

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ. МЕТОД СИЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

В. П. Докучаев

(Горький)

Предлагается метод силовых источников для решения линейных задач о взаимодействии твердых тел с жидкостями и газами. Метод основан на введении силовых источников возмущений в уравнения движения жидких сред. Граничные условия на поверхности твердого тела позволяют свести задачу об определении гидродинамических реакций к интегральному уравнению для функции силовых источников. Метод иллюстрируется на примерах решения трех простых задач, относящихся к акустике, вязкому обтеканию тела и обтеканию сжимаемой средой.

В линейной теории обтекания твердых тел и в акустике при исследованиях генерации звуковых волн важное место занимает вопрос о нахождении гидродинамических реакций, действующих со стороны среды на движущиеся, пульсирующие или осциллирующие тела. Эти реакции проявляются в виде постоянных или переменных механических сил, таких, как сила лобового сопротивления и подъемная сила, а также сила волнового сопротивления акустических излучателей. Различные методы расчета этих сил изложены, например, в монографиях [1-5].

Здесь предлагается иной подход к определению поверхностных сил, действующих на твердые тела со стороны жидкостей и газов. При помощи формализма обобщенных функций в уравнения движения жидких сред можно ввести источник возмущений в виде объемной плотности сил, действующих со стороны твердого тела на газ. Распределение поверхностного напряжения, входящее в выражение для этой силы, выбирается таким образом, чтобы на поверхности тела выполнялись соответствующие граничные условия. В результате этого приема удается свести задачи об определении поверхностных сил, действующих на тело, к решению некоторых интегральных уравнений. Предлагаемый метод вполне аналогичен хорошо известному методу источников и стоков [1-4]. Оба метода сводят задачу о взаимодействии тел с газом к решению интегральных уравнений. Однако метод источников и стоков приводит к интегральному уравнению, описывающему распределение фиктивных источников и стоков для плотности среды в объеме обтекаемого тела, в то время как метод силовых источников приводит к интегральному уравнению, описывающему непосредственно распределение механических сил по поверхности твердого тела¹.

Заметим, что в работах [6,7] метод силовых источников уже частично использовался для определения излучения звука точечными силовыми источниками.

1. Основные уравнения и силовые источники возмущений. Система линейных уравнений, описывающая малые возмущения в вязкой сжимаемой среде, может быть представлена в виде [8]

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad div } \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = Q(\mathbf{r}, t), \quad dp = c_s^2 d\rho \quad \left(c_s = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \right) \quad (1.2)$$

¹ Здесь, конечно, предполагается, что тело не имеет специальных инжестирующих устройств, а также отсутствует сильное испарение вещества с поверхности тела, которое может иметь место при гиперзвуковых скоростях движения.

Граничные условия на поверхности S твердого тела имеют вид $v_{nS} = V_0 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}_0)$ для невязкой среды, $\mathbf{v}_S \stackrel{\text{ш}}{=} \mathbf{V}_0$ для вязкой среды (1.3)

где ρ_0 , p_0 и V_0 — соответственно плотность, давление и скорость в невозмущенной среде; ρ , p и \mathbf{v} — возмущения этих величин; η и ζ — коэффициенты вязкости; c — скорость звука в среде; $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V}_0 \nabla)$ — полная производная по времени в системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{V}_0 .

В дальнейшем будем считать $Q = 0$, так как предполагается, что тело не имеет специальных инжектирующих устройств и отсутствует испарение вещества с его поверхности.

Обозначим через $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ силу, действующую на малую площадку поверхности тела. Тогда, пользуясь формализмом обобщенных функций [9,10], можно записать объемную силу \mathbf{f} в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{P} \delta[\varphi(\mathbf{r}, t)] |\text{grad } \varphi| \quad (1.4)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — уравнение поверхности тела, которая в общем случае может пульсировать, либо осциллировать, если, например, интересоваться излучением звуковых волн, $\delta[\varphi]$ — функция Дирака [9,10]. Полная сила \mathbf{F} , действующая со стороны тела на газ, определяется интегралом

$$\mathbf{F} = \iiint \mathbf{f} dx dy dz = \iint_S \mathbf{P} ds \quad (1.5)$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений известно, что решение системы (1.1), (1.2) можно представить в виде

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int G_{ik}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') f_k(\mathbf{r}', t') dr' dt' \quad (1.6)$$

где v_i и f_k — компоненты скорости и силы, G_{ik} — тензорный оператор Грина для исходной линейной системы (1.1), (1.2). Для удобства введено обозначение ($d\mathbf{r}' = dx' dy' dz'$). Интегрирование по t' можно провести либо по опережающим t_+ , либо по запаздывающим t_- моментам времени, по отношению к времени действия источника.

