

О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНВЕКЦИИ

В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Метод исследования бифуркации, развитый в [1,2], применим ко многим гидродинамическим задачам. В предлагаемой работе он применяется к исследованию возникновения конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу.

В задаче конвекции вторичные стационарные течения представляют особый интерес, так как именно с ними связана потеря устойчивости: «принцип изменения устойчивости» здесь не только справедлив, но и строго доказан [3]. Доказано также, что вторичные стационарные течения рождаются, ответвляясь от состояния покоя [4,5].

Рассматриваемая задача инвариантна относительно группы движений горизонтальной плоскости.

Единственное решение, инвариантное относительно всей этой группы, есть покой. Когда это решение неустойчиво, естественно ожидать возникновения решений, инвариантных относительно некоторой подгруппы группы движений. Если указанная подгруппа порождается парой сдвигов (по перпендикулярным направлениям), приходим к двоякопериодическим решениям (§ 1), а если дополнительно потребовать инвариантности относительно поворота на некоторый угол — к решениям гексагонального типа (§ 2). Как известно, в экспериментах по конвекции [6] реализовались именно последние. Выводы о существовании двоякопериодических конвекционных потоков изложены в теореме 1.1, существование решений типа гексагональной конвекции утверждается теоремой 1.2. Применяемый метод мало связан с краевыми условиями. Только ради определенности принято, что границы слоя — твердые стенки, на каждой из которых задана температура.

§ 1. Конвекция в горизонтальном слое. 1. К постановке задачи. Пусть жидкость заключена между двумя неподвижными, горизонтальными твердыми плоскостями $z = 0, h$; температура постоянна на каждой из них.

Тогда уравнения конвекции имеют стационарное решение

$$v_0 = 0, \quad T_0 = cz + c_0, \quad p_0 = -\beta g \left(\frac{1}{2} cz^2 + c_0 z \right) + \text{const} \quad (1.1)$$

Здесь $x_1, x_2, x_3 = z$ — декартовы координаты; ось z направлена вертикально вниз. Разыскивая новое стационарное решение (v', T', p') в виде

$$v' = v_0 + v, \quad T' = T_0 + T, \quad p' = p_0 + p \quad (1.2)$$

придем к следующей системе уравнений

$$v \Delta v - \nabla p = (v, \nabla) v + \beta T g, \quad \chi \Delta T - v \cdot \nabla T = c v_3 \quad (1.3)$$

Краевые условия на твердых стенках имеют вид

$$v = 0, \quad T = 0 \quad (z = 0, h) \quad (1.4)$$

Далее, предположим, что v, T периодичны по x_1, x_2 с периодами $2\pi / k_1, 2\pi / k_2$ соответственно (k_1, k_2 — волновые числа) и что слой жидкости

как целое не имеет права перемещаться вдоль плоскости x_1, x_2

$$\int_{-\pi/k_2}^{\pi/k_2} \int_0^h v_1 dx_2 dx_3 = \int_{-\pi/k_1}^{\pi/k_1} \int_0^h v_2 dx_1 dx_3 = 0 \quad (1.5)$$

Дальнейшее посвящено отысканию бифуркационных значений параметра c — градиента температуры.

2. Основные функциональные пространства и операторные уравнения. Введем следующие гильбертовы пространства.

1) Пространство H_1 , в котором всюду плотно множество гладких соленидных векторов, периодических по x_1, x_2 с периодами $2\pi/k_i$, удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5), а скалярное произведение имеет вид

$$(v', v'')_{H_1} = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v'}{\partial x_k} \frac{\partial v''}{\partial x_k} dx \quad (1.6)$$

Здесь Ω — параллелепипед; $\{0 \leq x_3 = z \leq h, |x_1| \leq \pi/k_1, |x_2| \leq \pi/k_2\}$.

