

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТЫХ ПЛИТАХ

О. К. Аксентян

(Ростов-на-Дону)

В работе продолжается изучение возможности применения уравнений прикладной теории изгиба пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа, для расчета концентрации напряжений на основе метода, предложенного в [1,2].

§ 1. Рассмотрим осесимметричную задачу изгиба для бесконечной плиты толщиной  $2h$ , имеющей отверстие, ограниченное круговой цилиндрической поверхностью  $\Gamma$  радиуса  $a$ . Введем безразмерные координаты  $s, n, \zeta$  (фиг. 1). Примем, что плоские грани плиты свободны от усилий, а цилиндрическая поверхность загружена нормальными усилиями  $N = k\lambda\zeta^m$  и свободна от касательных. Здесь  $m$  — нечетное число,  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $\lambda = h/a$ .

Применяя метод, описанный в [1,2], получим выражения для напряжений на контуре  $\Gamma$  в виде

$$\begin{aligned} \sigma_n|_{\Gamma} = & 2\mu\lambda \left\{ \left[ 2\nu \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} + (\nu - 1) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right]_{n=0} \zeta + \sum_{p=1}^{\infty} [(\nu - 1) s_p(\zeta) + \gamma_p^2 n_p(\zeta)] c_{p2} \right\} + \\ & + 2\mu\lambda^2 \left\{ \left[ 2\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} + (\nu - 1) \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right]_{n=0} \zeta + \sum_{p=1}^{\infty} [(\nu - 1) s_p(\zeta) + \gamma_p^2 n_p(\zeta)] c_{p3} \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p n_p(\zeta) c_{p2} \left. \right\} + 2\mu\lambda^3 \left\{ \left[ 2\nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial n^2} + (\nu - 1) \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right]_{n=0} \zeta - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left( \nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 \Delta \psi_0}{\partial n^2} \Big|_{n=0} \zeta^3 + \sum_{p=1}^{\infty} [(\nu - 1) s_p'(\zeta) + \gamma_p^2 n_p(\zeta)] c_{p4} + \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(\zeta) \left( \gamma_p c_{p3} + \frac{1}{2} c_{p2} \right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

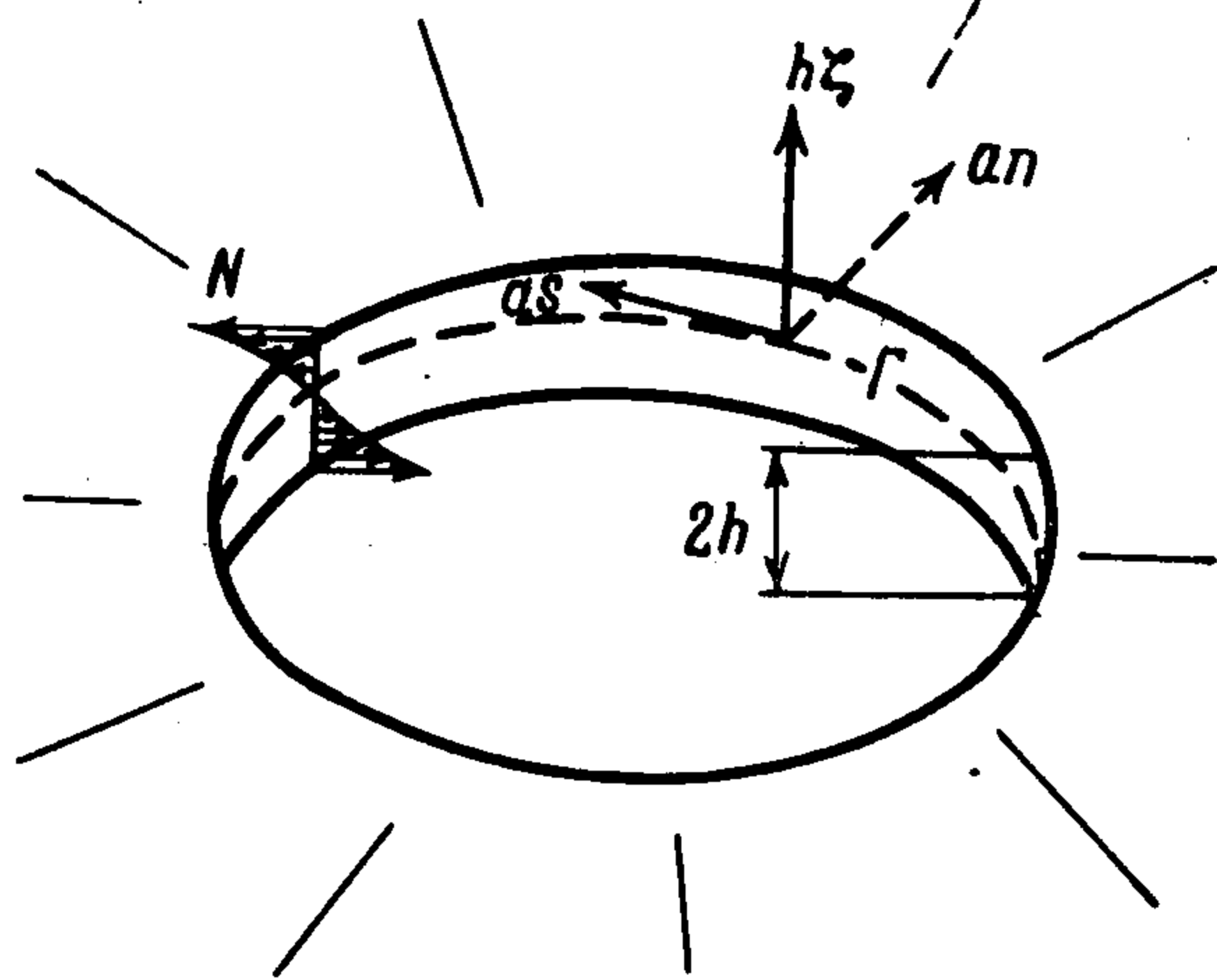
$$\begin{aligned} \sigma_s|_{\Gamma} = & 2\mu\lambda \left\{ \left[ 2\nu \frac{\partial \psi_0}{\partial n} + (\nu - 1) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} \right]_{n=0} \zeta + (\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} s_p(\zeta) c_{p2} \right\} + \\ & + 2\mu\lambda^2 \left\{ \left[ 2\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + (\nu - 1) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} \right]_{n=0} \zeta + \sum_{p=1}^{\infty} [(\nu - 1) s_p(\zeta) c_{p3} - \gamma_p n_p(\zeta) c_{p2}] \right\} + \\ & + 2\mu\lambda^3 \left\{ \left[ 2\nu \frac{\partial \psi_2}{\partial n} + (\nu - 1) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial n^2} \right]_{n=0} \zeta - \frac{1}{2} \left( \nu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n} \Big|_{n=0} \zeta + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \left[ (\nu - 1) s_p(\zeta) c_{p4} - \gamma_p n_p(\zeta) c_{p3} - \frac{1}{2} n_p(\zeta) c_{p2} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{nz}|_{\Gamma} = & -2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p r_p(\zeta) c_{p2} + 2\mu\lambda^2 \left\{ \nu (1 - \zeta^2) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n} \Big|_{n=0} - \right. \\ & \left. - \sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta) \left( \gamma_p c_{p3} + \frac{1}{2} c_{p2} \right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\sigma_z|_{\Gamma} = 2\mu\lambda \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\zeta) c_{p2} + 2\mu\lambda^2 \sum_{p=1}^{\infty} t_p(\zeta) c_{p3} + \dots \quad (1.4)$$

