quad \lambda_0 = \zeta_0 \quad (1.5)$$

В работах [5,6], где влияние газодинамики не рассматривалось, показано, что при $n > 0$ фронт возмущения распространяется с конечной скоростью. Здесь положено $\lambda < \infty$. Величину B_0 всегда можно выбрать так, чтобы на фронте возмущения всегда было $\lambda = 1$; тогда, если $\lambda = 1$,

$$(a) \theta = 0, \quad (б) \zeta = 0, \quad (в) \delta = 1, \quad (г) q = 0 \quad (1.6)$$

Условия (1.6) означают непрерывность гидродинамических величин и теплового потока q на фронте возмущения. Если полагать $\theta'(1) < \infty$, то (г) следует из (а). Но, вообще говоря, условие $\theta'(1) < \infty$ не всегда соблюдается.

2. В дальнейшем при построении решения используются условия на разрыве, которые при наличии теплопроводности имеют вид

$$\rho_1(u_1 - D) = \rho_2(u_2 - D), \quad \rho_1(u_1 - D)^2 + R\rho_1T_1 =$$

$$= \rho_2(u_2 - D)^2 + R\rho_2T_1 \quad (2.1)$$

$$\rho_1(u_1 - D)\left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{R}{\gamma-1}T_1\right) + R\rho_1T_1u_1 - \kappa_1\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_1 =$$

$$= \rho_2(u_2 - D)\left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{R}{\gamma-1}T_1\right) + R\rho_2T_1u_2 - \kappa_2\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_2$$

Здесь D — скорость разрыва, индексом 1 обозначены величины перед разрывом, индексом 2 — за разрывом. При выводе уравнений использован тот факт, что температура непрерывна при переходе от переднего к заднему фронту разрыва (изотермичность).

Так как изучается автомодельная задача, то разрыв всегда будет λ -линией, поэтому

$$D = \sqrt{RB_0 t^{1/2n}} \lambda_1 \quad (2.2)$$

Подстановка (1.3) и (2.2) в (2.1) дает

$$\zeta_2 = \lambda_1 + \frac{\theta_1}{(\zeta_1 - \lambda_1)}, \quad \delta_2 = \frac{\delta_1 (\zeta_1 - \lambda_1)^2}{\theta_1}, \quad q_2 = q_1 + \frac{\gamma \delta_1}{2+n} \frac{(\zeta_1 - \lambda_1)^4 - \theta_1^2}{\zeta_1 - \lambda_1} \quad (2.3)$$

3. Точка M ($\lambda = 1$, $\theta = 0$, $\zeta = 0$, $\delta = 1$, $q = 0$), отвечающая фронту возмущения (1.6), будет особой; она принадлежит многообразию особых точек $\theta = 0$, $q = 0$. Выделяя главные члены в правых частях системы (1.4), можно найти интегральные кривые, которые проходят через точку M . Особая точка M такова, что можно указать только единственную интегральную кривую, выходящую из точки и лежащую в интересующей нас области. Решение вблизи фронта возмущения приближенно описывается формулами

$$k = \left[\frac{2(n+1)}{A(n+2)(\gamma-1)n} \right]^{\frac{n}{n+1}}, \quad \theta = k(1-\lambda)^{\frac{n}{n+1}}, \quad \delta = e^\xi \quad (3.1)$$

$$\zeta = \frac{nk}{n+1} \exp \frac{n\lambda}{n+2} \int_1^\lambda (1-\lambda)^{\frac{-1}{n+1}} \exp \frac{-n\lambda}{n+2} d\lambda$$

Отметим, что при $n > 0$ имеем $n/(n+1) < 1$, т. е. температура на фронте имеет бесконечную производную.

4. Известно, что газ без теплопроводности истекает с конечной скоростью $-2c_0/(\gamma-1)$, если c_0 — начальная скорость звука покоившегося газа. В работе автора [7] было отмечено, что под действием энерговыделения газ истекает с бесконечной скоростью. В рассматриваемой задаче теплопроводный газ также разлетается с бесконечной скоростью. Докажем это¹.

Покажем, что если $\zeta_0 = \lambda_0$ — конечная величина, то $\delta(\lambda_0) \neq 0$. Из уравнений (1.4) следует, что

$$(\ln \delta)' = \left(\theta' + \frac{n}{n+2} \zeta \right) [(\lambda - \zeta)^2 - \theta]^{-1} \equiv f(\lambda)$$

Проинтегрируем последнее уравнение в некотором промежутке $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ и получим

$$\delta(\lambda) = \delta(\lambda_1) \exp - \int_\lambda^{\lambda_1} f(\lambda) d\lambda \quad (4.1)$$

Разобьем интеграл в (4.1) на два

$$J(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda_1} f(\lambda) d\lambda = - \frac{n}{n+2} \int_\lambda^{\lambda_1} \frac{\zeta d\lambda}{(\lambda - \zeta)^2 - \theta} - \int_\lambda^{\lambda_1} \frac{\theta' d\lambda}{(\lambda - \zeta)^2 - \theta}$$

¹ Доказательство в лагранжевых координатах автору любезно сообщили С. П. Курдюмов и П. П. Волосевич.