2) Подпространство H_1° пространства H_1 , состоящее из векторов, удовлетворяющих следующим условиям четности и нечетности:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, z) &= -v_1(-x_1, x_2, z) = v_1(x_1, -x_2, z) \\ v_2(x_1, x_2, z) &= v_2(-x_1, x_2, z) = -v_2(x_1, -x_2, z) \\ v_3(x_1, x_2, z) &= v_3(-x_1, x_2, z) = v_3(x_1, -x_2, z) \end{aligned} \quad (1.7)$$

3) H_2 — замыкание множества гладких функций, определенных в слое $0 \leq z \leq h$, периодических с периодами $2\pi/k_1, 2\pi/k_2$ по x_1, x_2 , исчезающих при $z = 0, h$, в метрике

$$(T', T'')_{H_2} = \int_{\Omega} \nabla T' \nabla T'' dx \quad (1.8)$$

4) Подпространство H_2° пространства H_2 , состоящее из функций, четных по x_1 и x_2 .

Задачу (1.3) — (1.5) можно многими способами свести к операторному уравнению с вполне непрерывным оператором. Например, как показано в [5], задача (1.3) — (1.5) эквивалентна операторному уравнению

$$v = K(v, c) = cAv + Rv \quad (1.9)$$

где K — вполне непрерывный в H_1 оператор; cA — его дифференциал Фреше в точке $v = 0$; при этом A — не зависит от c .

Опишем определение операторов K и A . Зафиксируем какой-нибудь вектор $v \in H_1$ и пусть $T' \in H_2$ — обобщенное решение уравнения

$$\chi \Delta T' - v \cdot \nabla T' = f \quad (1.10)$$

с краевыми условиями периодичности и (1.4). Если $f \in L_{\nu/2}(\Omega)$, то, как показано в [5], это обобщенное решение существует и единственно. Тем самым определен линейный оператор B_v и $L_{\nu/2}(\Omega) \rightarrow H_2$

$$T' = B_v f \quad (1.11)$$

Теперь из второго уравнения (1.3) получаем

$$T = cB_v v_3 \equiv cMv \quad (1.12)$$

Определим теперь оператор L , ставящий в соответствие произвольному вектору $\mathbf{f} \in L_{3/2}(\Omega)$ вектор $\mathbf{v} \in H_1$ — обобщенное решение линеаризованного уравнения Навье — Стокса с правой частью \mathbf{f} :

$$\mathbf{v} \Delta \mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = L\mathbf{f} \quad (1.13)$$

при краевых условиях (1.4), (1.5)¹. Теперь нетрудно увидеть, что

$$K(\mathbf{v}, c) = L(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} + cL(\beta \mathbf{g} B_{\mathbf{v}} v_3), \quad A_{\mathbf{v}} = L(\beta \mathbf{g} B_0 v_3), \quad B_0 = B_{\mathbf{v}}|_{\mathbf{v}=0} \\ R\mathbf{v} = L(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} + cL(\beta \mathbf{g} (B_{\mathbf{v}} - B_0) v_3) \quad (1.14)$$

Оператор A — самосопряженный, строго положительный, его спектр состоит из последовательности положительных собственных значений.

Для оператора $B_{\mathbf{v}}$, пользуясь принципом сжатых отображений, получаем следующее выражение, справедливое при малых $\mathbf{v} \in H_1$: (1.15)

$$B_{\mathbf{v}} f = B_0 f + B_1 f + \dots + B_k f + \dots, \quad B_k f = B_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla B_{k-1} f) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

3. *Бифуркация.* Согласно теореме М. А. Красносельского о бифуркации [7], всякое простое характеристическое число дифференциала Фреше A является точкой бифуркации уравнения (1.9). Так как оператор A самосопряженный, характеристическое число его простое, если ему отвечает лишь один собственный вектор.