Подставляя (1.4) в выражение (1.6) и требуя, чтобы на поверхности тела выполнялись граничные условия (1.3), получим следующее интегральное уравнение для функции $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$:

$$v_i(\mathbf{r}_S, t) = \iint_S \int_0^{t_{\pm}} G_{ik}(\mathbf{r}_S, t | \mathbf{r}_S', t') P_k(\mathbf{r}_S', t') ds' dt' \quad (1.7)$$

Таким образом, определение поверхностной силы \mathbf{P} сводится к решению интегральных уравнений (1.7) с ядрами в виде тензорной функции Грина, которая предполагается известной.

Заметим, что при выводе (1.7) нигде не предполагался потенциальный характер взаимодействия тела со средой и уравнение (1.7) позволяет определить полную силу, действующую на среду и состоящую в общем случае из вихревой и потенциальной части. С другой стороны, если в уравнении непрерывности (1.2) оставить источники и стоки $Q(\mathbf{r}, t)$, положить $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0$ в (1.1) и провести соответствующие вычисления, то можно прийти к интегральному уравнению для функции $Q(\mathbf{r}, t)$. Совершенно очевидно, что

при этом фактически используется предположение о потенциальном обтекании. Поэтому, например, в вязкой среде возникает необходимость дополнительно вводить в рассмотрение вихревые источники. Обсуждаемый здесь метод силовых источников не требует этих дополнительных построений и естественным путем позволяет определять как потенциальную, так и вихревую часть сил реакции среды. Для иллюстрации метода силовых источников рассмотрим вначале две простые задачи.

Первый пример относится к вязким течениям. Найдем возмущения в вязкой несжимаемой среде, создаваемые круговым цилиндром радиуса a и бесконечно протяженным по оси z цилиндрической системы координат (r, z, φ) , который медленно вращается с угловой скоростью ω_0 вдоль указанной оси. Определим также силу, тормозящую вращение цилиндра. Параметры течения не зависят от φ и уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} = \frac{f_\varphi}{\eta} \quad (1.8)$$

Вследствие того, что уравнение поверхности тела имеет простой вид $r = a$, из соотношения (1.4) получим

$$f_\varphi = \frac{T}{2\pi r} \delta(r - a) \quad (1.9)$$

Подставляя f_φ в выражение (1.5) и интегрируя по φ и r , убеждаемся, что неизвестная постоянная T будет силой, действующей на единицу длины цилиндра.

В этом простом примере можно обойтись без предварительного определения функции Грина. Применяя преобразование Ханкеля к уравнению (1.8) и (1.9) и пользуясь теоремой обращения [11], будем иметь

$$v_\varphi(r) = \frac{T}{4\pi\eta} \times \begin{cases} a/r & \text{при } r \geq a \\ r/a & \text{при } r \leq a \end{cases} \quad (1.10)$$

Для определения T используем граничное условие $v_\varphi(a) = a\omega_0$

$$T = 4\pi\eta a\omega_0 \quad (1.11)$$

Этот результат хорошо известен в гидродинамике, где он получен путем решения краевой задачи для уравнения (1.8) без правой части [8].

В качестве второго примера рассмотрим задачу из акустики о силе реакции излучения звуковых волн пластиной, совершающей гармонические колебания с частотой ω_0 и амплитудой a вдоль оси z , перпендикулярной к плоскости пластины. В невязкой сжимаемой среде из уравнений (1.1)–(1.2) будем иметь для смещения частиц среды $\xi(z, t)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 c^2} f_z(z, t) \quad (1.12)$$

Граничное условие на поверхности пластины

$$\xi|_S = a \sin \omega_0 t \quad (1.13)$$

Сила f_z в соответствии с (1.4) запишется в виде

$$f_z(z, t) = P(t) \delta(z - a \sin \omega_0 t) \quad (1.14)$$

где неизвестная функция $P(t)$ — давление на поверхность пластины. Функция Грина для уравнения (1.12) с запаздывающим аргументом имеет вид

$$G(z, t | z', t') = 2\pi c H \left[t - t' - \frac{z - z'}{c} \right], \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь $H(x)$ — функция Хевисайда [10]

Подставляя соотношения (1.13)–(1.15) в общую формулу (1.7), выполняя интегрирование по z' и дифференцируя интегральное уравнение по t , получим

$$\rho_0 a \omega_0 c \cos \omega_0 t = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t') \delta \left[t - t' - \frac{a}{c} (\sin \omega_0 t - \sin \omega_0 t') \right] dt' \quad (1.16)$$

Решение этого интегрального уравнения

$$P(t) = \rho_0 a \omega_0 c \cos \omega_0 t (1 - M \cos \omega_0 t) \quad (M = a \omega_0 / c) \quad (1.17)$$

Здесь M — число Маха. Появление второй гармоники в выражении для $P(t)$ обусловлено эффектом Доплера от колеблющейся пластинки.