и рассмотрим $\lim J$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$. Очевидно, что первый интеграл ограничен. Второй — также ограничен. Действительно, в окрестности точки λ_0 его можно заменить

$$-\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\theta' d\lambda}{(\lambda - \zeta)^2 - \theta} = c_2 + \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\theta'}{\theta} d\lambda = c_2 + \ln \frac{\theta(\lambda_1)}{\theta(\lambda_0)}$$

Здесь c_2 — ограниченная постоянная. Следовательно, интеграл

$$J(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0} J(\lambda) = c_1 + c_2 + \ln \frac{\theta(\lambda_1)}{\theta(\lambda_0)}$$

ограничен и $\delta(\lambda_0) \neq 0$, а это противоречит условию (1.5). Поэтому скорость разлета не может быть конечной. Заметим, что доказательство верно при любом l .

Если считать, что $\zeta_0 = -\infty$, то можно указать такую интегральную кривую, для которой $\delta_0 = 0$. Это будет сделано в п. 6.

5. Выражение для безразмерного потока дается формулой из (1.4)

$$q = -A\delta^{-l} \theta^{\frac{1+n}{n}} \theta'$$

По физическому смыслу поток на фронте разлета должен быть конечным и положительным. Поэтому

$$\begin{aligned} \theta'(-\infty) &= 0 \quad (l > 0); & \theta'(-\infty) < 0 \neq \infty \quad (l = 0) \\ \theta'(-\infty) &= -\infty \quad (l < 0) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из того, что $\theta'(-\infty) \neq 0$, когда $l \leq 0$, $\theta(\lambda) \geq 0$ для $-\infty < \lambda \leq 1$ вытекает: $\theta_0 = \infty$. Следовательно, задача поставленная в п. 1, может иметь смысл только в том случае, если температуру на границе считать бесконечно большой. Это значит, что при степенном законе температуры (1.2), когда T_0 конечно и $l \leq 0$, задача имеет вырожденное решение. Разлетающаяся с бесконечной скоростью граница запирает поток тепла на бесконечности и никакого движения при этом не происходит.

6. Условиям на разлетающейся границе (1.5) отвечает точка

$$N(\lambda = -\infty, \theta = \theta_0, \zeta = -\infty, \delta = 0, q = q_0) \quad (6.1)$$

где θ_0 и q_0 подлежат определению. Точка N , как и точка M , для системы (1.4) является особой и принадлежит многообразию особых точек

$$\lambda = -\infty, \quad \zeta = -\infty, \quad \delta = 0$$

Из условий (6.1) и (5.1) вытекает, что $\theta'_0 = 0$ при $l > 0$. Поэтому уравнение для ζ' из (1.4) в окрестности точки N можно приближенно заменить уравнением

$$\zeta' = \frac{n\zeta(\lambda - \zeta)}{(n+2)[(\lambda - \zeta)^2 - \theta_0]} \quad (6.2)$$

Применим преобразование $\zeta = 1/y$, $\lambda = 1/x$ и рассмотрим поведение интегральных кривых вблизи точки $(x = 0, y = 0)$ в квадранте $x \leq 0, y \leq 0$. Уравнение (6.2) примет вид

$$y' = \frac{n(y-x)y^2}{(n+2)[(x-y)^2 - \theta_0 x^2 y^2]} \quad (6.3)$$

а особая точка перейдет в начало координат. Характер ее устанавливается на основании результатов Фроммера [8]. Обозначим