Непосредственно проверяется, что операторы K, A переводят пространство H_1° в себя. Далее в этом пункте будем рассматривать уравнение (1.9) в H_1° . Из определения (1.14) оператора A явствует, что операторное уравнение

$$\mathbf{v} = cA\mathbf{v} \quad (1.16)$$

эквивалентно линеаризованной системе

$$\mathbf{v} \Delta \mathbf{v} - \nabla p = \beta T \mathbf{g}, \quad \chi \Delta T = c v_3, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.17)$$

с краевыми условиями (1.4), (1.5). Последняя хорошо известным способом сводится к одному уравнению

$$\Delta^3 T = \beta g c / \chi v (T_{x_1 x_1} + T_{x_2 x_2}) \quad (1.18)$$

с краевыми условиями периодичности и

$$T = \Delta T = \Delta T_z = 0 \quad (z = 0, h) \quad (1.19)$$

В силу того, что $\mathbf{v} \in H_1^\circ$, v_3 — функция четная по x_1, x_2 ; тогда и T , согласно (1.17), тоже четна по x_1, x_2 . Поэтому следует искать T в виде

$$T = \tau(z) \cos n_1 k_1 x_1 \cos n_2 k_2 x_2 \quad (1.20)$$

причем функция $\tau(z)$ есть решение задачи на собственные значения

$$-\left(\frac{d^2}{dz^2} - \theta^2\right)^3 \tau = \lambda \tau, \quad \tau|_{z=0, h} = \tau'' - \theta^2 \tau|_{z=0, h} = \tau''' - \theta^2 \tau'|_{z=0, h} = 0 \\ \theta^2 = (n_1 k_1)^2 + (n_2 k_2)^2, \quad \lambda = \frac{\beta g \theta^2 c}{\chi v} \quad (1.21)$$

¹ Если представлять себе задачу для слоя как предел соответствующих задач для цилиндров с бесконечно растущими радиусами, то предельная форма условия прилипания на боковой поверхности цилиндров есть (1.5).

Здесь n_1, n_2 — натуральные числа. Так же, как в [2], можно показать, что функция Грина задачи (1.21) осцилляционная (она представляет собой композицию двух симметрических осцилляционных функций Грина). Поэтому спектр задачи (1.9) есть последовательность положительных и простых собственных значений $\lambda_1(\theta) < \lambda_2(\theta) < \dots < \lambda_n(\theta) < \dots$.