$$\tau_{ns} = 0, \quad \tau_{sz} = 0, \quad \nu = \frac{1}{1 - 2\sigma} \quad (1.5)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона (при расчетах принимаем  $\sigma = 1/3$ );  $n_p(\zeta)$ ,  $r_p(\zeta)$ ,  $s_p(\zeta)$  и  $t_p(\zeta)$  — известные функции  $\zeta$ , приведенные в [1,3];  $2\gamma_p$  — корни функции  $x^{-1} \sin x - 1$ . Суммирование ведется по корням, вещественная часть которых положительна.



Фиг. 1

При помощи электронно-вычислительной машины вычислены первые 80 из этих корней. В табл. 1 приведены значения сорока корней, расположенных в первом квадранте. Корни, расположенные в четвертом квадранте, сопряжены с ними. Занумерованы корни в порядке возрастания их модуля, при этом нечетные номера соответствуют корням из первого квадранта, четные — из четвертого.

В (1.1) — (1.4) величины  $\psi_j(n)$  — бигармонические функции для внешности круга, причем  $\psi_0(n)$  — решение задачи изгиба бесконечной плиты с круглым отверстием, даваемое прикладной теорией. Контурные значения для функций  $\psi_j(n)$  и постоянные величины  $c_{pj}$  определяются граничными условиями на  $\Gamma$  из бесконечной системы уравнений.

Таблица 1

$P$	1	3	5	7	9
$\text{Re } \gamma_p$	3.7488381	6.9499798	10.119259	13.277274	16.429870
$\text{Im } \gamma_p$	1.3843390	1.6761046	1.8583834	1.9915704	2.0966252
$P$	11	13	15	17	19
$\text{Re } \gamma_p$	19.579408	22.727036	25.873384	29.018831	32.163617
$\text{Im } \gamma_p$	2.1833970	2.2573196	2.3217134	2.3787569	2.4299576
$P$	21	23	25	27	29
$\text{Re } \gamma_p$	35.307902	38.451800	41.595390	44.738731	47.881869
$\text{Im } \gamma_p$	2.4764020	2.5188989	2.5580670	2.5943901	2.6282535
$P$	31	33	35	37	39
$\text{Re } \gamma_p$	51.024838	54.167664	57.310371	60.452973	63.595487
$\text{Im } \gamma_p$	2.6599693	2.6897936	2.7179394	2.7445856	2.7698838
$P$	41	43	45	47	49
$\text{Re } \gamma_p$	66.737923	69.880291	73.022600	76.164856	79.307064
$\text{Im } \gamma_p$	2.7939639	2.8169378	2.8389026	2.8599433	2.8801345
$P$	51	53	55	57	59
$\text{Re } \gamma_p$	82.449231	85.591359	88.733453	91.875516	95.017552
$\text{Im } \gamma_p$	2.8995421	2.9182247	2.9362345	2.9536182	2.9704179
$P$	61	63	65	67	69
$\text{Re } \gamma_p$	98.159562	101.30155	104.44351	107.58546	110.72739
$\text{Im } \gamma_p$	2.9866716	3.0024137	3.0176753	3.0324849	3.0468686
$P$	71	73	75	77	79
$\text{Re } \gamma_p$	113.86930	117.01119	120.15307	123.29494	126.43680
$\text{Im } \gamma_p$	3.0608501	3.0744514	3.0876925	3.1005920	3.1131672