$$y/x = u, \quad \psi(u, x) = y'(x, u) - u$$

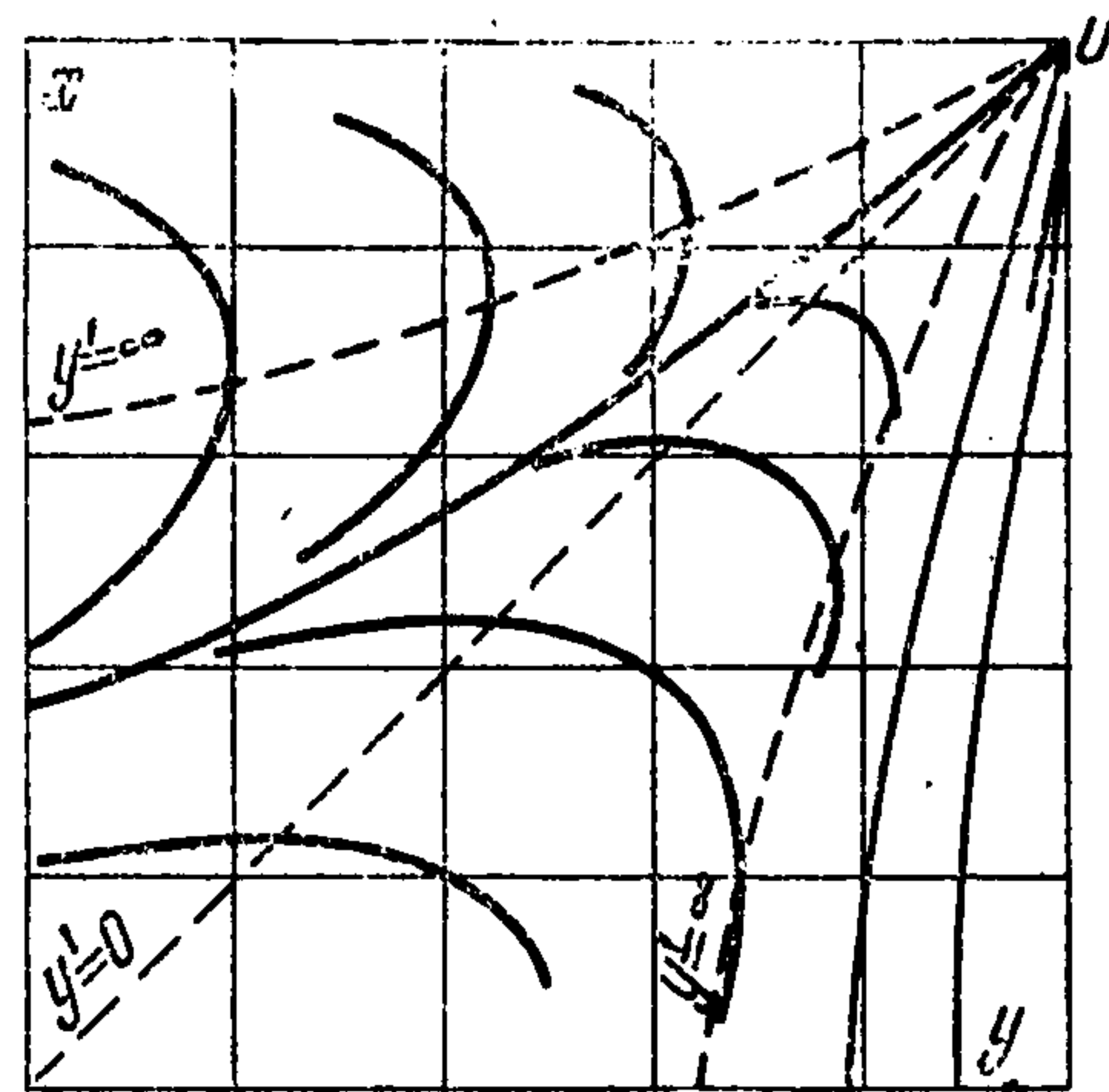
Критическими направлениями, вдоль которых интегральные кривые могут входить в особую точку, в данном случае будут

$$(1) u = 0, \quad (2) u = 1, \quad (3) u = (n+2)/n, \quad (4) u = \infty$$

Согласно [8], можно получить следующие качественные выводы. Направление (1) имеет единственная интегральная кривая — координатная ось $y = 0$ (так как $\partial\psi/\partial u < 0$ при $x = 0, u = 0$). С наклонами (2) и 3) проходит через начало координат также по одной кривой ($\partial\psi/\partial u < 0$ при $u = 1, x = 0$, $\partial\psi/\partial u < 0$ при $u = (n+2)/n, x = 0$). Направление (4) имеет бесконечное множество интегральных кривых. Качественная картина кривых уравнения (6.3) представлена на фиг. 1.

Кривая с наклоном (2) будет искомым решением и может быть разложена в ряд

$$y = x - \theta_0 \frac{n+2}{n} x^3 + \dots \quad (6.4)$$



Фиг. 1

Решения (3) и (4) следует отбросить, так как их подстановка в (1.4) приводит к отрицательной плотности в окрестности точки N .

Если воспользоваться разложением (6.4) и выражением для δ' из (1.4), то можно показать, что $\lim \delta(\lambda) = 0$ при $\lambda = -\infty$, т. е. граничное условие (1.5) будет выполнено.

7. Решение системы уравнений (1.4) зависит от безразмерного параметра A . Его изменение связано с коэффициентом κ_0 . При $A = \infty$ можно положить