Итак, спектр задачи (1.3)–(1.5) состоит из собственных значений

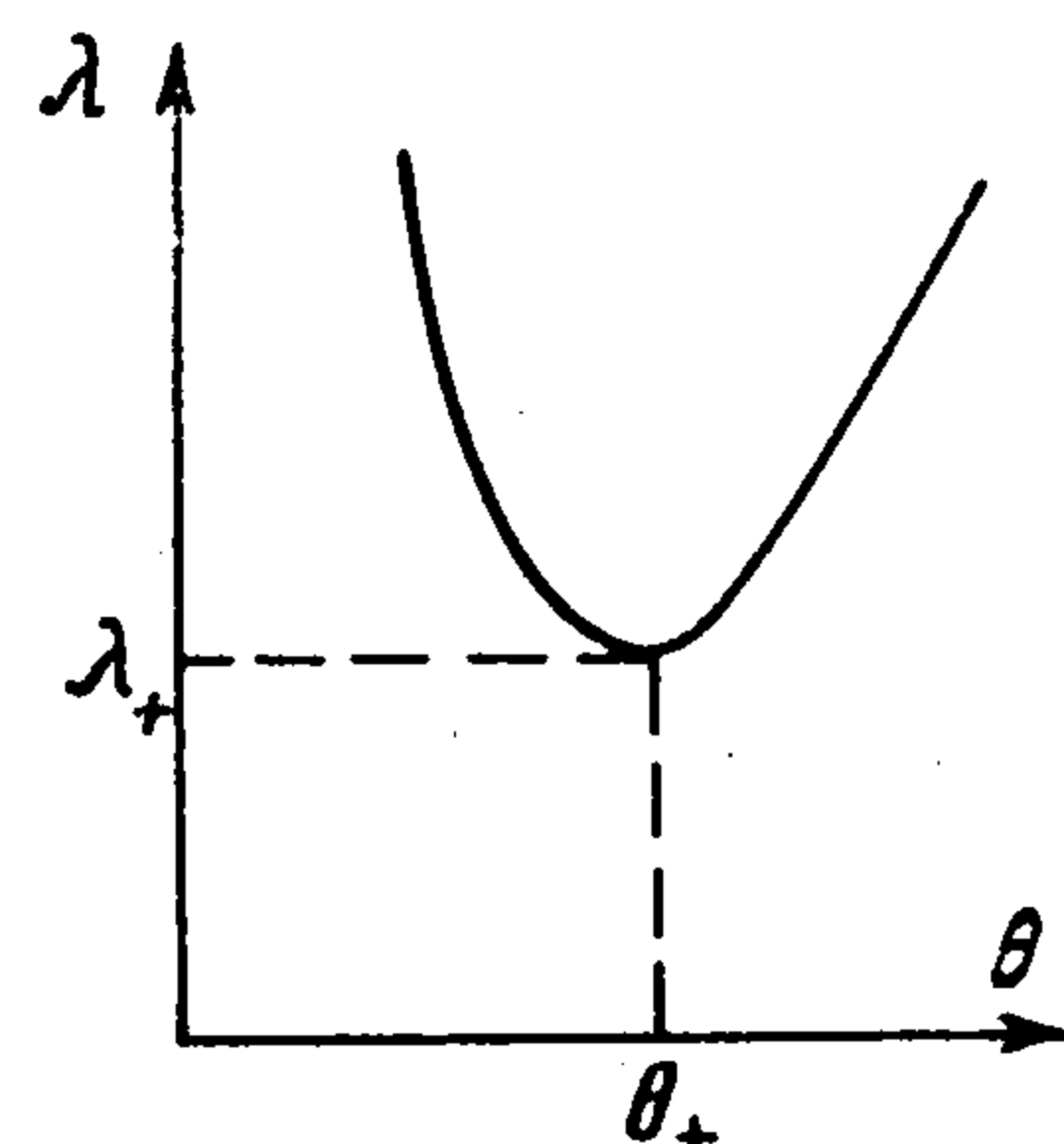
$$c_{n_0 n_1 n_2} = \frac{\chi \nu}{\beta g} \frac{\lambda_n(\theta)}{\theta^2}, \quad \theta^2 = (n_1 k_1)^2 + (n_2 k_2)^2$$

$$(n_0, n_1, n_2 = 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

Если $c_{n_0 n_1 n_2}$ — кратное собственное число, то должны найтись такие натуральные $(n_0', n_1', n_2') \neq (n_0, n_1, n_2)$, что

$$c_{n_0 n_1 n_2} = c_{n_0' n_1' n_2'}, \quad \varphi(k_1, k_2) \equiv \frac{\lambda_n(\theta)}{\theta^2} - \frac{\lambda_{n'}(\theta')}{\theta'^2} = 0$$