Граничные условия для  $\psi_0(n)$  даются соотношениями

$$\frac{1}{3} \left[ 2\nu \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial n^2} + (\nu - 1) \frac{\partial \psi_0}{\partial n} \right]_{n=0} = \frac{k}{\mu} \frac{1}{2(m+2)}, \quad \left. \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n} \right|_{n=0} = 0 \quad (1.6)$$

Легко видеть, что они совпадают с граничными условиями прикладной теории изгиба пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа.

Из (1.6) имеем

$$\psi_0 = B_0 - \frac{k}{\mu} \frac{3}{2(\nu+1)(m+2)} \ln(n+1) \quad (1.7)$$

Для того чтобы исключить движение плиты как твердого тела, примем  $B_0 = 0$ .

Для определения  $c_{p2}$  имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq t}}^{\infty} \frac{\gamma_p^2 \gamma_t^2 (\cos^2 \gamma_t - \cos^2 \gamma_p)}{(\gamma_t^2 - \gamma_p^2)^2 (\gamma_t - \gamma_p)} [\nu (\gamma_t + \gamma_p)^2 - (\gamma_t - \gamma_p)^2] c_{p2} - \frac{\nu}{2} \gamma_t^3 \left( \frac{2}{3} \cos^2 \gamma_t - 1 \right) c_{t2} = F_{t2}$$

$$F_{t2} = \frac{k}{\mu} \left[ \frac{\gamma_t}{8\nu} \int_{-1}^1 \zeta^{m_{n_t}}(\zeta) d\zeta + \frac{3(\nu-1)}{4\nu(m+2)} \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t} \right] \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.8)$$

Систему (1.8) запишем в виде

$$\|M\| \cdot \|c_{t2}\| = \|F_{t2}\| \quad (1.9)$$

Здесь  $\|M\|$  — комплексная матрица левых частей системы (1.8), а  $\|c_{t2}\|$  и  $\|F_{t2}\|$  — соответственно столбцы неизвестных и правых частей.

Преобразуем систему (1.8) к действительной форме, положив

$$c_{p2} = u_{p2} - i v_{p2} \quad (1.10)$$

Учитывая тот факт, что  $\gamma_{2n-1}$  сопряжено с  $\gamma_{2n}$ , легко показать, что

$$u_{2n-1,2} = u_{2n,2}, \quad v_{2n-1,2} = -v_{2n,2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.11)$$

и порядок действительной системы понижается вдвое. Если ограничиться двадцатью пограничными слоями, соответствующими двадцати первым корням  $\gamma_p$ , лежащим в правой полуплоскости, то порядок системы окажется равным двадцати. Введем обозначения

$$f_{2n-1,2} = \frac{\mu}{k} \operatorname{Re} F_{2n-1,2}, \quad f_{2n,2} = \frac{\mu}{k} \operatorname{Im} F_{2n-1,2} \quad (1.12)$$

(n = 1, 2, 3, ...)

$$x_{2n-1} = \frac{\mu}{k} u_{2n-1,2}, \quad x_{2n} = \frac{\mu}{k} v_{2n-1,2} \quad (1.13)$$

При этом система (1.9) запишется в виде

$$\|M_1\| \cdot \|x_j\| = \|f_{j2}\| \quad (1.14)$$

где  $\|M_1\|$  — матрица преобразованной вещественной системы.

Система (1.14) решается методом урезаний. Последовательно, при помощи электронно-вычислительной машины, обращались матрицы 20-го, 18-го, ..., 4-го порядков.

В работе [1] показано, что матрица универсальна для данного материала, т. е. не зависит от нагрузок и геометрии плиты, поэтому результаты обращения могут быть использованы для решения любых задач изгиба плит. При помощи обратных матриц оказалось возможным из двадцати неизвестных  $x_j^*$  найти значения первых четырнадцати, так как для определения остальных неизвестных располагаем недостаточным количеством приближений. Вычисления производились для  $m = 3$  и  $m = 5$ . Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