2. Объемный силовой источник простого вида в сжимаемом потоке. Рассмотрим задачу о возмущениях, создаваемых в жидкой сжимаемой среде объемным силовым источником простейшего вида. В цилиндрической системе координат простой силовой источник возмущений зададим в виде следующей функции

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(r, z, t) &= \frac{F}{2\pi a^2 l} \mathbf{e}_z && \text{при } |z - V_0 t| \leq l, \quad r \leq a \\ \mathbf{f}(r, z, t) &= 0 && \text{в остальном пространстве} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где координата z выбрана вдоль скорости потока V_0 , \mathbf{e}_z — единичный вектор в этом направлении. Задание силового источника в виде (2.1) означает, что плотность силы \mathbf{f} всюду равна нулю за исключением области, ограниченной круговым цилиндром радиуса a и длины $2l$. Внутри этой области плотность силы \mathbf{f} направлена по оси z и равна постоянной величине $F / 2\pi a^2 l$. Пользуясь соотношением (1.5), убеждаемся, что постоянная величина F есть просто сила лобового сопротивления источника возмущений, которая в дальнейшем будет определена приближенно.

Выбор функции источника в виде (2.1) сделан не столько из физических соображений, сколько из соображений относительной математической простоты последующих расчетов. Тем не менее можно ожидать, что результаты, полученные для функции \mathbf{f} вида (2.1), дадут некоторую информацию об общем характере осевого обтекания тел вращения с размерами a и $2l$. Вполне вероятно, что распределение весьма близкое к (2.1) реализуется при осевом обтекании пространственной аксиально симметричной решетки, ограниченной цилиндром радиуса a и длины $2l$ и образованной удлиненными телами вращения. Шаги решетки следует предполагать значительно меньше ее размеров, а размеры отдельных элементов, расположенных в ее узлах, меньше шагов. При этом сила F есть равнодействующая всех сил, действующих на отдельные элементы решетки. Выражение \mathbf{f} (2.1) будет как бы асимптотическим приближением к реальному распределению объемных сил в решетке.

В системе координат, в которой источник возмущений (2.1) покоится, а вся среда движется со скоростью V_0 в отрицательном направлении оси z , из уравнений (1.1), (1.2) можно получить¹

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = \frac{\partial f_z}{\partial \xi} \quad (\xi = z - V_0 t, \quad M = V_0 / c) \quad (2.2)$$

Для решения уравнения (2.2) с функцией f_z из (2.1) воспользуемся двукратным преобразованием Фурье — Ханкеля [11]:

$$\Psi_\nu(k, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r \Psi(r, \xi) e^{i\kappa \xi} J_\nu(kr) dr d\xi$$

¹ Аналогичное уравнение без правой части, записанное для потенциала скорости (уравнение Прандтля — Глауэрта) подробно исследовано в монографии Е. А. Красильщиковой [2].

с формулой обращения

$$\Psi(r, \xi) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k \bar{\Psi}_v(k, \kappa) e^{-i\kappa\xi} J_v(k, r) dk d\kappa$$

где J_v — функция Бесселя, Ψ — любая из компонент возмущений или функции f_z , $\bar{\Psi}_v$ — трансформанта функции Ψ . Применяя это интегральное преобразование к уравнению (2.2) и соотношению (2.1) и пользуясь формулой обращения, окончательно будем иметь следующее интегральное представление для возмущений давления:

$$p = \frac{iF}{2\pi^2 a l} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\kappa l) J_0(kr) J_1(ka) e^{-i\kappa\xi}}{k^2 + (1 - M^2)\kappa^2} dk d\kappa \quad (2.3)$$

Значение двойного интеграла в (2.3) существенным образом зависит от числа Маха. В случае дозвуковых движений, [когда $M < 1$ при помощи известных методов [12], имеем

$$p(r, \xi) = \frac{F}{4\pi^2 a^2 l^2 \gamma^2} \sum_{m=0}^1 (-1)^m \left\{ \sqrt{(\xi \mp l)^2 + \gamma^2 (r+a)^2} E(q_m) - \frac{\gamma^2 (r^2 - a^2)}{\sqrt{(\xi \mp l)^2 + \gamma^2 (r+a)^2}} \left[K(q_m) + \frac{(\xi \mp l)^2}{\gamma^2 (r+a)^2} \Pi(q_m, -n) \right] \right\} \quad (2.4)$$

