ОСНОВНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

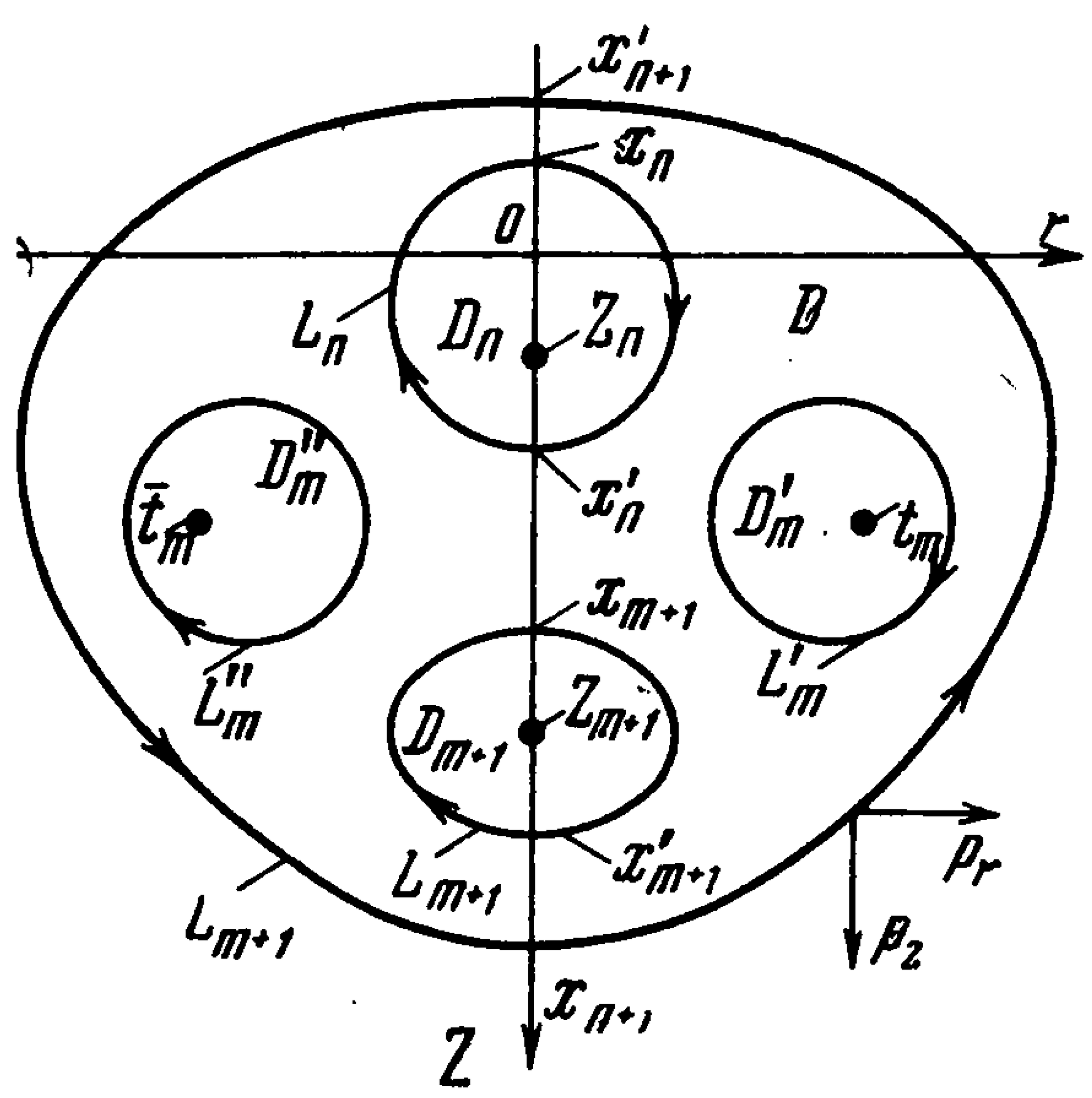
Ю. И. Соловьев (Новосибирск)

Для решения пространственных осесимметричных задач теории упругости применяются аналитические и p-аналитические функции комплексного переменного (см. например [1-5]). В работах [6,7] для тех же целей были использованы обобщенные аналитические функции, несущественно отличающиеся от функций, введенных в [8].

Таким путем удалось получить интегральные уравнения Фредгольма для первой и второй основных задач в случае односвязных и многосвязных тел вращения.

Ниже указанный метод распространен на решение основной смешанной задачи, когда на одной части границы заданы внешние силы, а на другой — перемещения. Получено сингулярное интегральное уравнение, аналогичное соответствующему уравнению плоской теории упругости [9,10]. Произведено исследование этого уравнения и доказано существование решения.

1. Пусть D — симметричная плоская область, занимаемая осевым сечением тела вращения, L — граница этой области, состоящая из простых замкнутых контуров без общих точек. В плоскости осевого сечения введем прямоугольную систему координат zor, совмещая ось z с осью симметрии. Части D, расположенные соответственно справа и слева от оси z (фиг. 1), будем обозначать через D' и D''. Аналогично вводятся обозначения L' и L''. Внутренние контуры L_j' и L_j'' ($j = 1, 2, \ldots, m$) не пересекают оси симметрии. Остальные внутренние контуры L_j ($j = m + 1, \ldots, n$) будем нумеровать снизу вверх в том порядке, в каком они пересекают ось z. Внешний контур L_{n+1} содержит внутри себя все остальные. Будем предполагать, что каждый из контуров имеет кривизну, удовлетворяющую условию H (1). На L выбрано положительное направление, при котором область D остается слева. Начальные точки дуг L_j' ($j = m+1, \ldots\ldots, n + 1$) будем обозначать через x_j, а конечные через x_j' (фиг. 1).