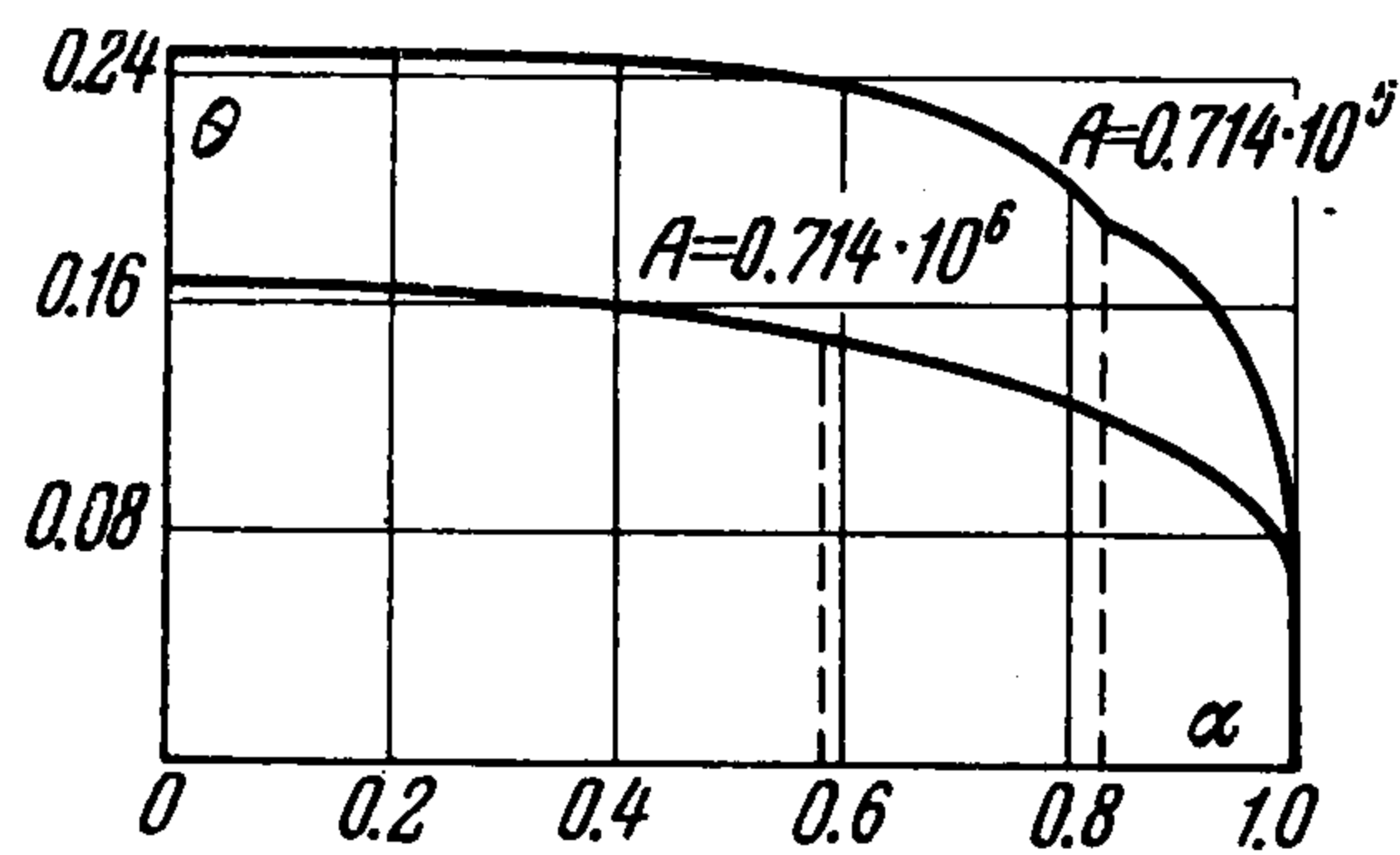
$$\theta'(\lambda) = 0 \quad (7.1)$$

и рассматривать уравнение (6.2). В (1.5) можно принять $B_0 = T_0$, тогда $\theta(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Уравнение (6.2) решается при следующих граничных условиях: $(\lambda = -\infty, \zeta = -\infty)$ и $(\lambda = \infty, \zeta = 0)$. Точка $(\lambda = \infty, \zeta = 0)$ для уравнения (6.2) будет изолированной и особой и имеет характер седла. Ось $\zeta = 0$ при $1 \leq \lambda < \infty$ будет решением. Точка $(\lambda = 1, \zeta = 0)$ будет особой типа узла; она соответствует слабому разрыву. Решение в интервале $(-\infty, 1)$ определяется численно.