Здесь K , E и Π — соответственно полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода с модулем q_m и параметром n , определяемыми по формулам

$$q_m = 2\gamma \left[\frac{ar}{(\xi \mp l)^2 + \gamma^2 (r+a)^2} \right]^{1/2}, \quad n = \frac{4ar}{(r+a)^2} \quad (\gamma = \sqrt{1 - M^2}) \quad (2.5)$$

В биноме $(\xi \mp l)$ верхний знак (минус) следует брать для первого члена суммы в (2.4) и знак (плюс) для второго члена. На поверхности цилиндра, ограничивающего источник, при $r = a$ из (2.4)–(2.5) получим

$$p(a, \xi) = \frac{F}{4\pi^2 a^2 l \gamma^2} \sum_{m=0}^1 (-1)^m \left\{ \sqrt{(\xi \mp l)^2 + 4a^2 \gamma^2} E(q_m) - \frac{\pi}{2} |\xi \mp l| \right\} \\ q_m = \frac{2a\gamma}{[(\xi \mp l)^2 + 4a^2 \gamma^2]^{1/2}} \quad (2.6)$$

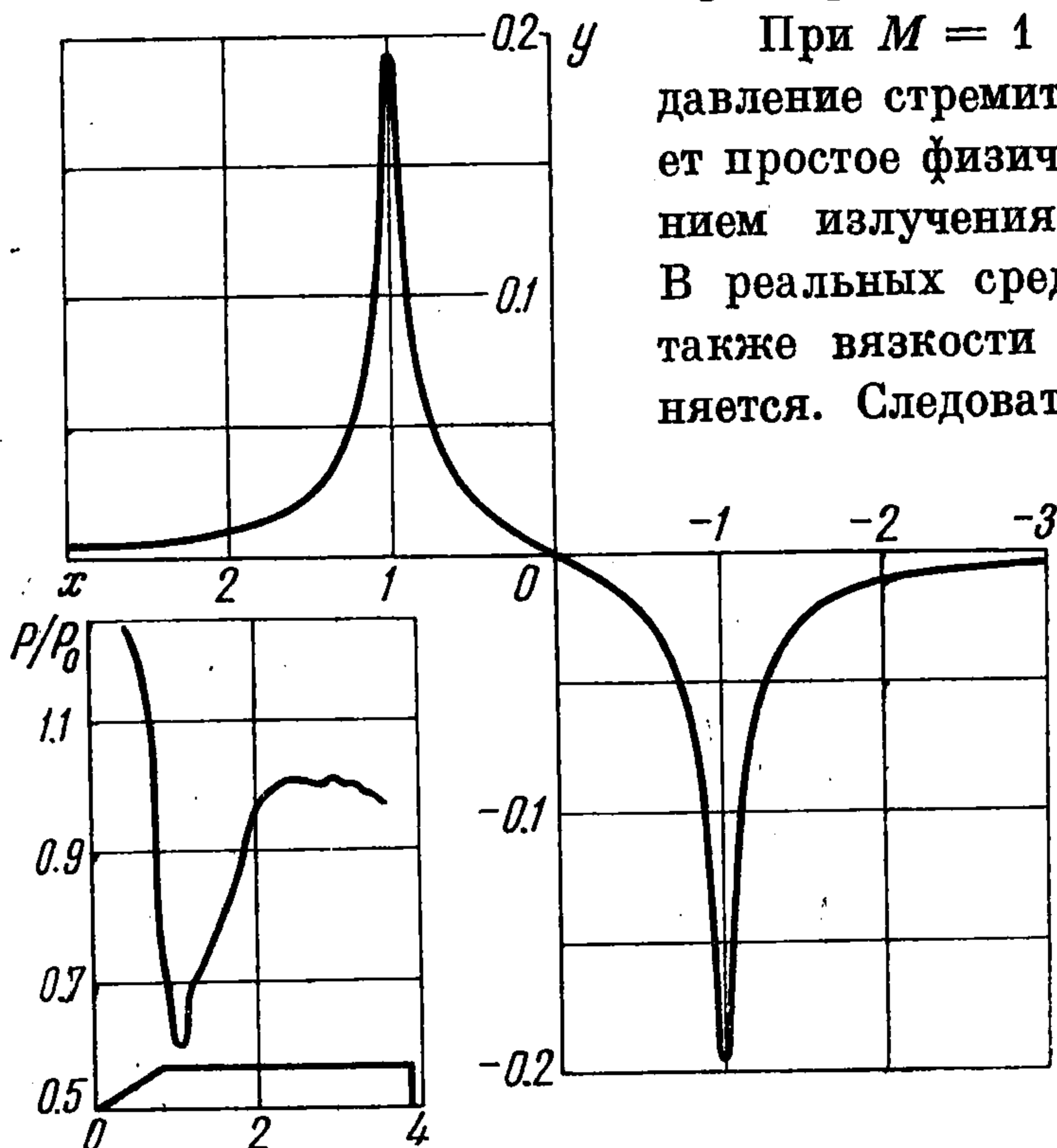
На фиг. 1 в безразмерных переменных $y = 4\pi^2 a^2 \gamma^2 p / F$ и $x = \xi / l$ приводится это распределение давления при $\zeta = 2a\gamma / l = 0.1$