$j$	1	2	3	4	5
$x_j$	$0.180170 \cdot 10^{-2}$	$-0.12745 \cdot 10^{-3}$	$0.1993 \cdot 10^{-4}$	$-0.7332 \cdot 10^{-4}$	$-0.797 \cdot 10^{-5}$
$j$	6	7	8	9	10
$m=3$ $\tilde{x}_j$	$-0.9967 \cdot 10^{-5}$	$-0.400 \cdot 10^{-5}$	$-0.119 \cdot 10^{-5}$	$-0.177 \cdot 10^{-5}$	$0.15 \cdot 10^{-6}$
$j$	11	12	13	14	
$x_j$	$-0.83 \cdot 10^{-6}$	$0.30 \cdot 10^{-6}$	$-0.42 \cdot 10^{-6}$	$0.23 \cdot 10^{-6}$	
$j$	1	2	3	4	5
$x_j$	$0.18609 \cdot 10^{-2}$	$-0.689 \cdot 10^{-4}$	$0.1785 \cdot 10^{-3}$	$-0.1152 \cdot 10^{-3}$	$0.119 \cdot 10^{-4}$
$j$	6	7	8	9	10
$m=5$ $x_j$	$-0.318 \cdot 10^{-4}$	$-0.18 \cdot 10^{-5}$	$-0.842 \cdot 10^{-5}$	$-0.20 \cdot 10^{-5}$	$-0.24 \cdot 10^{-5}$
$j$	11	12	13	14	
$x_j$	$-0.12 \cdot 10^{-5}$	$-0.7 \cdot 10^{-6}$	$-0.7 \cdot 10^{-6}$	$-0.2 \cdot 10^{-6}$	

Для иллюстрации быстроты сходимости процесса нахождения  $x_j$  приводим значения разных приближений для неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_{13}$  и  $x_{14}$  как наиболее характерных (табл. 3). Верхний индекс указывает на порядок системы, из которой данное неизвестное определяется.

Таблица 3

$n$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_{13}^{(n)}$	$x_{14}^{(n)}$
6	$0.1803134 \cdot 10^{-2}$	$-0.128097 \cdot 10^{-3}$		
8	$0.1801734 \cdot 10^{-2}$	$-0.127304 \cdot 10^{-3}$		
10	$0.1801719 \cdot 10^{-2}$	$-0.127338 \cdot 10^{-3}$		
$m=3$ 12	$0.1801708 \cdot 10^{-2}$	$-0.127381 \cdot 10^{-3}$		
14	$0.1801705 \cdot 10^{-2}$	$-0.127410 \cdot 10^{-3}$		
16	$0.1801703 \cdot 10^{-2}$	$-0.127429 \cdot 10^{-3}$	$-0.458 \cdot 10^{-6}$	$0.28 \cdot 10^{-6}$
18	$0.1801702 \cdot 10^{-2}$	$-0.127439 \cdot 10^{-3}$	$-0.436 \cdot 10^{-6}$	$0.25 \cdot 10^{-6}$
20	$0.1801702 \cdot 10^{-2}$	$-0.127443 \cdot 10^{-3}$	$-0.428 \cdot 10^{-6}$	$0.24 \cdot 10^{-6}$
6	$0.187135 \cdot 10^{-2}$	$-0.73145 \cdot 10^{-4}$		
8	$0.186330 \cdot 10^{-2}$	$-0.69875 \cdot 10^{-4}$		
10	$0.186181 \cdot 10^{-2}$	$-0.68719 \cdot 10^{-4}$		
$m=5$ 12	$0.186139 \cdot 10^{-2}$	$-0.68742 \cdot 10^{-4}$		
14	$0.186119 \cdot 10^{-2}$	$-0.68802 \cdot 10^{-4}$		
16	$0.186109 \cdot 10^{-2}$	$-0.68855 \cdot 10^{-4}$	$-0.128 \cdot 10^{-5}$	$-0.83 \cdot 10^{-7}$
18	$0.186101 \cdot 10^{-2}$	$-0.68893 \cdot 10^{-4}$	$-0.74 \cdot 10^{-6}$	$-0.13 \cdot 10^{-6}$
20	$0.186098 \cdot 10^{-2}$	$-0.68919 \cdot 10^{-4}$	$-0.70 \cdot 10^{-6}$	$-0.16 \cdot 10^{-6}$

В дальнейшем увидим, что точность, полученная при определении  $x_j$ , оказывается с практической точки зрения достаточной.

Теперь можно вычислить в первом приближении все компоненты напряженного состояния в плите по формулам (1.1)–(1.4). В них входят бесконечные ряды, образованные пограничными слоями. Посмотрим, как быстро сходятся эти ряды в наиболее характерных точках. Здесь и в дальнейшем будем обозначать коэффициенты при  $\lambda^i$  в разложении напряжений  $\sigma_n$ ,  $\sigma_s$ ,  $\tau_{nz}$  на  $\Gamma$  соответственно через  $\sigma_{ni}$ ,  $\sigma_{si}$ ,  $\tau_{nzi}$ .

