РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Г. А. Гришина, Р. М. Зайдель, О. М. Зотова

(Москва)

Пусть полупространство $X > 0$ заполнено газом. Для простоты будем считать газ идеальным с показателем изэнтропы γ.

В момент $t = 0$ на границе газа возникает давление P_0, которое порождает ударную волну. Обозначим в начальном состоянии плотность газа и скорость звука через ρ_0 и c_0, а за фронтом волны — соответственно через ρ, c.

В системе координат, в которой невозмущенная граница газа неподвижна, в области за фронтом ударной волны имеем следующую систему линеаризованных уравнений для возмущений давления p' и компонент скорости v_x' и v_y':

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial v_x'}{\partial X} + \frac{\partial v_y'}{\partial Y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial v_x'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial v_y'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial Y} = 0 \qquad (1)$$

Возмущения плотности ρ' исключены при помощи условия адиабатичности

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

На границе газа ($X = 0$) возмущения давления задаем в двух формах

$$p' = Pe^{ikY} \text{ (задача 1)}, \qquad p' = PJ_0(kct)\, e^{ikY} \text{ (задача 2)}$$

Здесь $P = \text{const}$. $J_0(kct)$ — функция Бесселя.

Условия на фронте ударной волны ($X = Vt$) такие же, как и в работе [1].

$$v_y' = -U\frac{\partial \xi}{\partial Y}, \qquad v_x' = \frac{1+\delta}{2\rho_0 D}p', \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1-\delta}{2\rho_0 U}p' \qquad \left(\delta = \frac{1}{M_0^2}, \ M_0 = \frac{D}{c_0}\right)$$

Здесь U — скорость невозмущенной границы, D — скорость ударной волны, V — скорость ударной волны относительно границы, $\xi(Y, t)$ — отклонение фронта ударной волны от плоскости $X = Vt$.

В начальный момент фронт ударной волны совпадает с границей газа, поэтому

$$p' = P, \quad v_y' = 0, \quad v_x' = \frac{1+\delta}{2\rho_0 D}P, \quad \xi = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Условия одинаковы для обеих задач, так как $J_0(0) = 1$. Зависимость всех величин от координаты Y определяется множителем e^{ikY}. Введем обозначения

$$p' / \rho c = w, \qquad v_x' = u, \qquad v_y' = -iv$$

перейдем к новым переменным

$$kX = x = r \operatorname{sh}\vartheta, \qquad kct = y = r\operatorname{ch}\vartheta, \qquad r = \sqrt{y^2 - x^2}, \qquad \operatorname{th}\vartheta = x / y$$

Используем метод решения, описанный в работе [1]. Для получающихся при этом рядов нетрудно показать сходимость. С учетом всех изменений, обусловленных новыми граничными условиями, в случае сильной ударной волны ($c_0 = 0$) были получены следующие результаты.

1°. Для возмущения давления

$$w(r, \vartheta) = w_0 J_0(r) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\vartheta) J_{2n}(r) \qquad (2)$$

Здесь $J_{2n}(r)$ — функции Бесселя, а $c_n(\vartheta)$ имеют следующий вид.

Задача 1

$$c_n(\vartheta) = B_n \frac{\operatorname{sh} 2n\vartheta}{\operatorname{sh} 2n\vartheta_0} - 2w_0 e^{2n\vartheta}, \qquad B_1 = \frac{4w_0(1+\beta+\beta^2)}{(1-\beta)(1+2\beta\operatorname{cth}2\vartheta_0)}$$

$$B_2 = \frac{2\beta(1+2\operatorname{cth}2\vartheta_0)B_1 + 4w_0\beta(1+\beta)}{(1-\beta)(1+2\beta\operatorname{cth}4\vartheta_0)}$$

$$B_{n+1} = \frac{2\beta(1+2\beta\operatorname{cth}2n\vartheta_0)B_n + (1+\beta)(1-2\beta\operatorname{cth}2(n-1)\vartheta_0)B_{n-1}}{(1-\beta)(1+2\beta\operatorname{cth}2(n+1)\vartheta_0)} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Задача 2

$$c_n(\vartheta) = B_n \frac{\operatorname{sh} 2n\vartheta}{\operatorname{sh} 2n\vartheta_0}, \qquad B_1 = \frac{2w_0}{1 + 2\beta \operatorname{cth} 2\vartheta_0}$$

$$B_{n+1} = -B_n \frac{1 - 2\beta \operatorname{cth} 2n\vartheta_0}{1 + 2\beta \operatorname{cth} 2(n+1)\vartheta_0} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Здесь

$$\beta^2 = \frac{1}{h+1}, \qquad h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad w_0 = \frac{P}{\rho c}, \qquad \operatorname{th} \theta_0 = \beta$$

Следует отметить, что для задачи 2 можно подобрать такое γ (а именно $\gamma = 1 + 0.4\sqrt{5}$), что все коэффициенты ряда (2), начиная с c_3, обратятся в нуль.

2°. Амплитуда искажения фронта ударной волны определяется рядом

$$\xi(s) = \frac{P\sqrt{h}}{kP_0} \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_{2n-1}(s) \tag{3}$$

Коэффициенты D_n определяются следующим образом:

Задача 1

$$D_1 = 1, \quad \left[1 + 2\beta \frac{\alpha^{2n}+1}{\alpha^{2n}-1}\right] D_{n+1} + \left[1 - 2\beta \frac{\alpha^{2n}+1}{\alpha^{2n}-1}\right] D_n =$$

$$= 16 \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}-1} \qquad \left(\alpha = \frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \quad (n = 1, \ldots)$$

Задача 2

$$D_1 = 1, \qquad D_n = -D_{n-1} \frac{1 - 2\beta \operatorname{cth} 2n\vartheta_0}{1 + 2\beta \operatorname{cth} 2n\vartheta_0} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Аргумент s выражается формулой

$$s = kct\sqrt{1-\beta^2} = \frac{kL}{\sqrt{h}} = kL_1$$

Здесь L — путь, пройденный ударной волной по холодному веществу, L_1 — путь, пройденный звуковым сигналом вдоль фронта ударной волны.

3°. Дважды интегрируя второе уравнение системы (1) с учетом начальных условий, получим зависимость от времени амплитуды искривления границы

$$a(r) = \frac{\sqrt{h+1}}{2kc} w_0 r + \frac{1}{kc} \sum_{n=1}^{\infty} c_n' \sum_{k=n}^{\infty} \left(-J_{2k+1}(r) + 2\sum_{l=k}^{\infty} J_{2l+1}(r)\right) \tag{4}$$

Здесь

$$r = kct, \qquad w_0 = \frac{P}{\rho c}, \qquad c_n' = \left(\frac{1}{n} \frac{dc_n(\vartheta)}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0}$$

Из формул (3), (4) легко установить, что при $L \to \infty$ амплитуда искажения фронта ударной волны затухает по закону $s^{-1/2}$, а амплитуда искривления границы растет линейно со временем.

Асимптотическое поведение величины $a(r)$ оказывается таким же, как если бы граничное давление $p'(X=0)$ для задачи 2 также не зависело от времени и развитие возмущений на отдельных участках происходило независимо.

Поступила 7 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, стр. 219—227.