При $M < 1$ как видно из фигуры впереди источника возмущений образуется область повышенного давления, а на заднем торце — область низкого давления. В левом нижнем углу фиг. 1 приводятся экспериментальные данные Вуда и Винцента о распределении давления при осевом обтекании тел вращения дозвуковым потоком [13], где по оси абсцисс отложено расстояние в калибрах. Легко видеть качественное сходство этих кривых.

Вдали от источника при $|\xi| \gg l$ и $r \gg a$, пользуясь асимптотическими формулами для полных эллиптических интегралов, из (2.4), (2.5) имеем

$$p(r, \xi) = \frac{F}{4\pi} \frac{\xi}{[\xi^2 + \gamma^2 r^2]^{3/2}} \quad (2.7)$$

Следовательно, вдали от источника распределение давления имеет дипольный характер.



Фиг. 1

При $M = 1$ интеграл в выражении (2.3) расходится и давление стремится к бесконечности. Этот результат имеет простое физическое объяснение и связан с возникновением излучения звуковых волн (см., например, [16]). В реальных средах при учете нелинейных эффектов, а также вязкости и теплопроводности расходимость устраняется. Следовательно, в некоторой области скоростей, достаточно близких к скорости звука, линейная теория становится несправедливой.

При $M > 1$ интеграл в (2.3) будет сходящимся, но подынтегральная функция имеет полюсы, лежащие на действительной оси x , вдоль которой проходит путь интегрирования. Как известно, в линейной теории излучения, именно в этом случае имеет место генерация волн движущимися источниками [6,9]. Наличие вязкости смещает полюсы в (2.3) в верхнюю полуплоскость комплексных значений x . Несобственные интегралы в

(2.3) будут разрывными, как и те функции, через которые они выражаются [12]. Линии разрыва отмечены на фиг. 2 и ограничивают области 1—6:

$$\begin{aligned} l - \xi &= \gamma_1 (r - a), & l - \xi &= \gamma_1 (r + a) & (\gamma_1 &= \sqrt{M^2 - 1}). \\ -l - \xi &= \gamma_1 (r - a), & l - \xi &= \gamma_1 (r + a) \end{aligned} \quad (2.8)$$

В пространстве $xy\xi$ эти равенства определяют конические поверхности.

Вычисляя интегралы в (2.3) известными методами [12], получим следующие выражения для возмущений давления в указанных областях в случае, когда параметр $\zeta = (\gamma_1 a / l) < 1$:

$$\begin{aligned} p_1=0 \quad p_2 &= -\frac{F}{2\pi^2 a l \gamma_1} \left\{ 2 \sqrt{\frac{r}{a}} \left[E(q_2) - \frac{\gamma_1^2 (r+a)^2 - (l-\xi)^2}{4ar\gamma_1^2} K(q_2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2 - a^2}{2a \sqrt{ar}} \left[K(q_2) - \frac{(l-\xi)^2}{\gamma_1^2 (r-a)^2} \Pi(q_2, n_2) \right] \right\} \\ p_3 &= -\frac{F}{2\pi^2 a^2 l \gamma_1} \left\{ \sqrt{(l-\xi)^2 - \gamma_1^2 (r-a)^2} E(q_3) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_1^2 (r^2 - a^2)}{\sqrt{(l-\xi)^2 - \gamma_1^2 (r-a)^2}} \left[K(q_3) - \frac{(l-\xi)^2}{\gamma_1^2 (r-a)^2} \Pi(q_3, n_3) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$p_4 = p_3(r, \xi) - p_2(r, -\xi), \quad p_5 = p_3(r, \xi) - p_3(r, -\xi)$$

При условии $\zeta > 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} p_1' &= 0, & p_2' &= p_2(r, \xi), & p_3' &= p_2(r, \xi) - p_2(r, -\xi) \\ p_4' &= p_3(r, \xi) - p_2(r, -\xi), & p_5' &= p_3(r, \xi) - p_3(r, -\xi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь модули и параметры полных эллиптических интегралов определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} q_2 &= \left[\frac{(l-\xi)^2 - \gamma_1^2 (r-a)^2}{4ar\gamma_1^2} \right]^{1/2}, & q_3 &= \frac{1}{q_2}, & n_2 &= \frac{(l-\xi)^2 - \gamma_1^2 (r-a)^2}{\gamma_1^2 (r-a)^2} \\ n_3 &= \frac{4ar}{(r-a)^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогично можно получить выражения для области δ , следа, т. е. при $r < a$. Таким образом, все возмущения сосредоточены внутри кругового конуса с углом при вершине $\varphi = 2 \arctg (\gamma_1)^{-1}$.