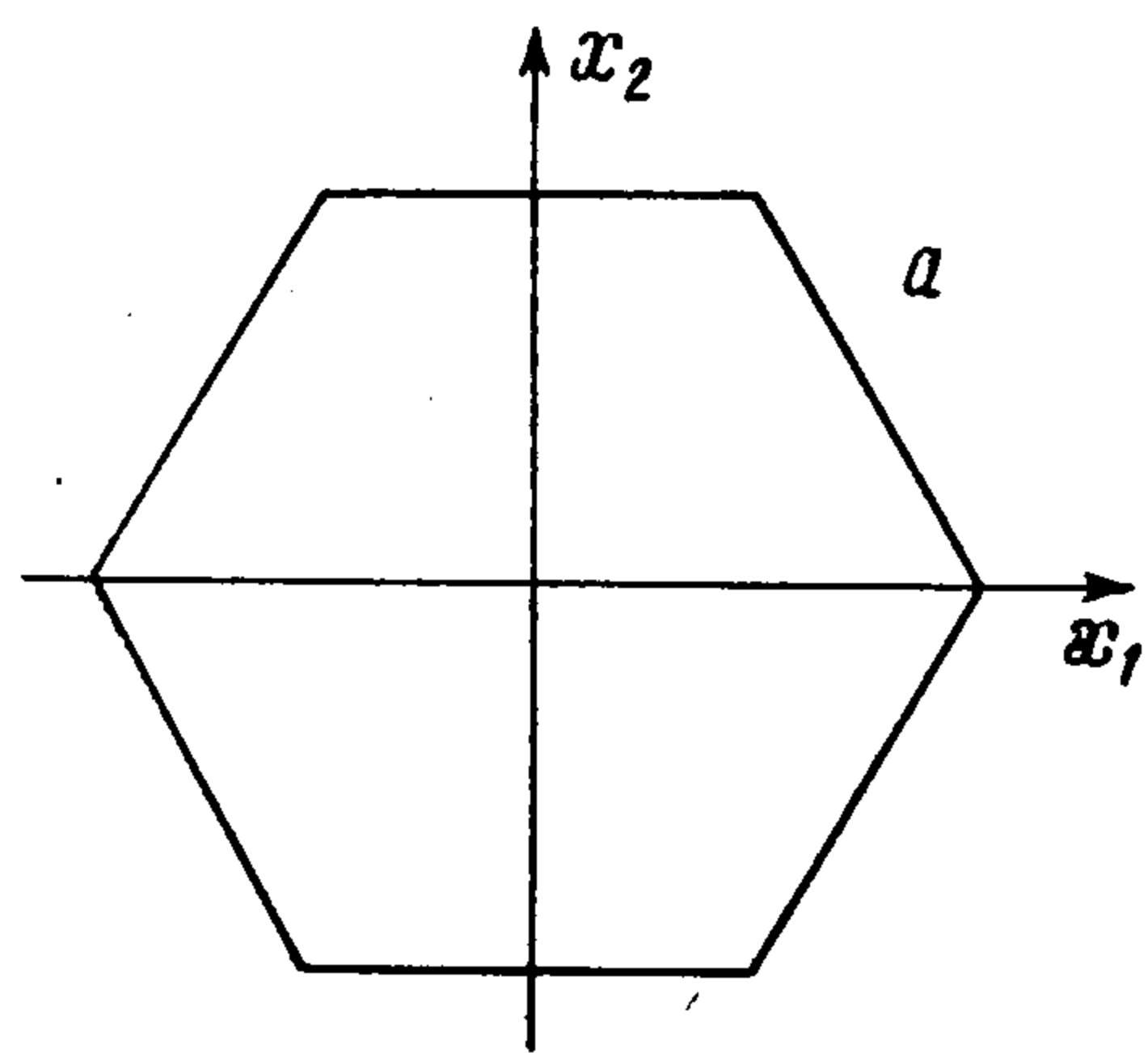
$$\theta'^2 = (n_1' k_1)^2 + (n_2' k_2)^2$$



Фиг. 1

Фиксируем произвольно числа n_i, n_i' ($i = 0, 1, 2$). Так же, как в [2], показывается, что $\lambda_n(\theta)$ аналитическая функция на луче $\theta > 0$, а потому функция $\varphi(k_1, k_2)$ аналитична внутри квадранта ($k_1 > 0, k_2 > 0$). Как и в [2], функция φ не может быть тождественным нулем. Таким путем приходим к следующей теореме.

Теорема 1.1. Почти для всех пар (k_1, k_2) каждое из собственных чисел $c_{n_0 n_1 n_2}$ простое и, значит, является точкой бифуркации уравнения (1.9): при значениях c близких к $c_{n_0 n_1 n_2}$ уравнение (1.9), а значит и задача (1.3) — (1.5) имеет нетривиальное решение.