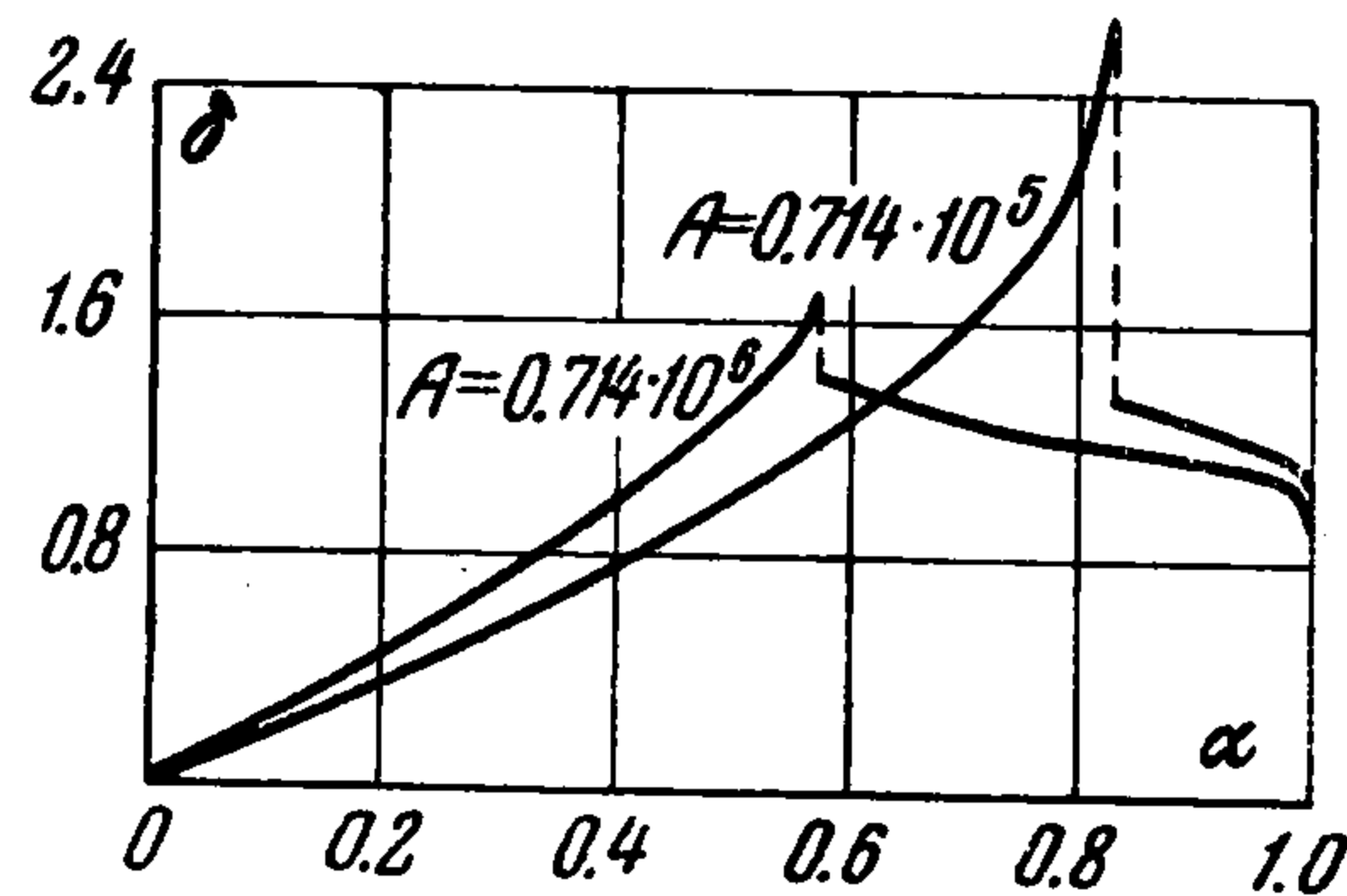
Итак, при $A = \infty$ тепловая волна мгновенно прогревает весь газ, граница газа с вакуумом при $t > 0$ улетает на бесконечность, а по покоящемуся газу с изотермической скоростью звука $\sqrt{RT_0} t^{1/2n}$ распространяется волна разрежения.

8. При $A \neq \infty$ задача сводится к определению решения, удовлетворяющего системе уравнений (1.4) с граничными условиями (3.1) и (6.1). Задача решается численно. При интегрировании от $\lambda = 1$ к $\lambda = -\infty$ встречается, как и в задаче [4], точка λ° , ζ° , в которой $d\lambda/d\zeta = 0$, $d^2\lambda/d\zeta^2 > 0$. Возникающая особенность не позволяет построить непрерывное решение, поэтому строится решение разрывным с использованием соотношений на разрыве (2.3). Получающийся при этом свободный параметр λ позволяет удовлетворить одному из условий (6.1), а именно: $\zeta = -\infty$ при $\lambda = -\infty$. Условие $\delta_0 = 0$ выполнится автоматически.

9. На основании проведенных расчетов можно предположить существование некоторого значения $A = A_*$, разделяющего все решения задачи на два класса.