Распределение давления $p(\xi, a)$ на поверхности цилиндра, содержащего источник при $\xi < l$, имеет вид

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{F}{2\pi a l \gamma_1} \left\{ q_2 + \frac{2}{\pi} [q_2 \arccos q_2 - E(q_2) + (1 - q_2^2) K(q_2)] \right\} \quad (2.12)$$

$$p_3 = \frac{F}{2\pi a l \gamma_1} \left[q_2 - \frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{q_2}\right) \right], \quad p_4 = p_3(\xi) - p_2(-\xi)$$

$$p_5 = p_3(\xi) - p_3(-\xi), \quad q_2 = (l - \xi) / 2a\gamma_1$$

На фиг. 3 построена функция $y = 2\pi a l \gamma_1 p / F$ в зависимости от безразмерной координаты $x = \xi / l$ при значении параметра $\zeta = 0.1$. С другой стороны из выражения (2.9) можно установить асимптотический характер возмущений давления p на больших расстояниях от источника, т. е. при $|\xi| \gg l$ и $r \gg a$. Так, например, в области δ

$$p_5(r, \xi) = -\frac{F}{2\pi} \frac{V_0 t - z}{[(V_0 t - z)^2 - \gamma_1^2 r^2]^{3/2}} \quad (2.13)$$

На фиг. 2 справа в сферических координатах $r = R \sin \theta$, $\xi = R \cos \theta$ представлена диаграмма — $p_5(\theta)$ при постоянном R . Интересно отметить, что асимптотические формулы (2.7) и (2.13) совпадают с выражениями, полученными ранее для возмущений давления, создаваемых точечным силовым источником [6].

Величина силы F до сих пор оставалась неопределенной. Получим приближенно выражение для этой силы, определяющее ее зависимость от характерных размеров

источника a и $2l$ и от числа M . Ввиду того, что источник возмущений задан не на поверхности, а в объеме, то вместо граничных условий необходимо для определения F наложить подходящее условие на характер возмущений в объеме действия источника. Очевидно, что среда тормозится при прохождении области действия силового источника. Это подтверждается экспериментом: за донной частью тел вращения, обтекаемых потоком, образуется область неподвижного газа — зона покоящегося следа [13, 16]. Чтобы использовать это обстоятельство в приближенном способе определения силы F будем исходить из уравнения для z -компоненты скорости $w(\xi, r)$

$$-\rho_0 V_0 \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + f_z \quad (2.14)$$

Будем интересоваться возмущениями скоростей на оси течения, т. е. при $r = 0$. Проведем интегрирование уравнения (2.14) по ξ в пределах области, занятой источником, и, используя (2.3), будем иметь

$$-\rho_0 V_0 [w(l, 0) - w(-l, 0)] = \frac{F}{\pi a^2} - \frac{2F}{\pi^2 a l} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\kappa l) J_1(\kappa a)}{k^2 + (1 - M^2) \kappa^2} dk \quad (2.15)$$

Вследствие торможения набегающего потока положим, что перепад скоростей приближенно равен скорости V_0 :

$$w(l, 0) - w(-l, 0) \approx -V_0 \quad (2.16)$$

При этом из соотношения (2.15) получим приближенное выражение для силы

$$F = \pi a^2 \rho_0 V_0^2 \left[1 - \frac{2a}{\pi l} \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{\sin^2(\kappa l) J_1(\kappa a)}{[k^2 + (1 - M^2) \kappa^2]} \right\rangle dk d\kappa \right]^{-1} \quad (2.17)$$

Введем коэффициент аэродинамического сопротивления C и относительную толщину источника α :

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \pi a^2 \rho_0 V_0^2}, \quad \alpha = \frac{a}{2l} \quad (2.18)$$

Вычисляя интеграл в выражении (2.17) и используя обозначения (2.18), имеем

$$C = \frac{2}{1 - (1 + \alpha \sqrt{1 - M^2} - \sqrt{1 + \alpha^2 (1 - M^2)}) / (1 - M^2)} \quad \text{при } M < 1$$

$$C = \frac{2}{1 + (1 - \sqrt{1 - \alpha^2 (M^2 - 1)}) / (M^2 - 1)} \quad \text{при } \alpha \sqrt{M^2 - 1} \leq 1$$

$$C = \frac{2}{1 + 1 / (M^2 - 1)} \quad \text{при } \alpha \sqrt{M^2 - 1} \geq 1 \quad (2.19)$$