Фиг. 2

Выражение «почти для всех пар (k_1, k_2) » понимается здесь в том смысле, что на любой аналитической кривой в плоскости (k_1, k_2) лежит не более счетного множества исключительных точек.

Как показывают вычисления [3], график функции $\lambda = \lambda_1(\theta)$ имеет вид, указанный на фиг. 1. Ясно поэтому, что λ_+ во всяком случае есть точка бифуркации.

§ 2. Ячеистая конвекция. Хорошо известно и легко усматривается из (1.22), что одному и тому же критическому значению градиента температуры c отвечают вторичные течения с разнообразной периодичностью и симметрией. В этом параграфе рассматриваются вторичные течения, обладающие гексагональной симметрией. Для таких течений слой разбивается на правильные шестиугольные призмы, и движение жидкости во всех таких призмах происходит одинаково. Эти течения (называемые гексагональной или ячеистой конвекцией) представляют особый интерес, так как именно они наблюдаются в экспериментах [6]; ячеистая конвекция, по-видимому, имеет место и в земной атмосфере, приводя к образованию некоторых типов облаков.

Пусть a — сторона шестиугольника-ячейки (фиг. 2). Тогда периоды по x_1, x_2 должны быть соответственно равны $3a, a\sqrt{3}$. Кроме того, решение должно быть инвариантно относительно поворота на угол $2/3\pi$ вокруг оси z . Последнее требование приводит к условиям

$$T(gx, z) = T(x, z), \quad v_3(gx, z) = v_3(x, z), \quad w(gx, z) = gw(x, z) \quad (2.1)$$

Здесь и далее используются обозначения: $x = (x_1, x_2)$; $w = (v_1, v_2)$; g — преобразование поворота на $2/3\pi$ вокруг оси z

$$g(x, z) = (gx, z) = (x_1 \cos 2/3\pi - x_2 \sin 2/3\pi, x_1 \sin 2/3\pi + x_2 \cos 2/3\pi, z)$$

Функцию $T(x, z)$ (соответственно, вектор $v(x, z)$) назовем гексагонально-симметричной, если она удовлетворяет условию (2.1) и периодична по x_1, x_2 с периодами соответственно $3a, a\sqrt{3}$.

Для того чтобы гладкая функция $T(x, z)$ обладала гексагональной симметрией, необходимо и достаточно, чтобы она разлагалась в ряд

$$T(x, z) = 1/3 \sum c(n, z) [e^{ik(n, x)} + e^{ik(n, gx)} + e^{ik(n, g^{-1}x)}] \quad (2.3)$$

$$n = (n_1, n_2 \sqrt{3}), \quad k = 2/3\pi/a, \quad c(n, z) = c(gn, z)$$

Здесь сумма распространяется на всевозможные пары целых чисел n_1, n_2 одинаковой четности (это следует из требования, чтобы решетка $(n_1, n_2 \sqrt{3})$ переводилась преобразованием g в себя). Для доказательства достаточно подставить ряд Фурье функции T в вытекающее из (2.1) равенство

$$T(x, z) = 1/3 [T(x, z) + T(gx, z) + T(g^{-1}x, z)] \quad (2.4)$$

Коэффициенты $c(n, z)$ однозначно определяются функцией T . Аналогично можно рассмотреть разложения Фурье гексагональных векторов.

Введем теперь подпространства $Q_1 \subset H_1^\circ, Q_2 \subset H_2^\circ$, состоящие соответственно из гексагональных векторов и функций.