Подставляя (1.7), (1.10), (1.13) и найденные значения  $x_j$  в (1.1), (1.3), получим при  $m=3$

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1}|_{\Gamma, \zeta=\pm 1} &= \pm k \{0.6000 + [49.3082 - 1.924 - 2.792 - 1.806 - \\ &- 1.102 - 0.69 - 0.45 - \dots] \cdot 10^{-2}\} \approx \pm k (0.6000 + 0.405) = \pm k \cdot 1.005 \\ \tau_{nz_1}|_{\Gamma, \zeta=0} &= -k [7.4879 - 10.885 + 4.919 - 2.179 + 0.919 - 0.31 + 0.06 - \dots] \cdot 10^{-2} \approx \\ &\approx -k \cdot 0.0001 \end{aligned}$$

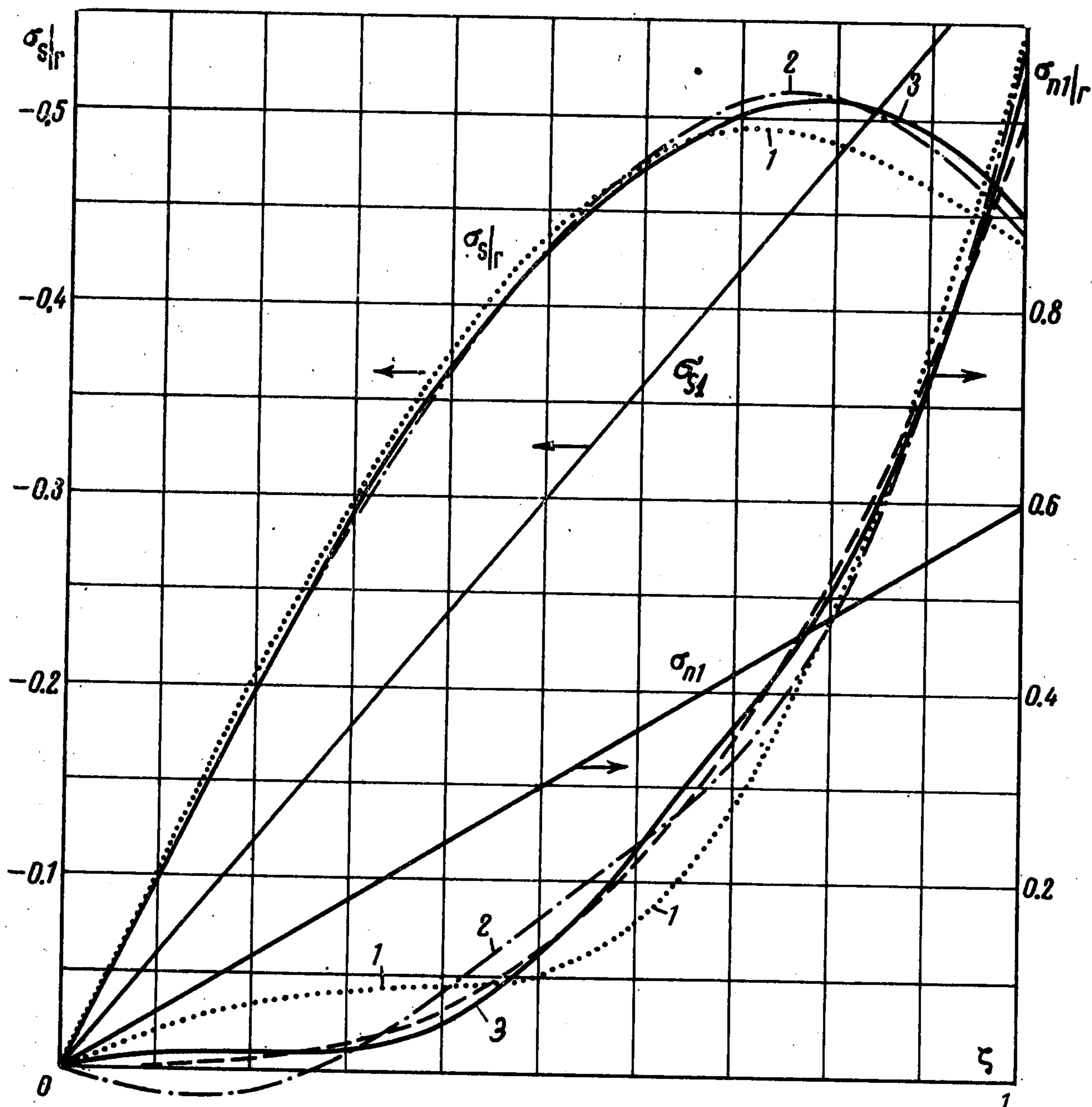
При  $m = 5$  получим

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1}|_{\Gamma, \zeta=\pm 1} &= \pm k \{0.4286 + [52.492 + 13.056 - 0.044 - 1.80 - 1.68 - \\ &1.28 - 0.9 - \dots] \cdot 10^{-2}\} \approx \pm k (0.4286 + 0.598) = \pm k 1.027 \\ \tau_{n_2}|_{\Gamma, \xi=0} &= -k [5.386 - 11.684 + 10.42 - 6.63 + 4.0 - 2.5 + 1.4 - \dots] 10^{-2} \approx \\ &\approx -k 0.004 \end{aligned}$$

По условию задачи

$$\sigma_n|_{\Gamma, \zeta=\pm 1} = \pm k\lambda, \quad \tau_{n_2}|_{\Gamma, \zeta=0} = 0 \quad (1.15)$$

Сравнивая полученные результаты с (1.15), видим, что при использовании семи пограничных слоев отличие незначительное даже в точках  $\zeta = \pm 1$ , где следовало ожидать наиболее слабую сходимость рядов. В других точках сходимость лучше.