Приведем значения коэффициента C в зависимости от M для трех

$M = 0.1$	0.3	0.5	0.7	1.2	1.6	1.8	
$C = 2.103$	2.108	2.120	2.147	2.000	2.000	2.000	($\alpha = 0.1$)
$C = 2.701$	2.741	2.866	3.202	1.913	1.911	1.909	($\alpha = 0.3$)
$C = 3.248$	3.364	3.689	4.749	1.772	1.754	1.740	($\alpha = 0.5$)

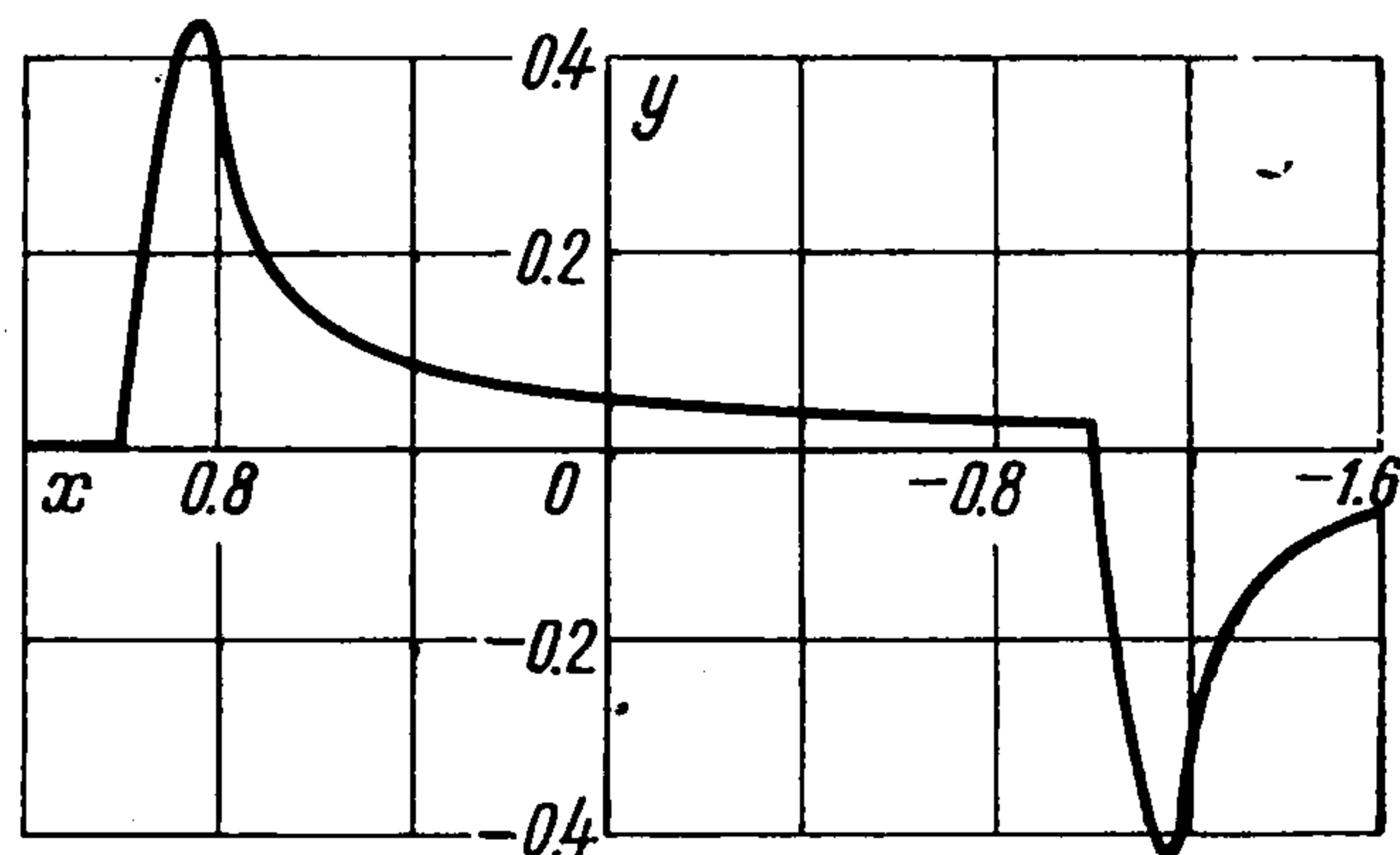
значений α . Коэффициент сопротивления C быстро возрастает с ростом скорости движения при $M < 1$ и медленно убывает при $M > 1$. Это явление принято называть волновым кризисом сопротивления. Видно также, что чем больше параметр α , тем раньше развивается это явление. Все это находится в качественном соответствии с экспериментальными данными о зависимости коэффициента C от чисел M и α при осевом обтекании тел вращения [14].