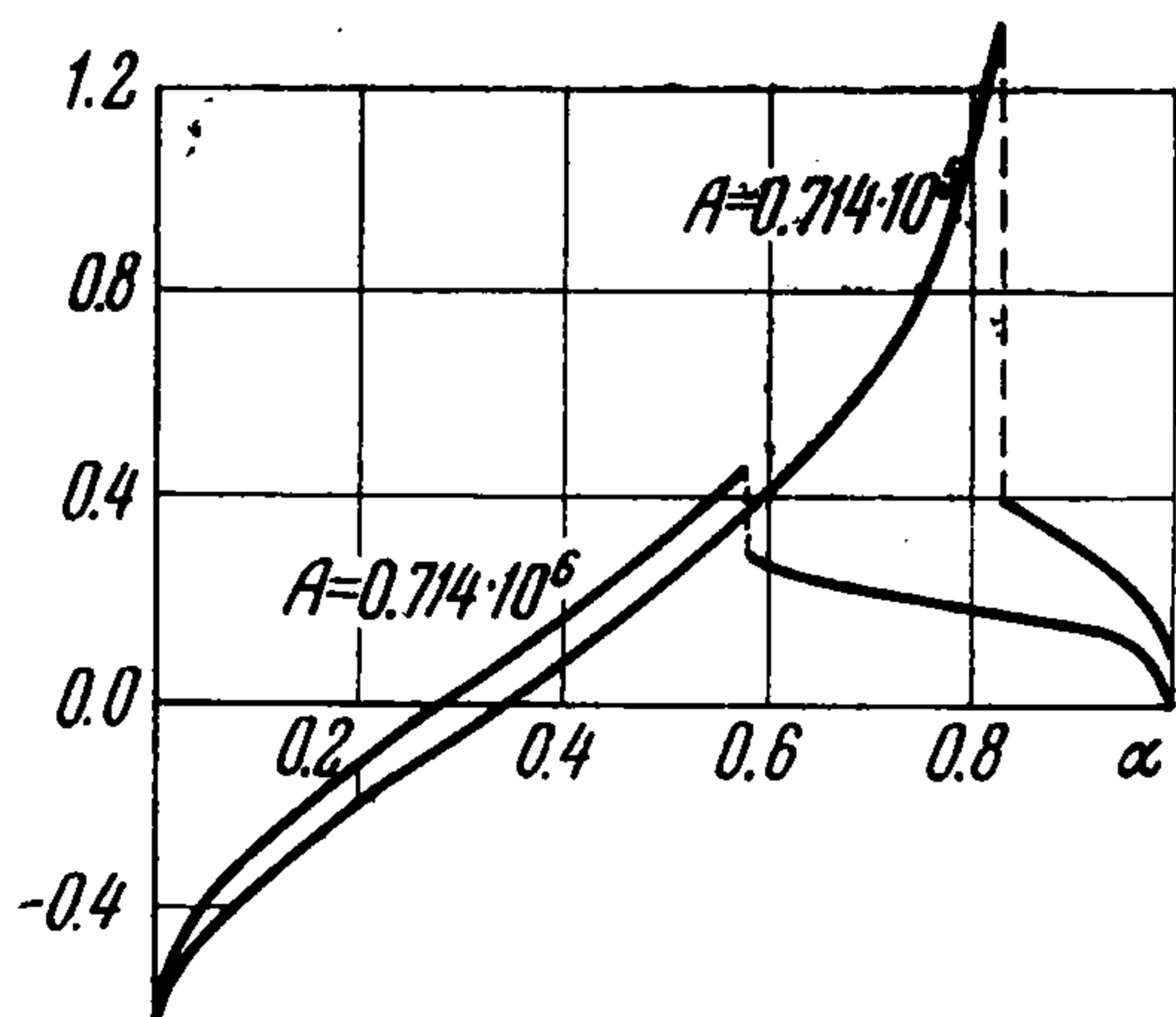


Фиг. 2

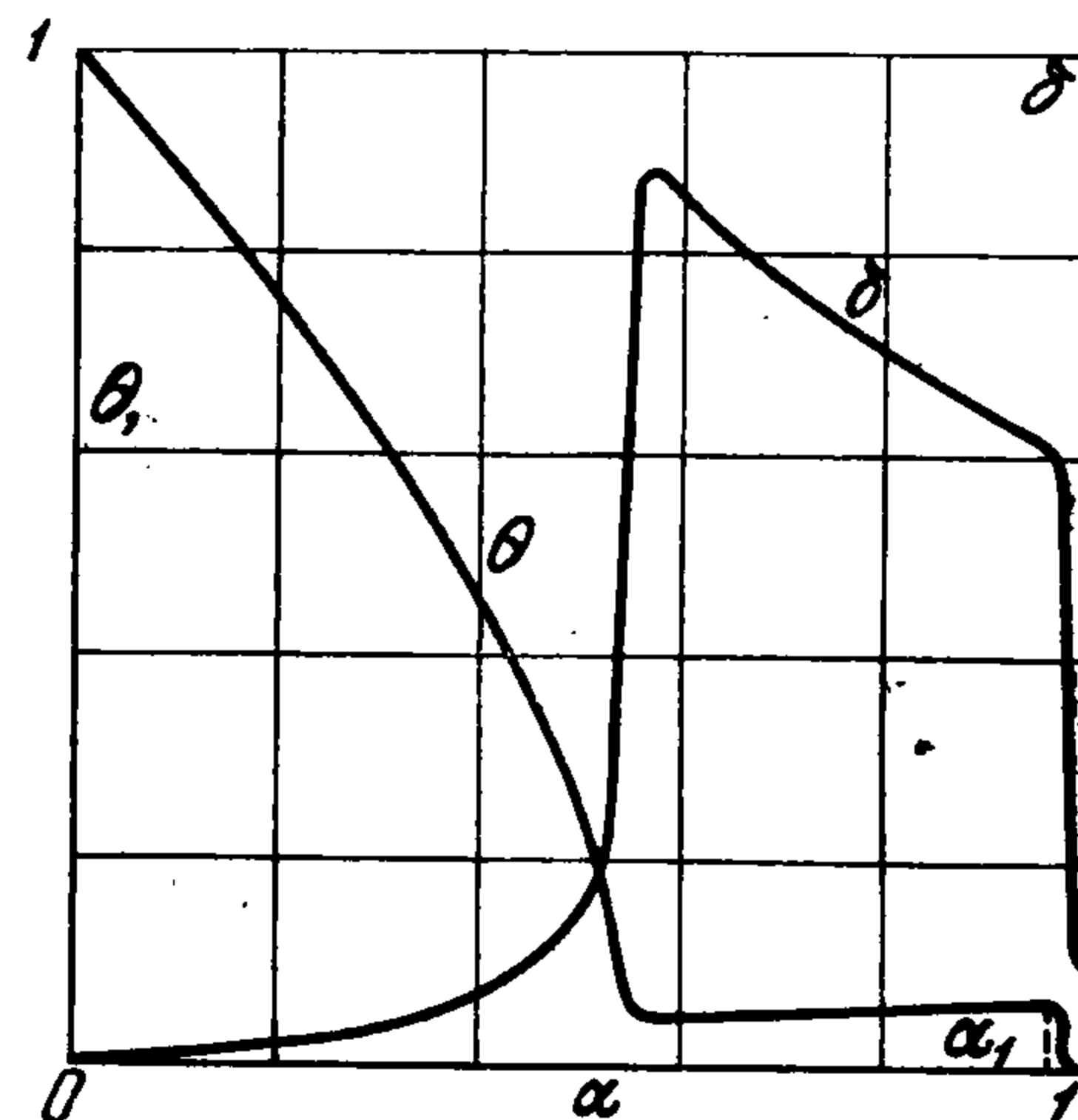


Фиг. 3

При $A_* < A < \infty$ температура $\theta(\lambda)$ будет монотонной на интервале $(-\infty, \lambda_1]$, $\min \theta$ достигается в точке λ_1 . Решение качественно можно описать так: по покоящемуся газу при $t > 0$ распространяется возмущение, на фронте которого все величины T , ρ , u , κ ($\partial T/\partial r$) меняются непрерывно и терпят разрыв только их производные. Такое возмущение называют тепловым фронтом. За тепловым фронтом распространяется сильный изотермический разрыв, а левая граница разлетается в вакуум с бесконеч-



Фиг. 4



Фиг. 5

ной скоростью. Между вакуумом и изотермическим разрывом все гидродинамические величины и температура меняются монотонно. Примеры таких решений приводятся на фиг. 2—4 для следующих значений параметров: $\gamma = 1.4$, $n = 0.2$, $l = 3$, $A = 0.714 \cdot 10^6$, $A = 0.714 \cdot 10^5$. На фиг. 2—6 введены новые переменные α и z посредством соотношений

$$\alpha \int_{-\infty}^1 \delta d\lambda = \int_{-\infty}^{\lambda} \delta d\lambda, \quad z(1 - \zeta) = \zeta$$

При $0 < A < A_*$ температура $\theta(\lambda)$ не будет монотонной на интервале $(-\infty, \lambda_1]$, а $\min \theta$ получится в некоторой точке λ_2 , $-\infty < \lambda_2 < \lambda_1$, причем $\theta'(\lambda_2) = 0$, а следовательно, и поток $q(\lambda_2) = 0$.

Гидродинамические величины ζ и δ принимают максимальное значение в некоторой точке λ_3 . Из анализа уравнений (1.4) следует, что в интервале $(-\infty, \lambda_1]$ все величины ζ , δ , θ , q изменяются гладко, а также, что λ_3 лежит внутри интервала $(-\infty, \lambda_2]$.

Пример решения второго класса приведен на фиг. 5—6 при следующих значениях параметров: $\gamma = 1.4$, $n = 1$, $l = 1$, $A = 0.625$. Заметим, что это решение методом, изложенным в п. 10, получить не удалось. Решалась исходная система уравнений (1.1) разностным методом, изложенным в работе [9].