Фиг. 2

На фиг. 2 показаны кривые приближений  $\sigma_{n1}|_{\Gamma}(\zeta)$  с учетом последовательно одного, двух и трех пограничных слоев при  $m = 3$ . Отрезок прямой на графике соответствует решению Кирхгофа, пунктирная линия — точному решению задачи, а кривые 1, 2, 3 — соответственно решениям задачи с учетом одного, двух и трех пограничных слоев.

Теперь вычислим в первом приближении  $\sigma_s|_{\Gamma}$  в точках  $\zeta = \pm 1$ . Именно по этому напряжению чаще всего определяется коэффициент концентрации. Величина  $\sigma_s|_{\Gamma}$  вычисляется по формуле (1.2), но легко показать, что  $\sigma_s|_{\Gamma, \zeta=\pm 1}$  в первом приближении при любом  $m$  можно найти, не решая бесконечной системы для определения  $\sigma_{r_2}$ .

Подставляя (1.7) в (1.1), (1.2) с учетом (1.11) и того, что

$$(\nu - 1) s_p (\pm 1) + \gamma_p^2 n_p (\pm 1) = \pm 2\nu\gamma_p^2 = 2\nu s_p (\pm 1)$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} &= \pm k \left\{ \frac{3}{m+2} + 8\nu \frac{\mu}{k} \sum_{p=1, 3, \dots} \operatorname{Re}(\gamma_p^2 c_{p2}) \right\} \\ \sigma_{s1} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} &= \pm k \left\{ -\frac{3}{m+2} + 4(\nu - 1) \frac{\mu}{k} \sum_{p=1, 3, \dots} \operatorname{Re}(\gamma_p^2 c_{p2}) \right\} \end{aligned}$$

Но

$$\sigma_{n1} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \pm k$$

Поэтому

$$\sum_{p=1, 3, \dots} \operatorname{Re}(\gamma_p^2 c_{p2}) = \frac{k}{8\nu\mu} \frac{m-1}{m+2}$$

При этом имеем

$$\sigma_{s1} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \pm k \left\{ -\frac{3}{m+2} + \frac{\nu-1}{2\nu} \frac{m-1}{m+2} \right\} \quad (1.16)$$

В (1.16) первое слагаемое в скобках соответствует решению прикладной теории. Из (1.16) видно, что в данном случае при  $m \neq 1$ , естественно, коэффициент концентрации не определяется асимптотически точно на основе теории Кирхгофа. Погрешность этой теории в первом приближении растет с увеличением  $m$ . При  $m = 3$  она составляет 22% от решения прикладной теории, при  $m = 5$  — 44%, при  $m = 7$  — 66% и т. д.

В других точках поверхности  $\Gamma$  эта погрешность также не будет малой. На фиг. 2 представлены графики функции  $\sigma_{s1} |_{\Gamma}(\zeta)$ , вычисленной по теории Кирхгофа (прямая линия) и с учетом одного, двух и трех пограничных слоев (1, 2, 3).

§ 2. Как было описано в [1], на следующем этапе построения асимптотического разложения решения задачи определяем  $\psi_1(n)$  и  $c_{p3}$ .

Граничные условия для  $\psi_1(n)$  даются соотношениями

$$\frac{1}{3} \left[ 2\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial n^2} + (\nu - 1) \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \right]_{n=0} = (\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} c_{p2}, \quad \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial n} \Big|_{n=0} = 0 \quad (2.1)$$

Из (2.1) имеем

$$\psi_1 = B_1 - 3 \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} c_{p2} \ln(n + 1) \quad (2.2)$$

Как и прежде, полагаем  $B_1 = 0$ . Система уравнений для  $c_{p3}$  имеет вид

$$\|M\| \cdot \|c_{t3}\| = \|F_{t3}\| \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} F_{t3} &= 6(\nu - 1)^2 \frac{\sin^2 \gamma_t}{\gamma_t} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} c_{p2} + \frac{F_{t2}}{2\gamma_t} + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq t}}^{\infty} \frac{\cos^2 \gamma_t - \cos^2 \gamma_p}{\gamma_t^2 - \gamma_p^2} \gamma_t \gamma_p \times \\ &\times \left[ 1 - \nu^2 \frac{(\gamma_t + \gamma_p)^2}{(\gamma_t - \gamma_p)^2} \right] c_{p2} - 2\nu\gamma_t^2 \left( 1 + \nu - \frac{2}{3} \nu \cos^2 \gamma_t \right) c_{t2} \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Здесь  $\|M\|$  — та же матрица, что и у системы (1.8). Систему (2.3) решаем так же, как систему (1.9), учитывая, что  $c_{2n,3}$  сопряжено с  $c_{2n-1,3}$ , и полагая

$$c_{2n-1,3} = \frac{k}{\mu} (y_{2n-1} - iy_{2n}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

При этом оказалось возможным определить значения (табл. 4) десяти первых неизвестных  $y_j$ , так как из (2.3) видно, что при найденных четырнадцати значениях  $x_j$  для определения  $y_j$  располагаем урезанными системами до 14-го порядка.