Можно предложить следующую интерпретацию зависимости коэффициента сопротивления от числа M . Силовой источник возмущений в виде (2.1), как легко убедиться, имеет вихревую и потенциальную часть. Из уравнения (1.1), без учета вязкости, с источником f_z заданным (2.1) следует, что вихрь скорости отличен от нуля в объеме источника и в его следе [радиуса a]. На основании этого ясно, что при малых дозвуковых скоростях движения источника его сопротивление обусловлено образованием вихревого следа. В сжимаемой среде при дозвуковых скоростях движения эффективное вихревое сопротивление как бы возрастает с ростом скорости в соответствии с (2.19). При сверхзвуковых скоростях коэффициент сопротивления уменьшается, так как излучение конических волн Маха уменьшает вихревое сопротивление.

Расчитаем интенсивность излучения звуковых волн силовым источником, которое имеет место при $M > 1$. Воспользуемся тем же приемом, что и в работе [6], где проведен соответствующий расчет для точечного источника. После простых вычислений получим

$$\frac{dE}{dt} = \frac{F^2}{\pi \rho_0 a^2 l^2 V_0 (M^2 - 1)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \kappa l}{\kappa^3} J_1^2(\alpha \kappa \sqrt{M^2 - 1}) d\kappa \quad (E - \text{энергия излучения}) \quad (2.20)$$

Подынтегральная функция в (2.20) является по существу спектральной плотностью интенсивности излучения звука, разложенной в интеграл Фурье по волновым



Фиг. 3

числам. Частотный спектр излучения получается из (2.20) простым преобразованием $\omega = \kappa V_0$, где ω — частота излучаемой звуковой волны. При $l \rightarrow 0$ и $a \rightarrow 0$ получается расходящийся интеграл для точечного источника [6]. Сходимость интеграла для протяженного источника обусловлена интерференцией излучаемых волн (в этой связи см., например, [17]). К сожалению, выразить через известные функции интеграл в (2.20) не удалось.

Для оценки границы применимости линейного приближения в данном случае будем считать область действия источника достаточно вытянутой, т. е. $\alpha < 1$. В качестве грубого критерия применимости линейного приближения используем условие

$$p_{\max} = |p(-l, 0)| < p_0 \quad (2.21)$$

где p_0 — давление в невозмущенном потоке. Вычисляя $p(-l, 0)$ по формуле (2.3) и подставляя в критерий (2.21), будем иметь

$$M < M_* = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad \text{при } M < 1, \quad M^2 \alpha^2 < 1 \quad \text{при } M > 1 \quad (2.22)$$

Оба эти критерия известны в линейной теории обтекания тел [13]. Таким образом в линейном приближении можно выявить только тенденцию к нарастанию коэффициента сопротивления при M , стремящемся к критическому значению M_* . Непосредственно в области $M_* < M \leq 1$ линейная теория несправедлива и необходимо учитывать нелинейные эффекты и диссипативные процессы вязкости и теплопроводности.

На основании вышеизложенного можно надеяться, что предложенный здесь метод силовых источников окажется полезным при нахождении как строгих, так и приближенных решений задач о механическом взаимодействии твердых тел с жидкими средами.

Поступила 6 IX 1965

Научно-исследовательский
радиофизический институт при
Горьковском госуниверситете

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
3. Ward G. N. Linearized Theory of steady High-speed flow. Cambridge University Press, 1955.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, чч. 1, 2. М., Физматгиз, 1963.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1954.
6. Докучаев В. П. К теории излучения звуковых волн при движении малых тел в газообразных средах. ЖЭТФ, 1962, т. 43, № 2, стр. 595—604.
7. Докучаев В. П. Излучение звуковых волн телом, движущимся по окружности и вращающимся флюгером простой формы. Акустич. ж., 1965, т. 11, вып. 3, стр. 324—333.
8. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
9. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
10. Lighthill M. J. An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. Cambridge University Press, 1958.
11. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
12. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. Изд-во иностр. лит., 1949.
13. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под ред. Л. Хоурта, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
14. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под ред. Л. Хоурта, ч. 2. Изд-во иностр. лит., 1956.
15. Докучаев В. П. Энергия и сопротивление излучения движущегося акустического монополя. Акустич. ж., 1966, т. 12, вып. 1, стр. 112—114.
16. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 5-е. М., «Наука», 1965.
17. Докучаев В. П. Черенковское излучение магнитозвуковых волн протяженными источниками. ЖЭТФ, 1965, т. 48, № 2, стр. 587—595.