Для любой функции $T \in Q_2$ разложение (2.3) принимает вид

$$T(x, z) = \sum a(n, z) \varphi_{n_1 n_2}(x), \quad a(n, z) = a(gn, z) \quad (2.5)$$

$$\varphi_{n_1 n_2}(x) = \cos(kn_1 x_1) \cos(k\sqrt{3}n_2 x_2) + \cos \frac{k(n_1 - n_2)\sqrt{3}x_2}{2} \times$$

$$\times \cos \frac{k(n_1 + 3n_2)x_1}{2} + \cos \frac{k(n_1 - 3n_2)x_1}{2} \cos \frac{k(n_1 + n_2)\sqrt{3}x_2}{2}$$

При этом коэффициенты $a(n, z)$ вещественны, а суммирование происходит по всевозможным парам натуральных чисел одинаковой четности. При $n_1 = n_2 = 1$ функция $\varphi_{n_1 n_2}(x)$ принимает вид

$$\varphi_{11}(x) = \cos[k(x_1 + x_2\sqrt{3})] + \cos[k(x_1 - x_2\sqrt{3})] + \cos(2kx_1) \quad (2.6)$$

который обычно (хотя и без достаточно строгого обоснования) используют для определения стороны шестиугольника-ячейки (см., например, [3]).

Лемма 2.1. Операторы K, A, R действуют в подпространстве Q_1 , а оператор M из Q_1 в Q_2 .

Доказательство. Преобразование g порождает оператор Γ_g , действующий на функции $f(x, z)$ и оператор Γ_g , действующий на векторы $v(x, z)$ по правилам

$$f_g = \Gamma_g f = f(gx, z), \quad v_g = \Gamma_g v = \{g^{-1}w(gx, z), v_3(gx, z)\} \quad (2.7)$$

Условие (2.1) гексагональной симметрии функции f или вектора v записывается теперь в виде $f = f_g$, $v = v_g$. Непосредственно проверяются соотношения

$$\begin{aligned} \nabla f_g &= \Gamma_g \nabla f, & \Delta f_g &= (\Delta f)_g, & \Gamma_g(v \cdot \nabla T) &= v_g \cdot \nabla T_g \\ \Gamma_g(v, \nabla) v &= (v_g, \nabla) v_g, & \Delta v_g &= (\Delta v)_g \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим для примера оператор M . Пусть $v \in Q_1$. Применим к уравнению (1.10) при $f = v_3$ оператор Γ_g . Пользуясь тождествами (2.8) и учитывая, что $v_g = v$, получим

$$\chi \Delta T_g' - v \cdot \nabla T_g' = v_3 \quad (2.9)$$

Функция T_g' удовлетворяет, очевидно, крайевым условиям периодичности и (1.4). В силу единственности решения уравнения (2.9) при этих условиях, $T_g' = T'$; четность функции T' по x_1, x_2 очевидна. Лемма доказана.

Будем теперь рассматривать уравнение (1.9) в пространстве Q_1 . Соответствующая линеаризованная задача, как и в § 1, сводится к задаче (1.17). Гексагональные решения последней имеют вид

$$T_{n_1 n_2} = \tau(z) \varphi_{n_1 n_2}(x), \quad v_{n_1 n_2} = L(\beta T_{n_1 n_2} g) \quad (2.10)$$

где n_1, n_2 — любые натуральные числа одинаковой четности; L — оператор, определенный в (1.13), а функция $\tau(z)$ есть собственное решение задачи (1.21) при $\theta^2 = (n_1^2 + 3n_2^2)k^2$.

Рассуждая далее, так же как при доказательстве теоремы 1.1, получим следующее утверждение.

Теорема 2.1. При любой величине стороны a шестиугольника-ячейки, исключая некоторое счетное множество, уравнение (1.16) в Q_1 имеет последовательность положительных простых собственных значений, каждое из которых является точкой бифуркации уравнения (1.9): при близких к ним значениях параметра c уравнение (1.9) (а вместе с тем и задача (1.3)) имеет малые ненулевые гексагональные решения.

Аналогичный результат можно получить и для «треугольной конвекции», которая является частным случаем гексагональной.

Поступила 7 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 453—467.
2. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 688—689.
3. Pellew A. and Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., ser. A, 1940, vol. 176, pp. 312—343.
4. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, стр. 197—204.
5. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 295—300.
6. Bénard M. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. Ann. Chim. ser. 7, 1901, vol. 23, pp. 62—144.
7. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.