Таблица 4

	$j =$	1	2	3	4	5
	$\bar{y}_j =$	$-0.36003 \cdot 10^{-3}$	$-0.5072 \cdot 10^{-4}$	$0.190 \cdot 10^{-5}$	$0.9050 \cdot 10^{-5}$	$0.200 \cdot 10^{-5}$
$m = 3$	$j =$	6	7	8	9	10
	$\bar{y}_j =$	$0.26 \cdot 10^{-6}$	$0.21 \cdot 10^{-6}$	$-0.5 \cdot 10^{-7}$	$0.11 \cdot 10^{-6}$	$-0.4 \cdot 10^{-7}$
	$j =$	1	2	3	4	5
	$\bar{y}_j =$	$-0.37035 \cdot 10^{-3}$	$-0.6225 \cdot 10^{-4}$	$-0.1661 \cdot 10^{-4}$	$0.1155 \cdot 10^{-4}$	$0.38 \cdot 10^{-6}$
$m = 5$	$j =$	6	7	8	9	10
	$\bar{y}_j =$	$0.221 \cdot 10^{-5}$	$0.48 \cdot 10^{-6}$	$0.33 \cdot 10^{-6}$	$0.19 \cdot 10^{-6}$	$0.3 \cdot 10^{-7}$

Для иллюстрации быстроты сходимости процесса определения  $y_j$  приведем значения приближений для неизвестных  $y_1, y_2, y_9$  и  $y_{10}$  (табл. 5).

Таблица 5

	$n$	$y_1^{(n)}$	$y_2^{(n)}$	$y_9^{(n)}$	$y_{10}^{(n)}$
$m = 3$	4	$-0.36050 \cdot 10^{-3}$	$-0.4938 \cdot 10^{-4}$		
	6	$-0.35991 \cdot 10^{-3}$	$-0.50775 \cdot 10^{-4}$		
	8	$-0.35998 \cdot 10^{-3}$	$-0.50738 \cdot 10^{-4}$		
	10	$-0.36000 \cdot 10^{-3}$	$-0.50732 \cdot 10^{-4}$		
	12	$-0.360014 \cdot 10^{-3}$	$-0.50726 \cdot 10^{-4}$	$0.108 \cdot 10^{-6}$	$-0.49 \cdot 10^{-7}$
	14	$-0.360020 \cdot 10^{-3}$	$-0.50724 \cdot 10^{-4}$	$0.1075 \cdot 10^{-6}$	$-0.46 \cdot 10^{-7}$
$m = 5$	4	$-0.37288 \cdot 10^{-3}$	$-0.61675 \cdot 10^{-3}$		
	6	$-0.37072 \cdot 10^{-3}$	$-0.62075 \cdot 10^{-3}$		
	8	$-0.37037 \cdot 10^{-3}$	$-0.62262 \cdot 10^{-3}$		
	10	$-0.37036 \cdot 10^{-3}$	$-0.62258 \cdot 10^{-3}$		
	12	$-0.370354 \cdot 10^{-3}$	$-0.62255 \cdot 10^{-3}$	$0.190 \cdot 10^{-6}$	$0.23 \cdot 10^{-7}$
	14	$-0.370352 \cdot 10^{-3}$	$-0.62253 \cdot 10^{-3}$	$0.191 \cdot 10^{-6}$	$0.27 \cdot 10^{-7}$

Теперь можно определить компоненты напряженного состояния во втором приближении. Проверим сходимость пограничных слоев на этом этапе. Подставляя (2.2), (2.4) и найденные значения  $y_j$  в (1.1), (1.3), получим при  $m = 3$

$$\sigma_{nz} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \pm k \{ [-11.7504 + 0.714 + 0.498 + 0.080 + 0.062 + \dots] + [10.71918 - 0.1446 - 0.1832 - 0.1518 - 0.0456 - 0.0242 - 0.0138 - \dots] \} 10^{-2} \approx \approx \pm k (-0.1040 + 0.1016) = \mp k 0.0024$$

$$\tau_{nz2} |_{\Gamma, \zeta = 0} = -k \{ [1.3572 + 1.504 - 0.381 + 0.03 - 0.02 + \dots] + [-2.03747 - 0.6441 + 0.2492 - 0.0939 + 0.0359 - 0.013 - 0.004 + \dots] \} 10^{-2} \approx \approx -k (0.0249 - 0.0251) = k 0.0002$$

При  $m = 5$  получим

$$\sigma_{nz} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \pm k \{ [-12.3382 - 1.1650 + 0.290 + 0.242 + 0.126 + \dots] + [11.3542 + 1.4340 + 0.0244 - 0.0850 - 0.0664 - 0.0432 - 0.0254 - \dots] \} 10^{-2} \approx \approx \pm k (-0.1285 + 0.1259) = \mp k 0.0026$$

$$\tau_{nz2} |_{\Gamma, \zeta = 0} = -k \{ [1.774 + 1.221 - 0.894 + 0.40 - 0.15 + \dots] + [-2.384 - 0.261 + 0.419 - 0.236 + 0.125 - 0.06 + 0.03 + \dots] \} 10^{-2} \approx \approx -k (0.0235 - 0.0237) = k 0.0002$$

Сравнивая полученные результаты с заданными значениями напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_{nz}$  на контуре  $\Gamma$  (1.15), видим, что и во втором приближении сходимость удовлетворительная.