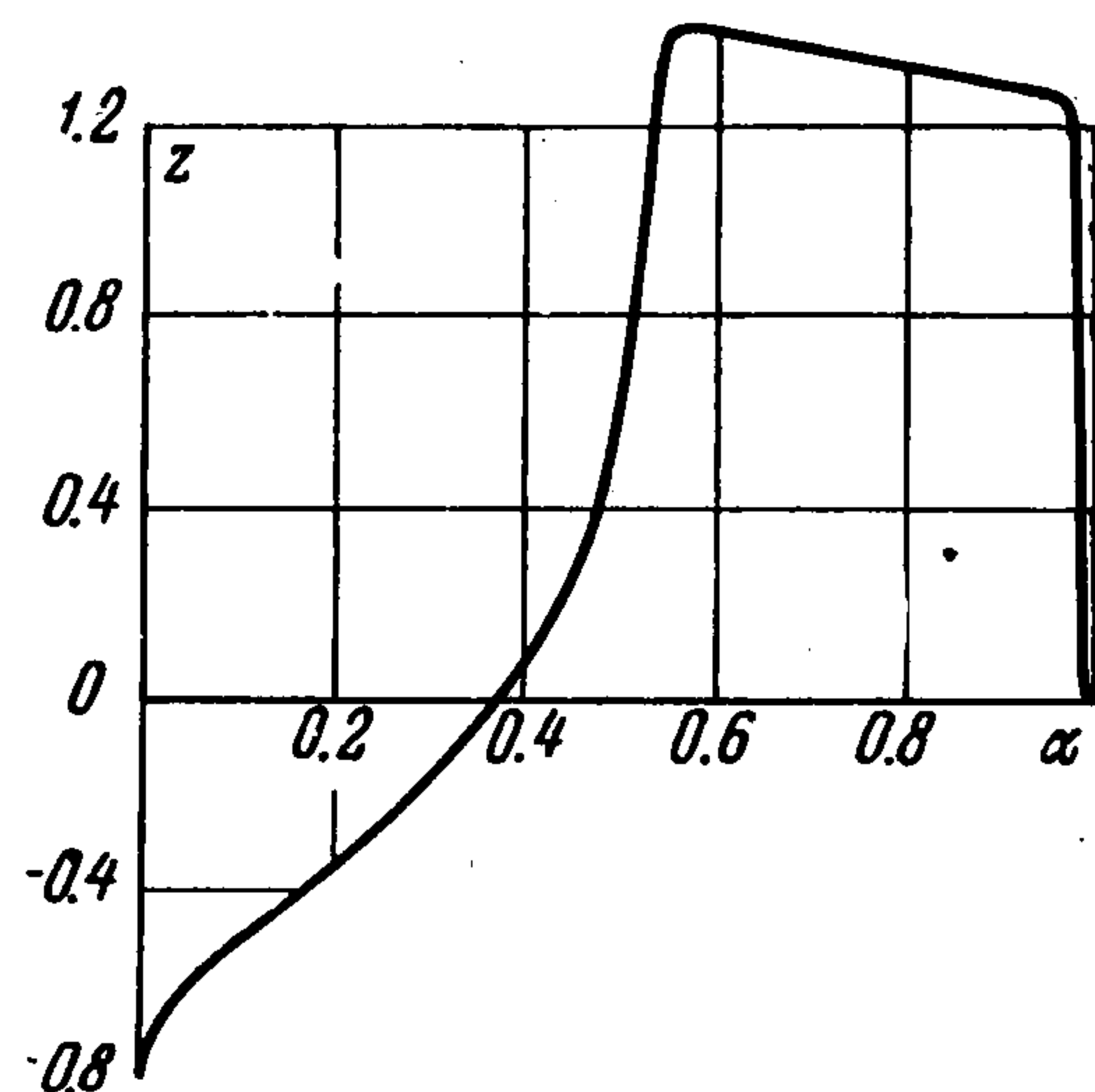
10. Численное интегрирование системы (1.4) от точки $\lambda = 1$ к точке $\lambda = \lambda_1$ ведется обычным поточечным методом. На интервале $[\lambda^0, 1]$ счет в указанном направлении не приводит к потере точности. Трудности, связанные с потерей верных знаков, получаются при численном интегрировании на интервале $(-\infty, \lambda_1]$. Возникающую краевую задачу обычной пристрелкой решить нельзя. При $A_* \leq A < \infty$ строится следующий итерационный процесс: уравнение для ζ' из (1.4) при заданной функции $\theta(\lambda)$ с использованием разложения (6.4) интегрируется от $\lambda = -\infty$ к $\lambda = \lambda_1$, уравнения для θ' , δ' и q' интегрируются по найденной функции $\zeta(\lambda)$ от $\lambda = \lambda_1$ к $\lambda = -\infty$, причем уравнение для δ' решается при помощи квадратуры (4.1). Такой процесс повторяется до схождения, при этом будут удовлетворены условия на левой границе (6.1), а на правой при $\lambda = \lambda_1$ получится некоторое значение ζ_2^0 , вообще не равное известному ζ_2 . Параметр λ_1 подбирается таким образом, чтобы имело место равенство $\zeta_2^0 = \zeta_2$.

В заключение автор благодарит Яненко Н. Н. за полезные обсуждения. Часть расчетов п. 9 выполнена Ивченко Т. Т., за что автор выражает свою признательность.

Поступила 1 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Marschak R. Effect of the radiation on shock waves. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, N 1.
2. Коробейников В. П. О распространении сильной сферической взрывной волны в теплопроводном газе. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 5.
3. Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Бусурина Л. Н., Крус В. П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 1.
4. Неуважаев В. Е. Распространение сферической взрывной волны в теплопроводном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
5. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посвященный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
6. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
7. Неуважаев В. Е. Истечение газа в вакуум при степенном законе энерговыделения. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 5.
8. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. Усп. матем. н., 1941, вып. 9.
9. Яненко Н. Н., Неуважаев В. Е. Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1966, т. 74.



Фиг. 6