Обратимся к напряжению  $\sigma_s |_{\Gamma}$ . Аналогично тому, как было сделано в § 1, легко показать, что  $\sigma_s |_{\Gamma, \zeta = \pm 1}$  во втором приближении можно найти, не решая бесконечной системы уравнений для определения  $c_{p3}$ . При этом получим

$$\sigma_{s2} |_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \mp \mu \frac{3\nu - 1}{\nu} \sum_{p=1, 3, \dots} \operatorname{Re} \left\{ \left[ 6(\nu - 1) \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} + 2\gamma_p n_p(1) \right] c_{p2} \right\} \quad (2.5)$$

Из (2.5), проводя вычисления, получим при  $m = 3$

$$\sigma_{s2} \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \mp k \frac{8}{3} [5.35959 - 0.0723 - 0.0916 - 0.0759 - \\ - 0.0228 - 0.0121 - 0.0069 - \dots] \cdot 10^{-2} \approx \mp k \cdot 0.135$$

При  $m = 5$  имеем

$$\sigma_{s2} \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \mp k \frac{8}{3} [5.6771 + 0.7170 + 0.0122 - 0.0425 - \\ - 0.0332 - 0.0216 - 0.0127 - \dots] \cdot 10^{-2} \approx \mp k \cdot 0.168$$

§ 3. На третьем этапе построения асимптотического разложения можно определить  $\psi_2(n)$  и  $c_{p4}$ . Граничные условия для  $\psi_2(n)$  даются соотношениями (3.1)

$$\frac{1}{3} \left[ 2\nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial n^2} + (\nu - 1) \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right]_{n=0} = (\nu - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \left( c_{p3} + \frac{1}{2\gamma_p} c_{p2} \right), \quad \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial n} \Big|_{n=0} = 0$$

Из (3.1) имеем

$$\psi_2 = - \frac{3(\nu - 1)}{\nu + 1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} \left( c_{p3} + \frac{1}{2\gamma_p} c_{p2} \right) \ln(n + 1) \quad (3.2)$$

Для определения  $c_{p4}$  имеется бесконечная система уравнений с прежней матрицей. Но, аналогично изложенному, легко показать, что третье приближение для  $\sigma_s \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1}$  находится без определения  $c_{p4}$ . При этом получим (3.3)

$$\sigma_{s3} \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \mp \mu \frac{3\nu - 1}{\nu} \sum_{p=1, 3, \dots} \operatorname{Re} \left\{ \left[ 6(\nu - 1) \frac{\sin^2 \gamma_p}{\gamma_p} + 2\gamma_p n_p(1) \right] \left( c_{p3} + \frac{1}{2\gamma_p} c_{p2} \right) \right\}$$

Из (3.3) после вычислений получим при  $m = 3$

$$\sigma_{s3} \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \mp k^{8/3} \{ [-1.2423 + 0.0335 + 0.0170 + 0.0021 + 0.0013 + \dots] + \\ + 1/2 [1.64360 + 0.00538 - 0.0178 - 0.0034 - 0.0014 - 0.00065 - \dots] \} 10^{-2} \approx \\ \approx \pm k \cdot 0.0100$$

При  $m = 5$  получим

$$\sigma_{s3} \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \mp k^{8/3} \{ [-1.3005 - 0.06460 + 0.0090 + 0.0061 + 0.0026 + \dots] + \\ + 1/2 [1.7137 + 0.1335 + 0.00629 - 0.0022 - 0.0018 - 0.0010 - 0.0006 - \dots] \} 10^{-2} \approx \\ \approx \pm k \cdot 0.0113$$

Приводим асимптотические разложения  $\sigma_s \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1}$  с учетом трех приближений

$$\sigma_s \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \pm k [-0.4667 \lambda - 0.135 \lambda^2 + 0.0100 \lambda^3 + \dots] \quad \text{при } m = 3 \quad (3.4)$$

$$\sigma_s \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} = \pm k [-0.2381 \lambda - 0.168 \lambda^2 + 0.0113 \lambda^3 + \dots] \quad \text{при } m = 5 \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) видно, что даже при  $\lambda = 2$  (т. е. когда толщина плиты вдвое превосходит диаметр отверстия) третий член разложения составляет 5—8% от суммы двух первых членов. Следовательно, при  $\lambda < 2$  можно рекомендовать для определения коэффициента концентрации напряжений ограничиваться двумя первыми членами его разложения по степеням  $\lambda$ .

Из (3.4), (3.5) легко видеть, что при  $\lambda = 0.1$  сумма двух вторых членов составляет 3—7% от первого. Поэтому при  $\lambda < 0.1$  можно определять коэффициент концентрации напряжения  $\sigma_s$ , используя следующее выражение для указанного напряжения:

$$\sigma_s \Big|_{\Gamma, \zeta = \pm 1} \approx \pm k \lambda \left[ - \frac{3}{m+2} + \frac{\nu-1}{2\nu} \frac{m-1}{m+2} \right] \quad (3.6)$$

Поступила 30 X 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
2. Аксентян О. К., Ворович И. И. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.