Все рассуждения данной статьи пригодны (с соответствующими изменениями), и для случая тороидальных тел ($n = m$, контур L_{n+1} распадается на два замкнутых контура L'_{n+1} и L''_{n+1} не имеющих общих точек), а также для случая бесконечного пространства с осесимметричными полостями (контур L_{n+1} отсутствует).

Как показано в работе [6], общее решение осесимметричной задачи может быть представлено в форме

$$2G(w + iu) = \varkappa'\Phi(t, \bar{t}) - t\overline{\Phi'(t, \bar{t})} - \overline{\Psi(t, \bar{t})} \tag{1.1}$$

Здесь w и u — аксиальное и радиальное перемещения точек упругого тела; G — модуль сдвига; $\varkappa' = 3.5—4\nu$; ν — коэффициент Пуассона; $\Phi(t, \bar{t})$ и $\Psi(t, \bar{t})$ — обобщенные аналитические функции аргументов $t = z + ir$, $\bar{t} = z - ir$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению вида

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{t}} - \frac{1}{t-\bar{t}}(\Phi - \overline{\Phi}) = 0 \qquad \left(2\frac{\partial}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{1.2}$$

и условию четности

$$\Phi(t, \bar{t}) = \overline{\Phi(\bar{t}, t)} \tag{1.3}$$

Под $\Phi'(t, \bar{t})$ понимается производная в смысле Л. Берса по паре $(1, i/r)$; она численно равна $\partial\Phi/\partial z$.

Компоненты напряжения в цилиндрических координатах, соответствующие перемещениям (1.1), таковы:

$$
\begin{gathered}
\sigma_z+\sigma_r+\sigma_\theta=2(1+\nu)(\Phi'+\overline{\Phi'}),\quad \sigma_z+\sigma_r=2(\Phi'+\overline{\Phi'})-2G(u/r)\\
\sigma_z+i\tau_{zr}=1{,}5\Phi'+\overline{\Phi'}-t\overline{\Phi''}-\overline{\Psi'}
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Пусть cd — какая-либо гладкая дуга, расположенная в D', а p_z и p_r — интенсивность усилий, которые действуют на поверхность, образованную вращением этой дуги вокруг оси z. Тогда

$$
\begin{gathered}
-R+\frac{i}{r}Z=0.5\Phi(t,\bar t)+\overline{t\Phi'(t,\bar t)}+\overline{\Psi(t,\bar t)}-C-\frac{2(1-\nu)}{t-\bar t}C'-\\
-2(1-\nu)\int\limits_c^t\left[2i\operatorname{Im}\Phi(t_1,\bar t_1)-\frac{1}{t_1-\bar t_1}C'\right]\frac{dt_1+d\bar t_1}{t_1-\bar t_1}
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

$$
Z(s)=\int\limits_0^s p_z(s_1)r(s_1)\,ds_1,\qquad R(s)=\int\limits_0^s\left[p_r(s_1)+\frac{1}{r^2(s_1)}Z(s_1)\frac{dz(s_1)}{ds_1}\right]ds_1 \tag{1.6}
$$

Здесь s — дуговая абсцисса точки t, отсчитываемая от начальной точки c, C и C' — вещественные постоянные.

Рассматривая условия однозначности и непрерывности напряжений и перемещений, можно получить следующие представления:

$$
\begin{gathered}
\Phi(t,\bar t)=\Phi_*(t,\bar t)+\sum_{j=1}^{n}A_j\Theta(t,\bar t;t_j,\bar t_j)+\sum_{j=1}^{m}B_i\Xi(t,\bar t;t_j,\bar t_j)+\frac{1}{t-\bar t}A\\
\Psi(t,\bar t)=\Psi_*(t,\bar t)-\varkappa'\sum_{j=1}^{n}A_j\Theta(t,\bar t;t_j,\bar t_j)+\varkappa'\sum_{j=1}^{m}B_j\Xi(t,\bar t;t_j;\bar t_j)-\frac{\varkappa'}{t-\bar t}A
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

Здесь A, A_j, B_j — вещественные постоянные, t_j — произвольные фиксированные точки, расположенные соответственно внутри контуров L_j' $(j=1,2,\ldots m)$ и $L_j(j=m+1,\ldots n)$; Φ_* и Ψ_* — обобщенные аналитические функции, регулярные в D (т. е. однозначные и непрерывные вместе со своими производными). Функции Ξ и Θ являются аналогами логарифма: они удовлетворяют уравнению (1.2) и условию (1.3), при обходе контура L_j' против часовой стрелки $\Xi(t,\bar t;t_j,\bar t_j)$ получает приращение, равное 2π, а $\Theta(t,\bar t;t_j,\bar t_j)$ — приращение $2\pi/(t-\bar t)$. При $\operatorname{Im}t\geqslant 0$, $\operatorname{Im}t_j\geqslant 0$ выражения для этих функций таковы:

$$
\begin{gathered}
\Xi(t,\bar t;t_j,\bar t_j)=-2H(\delta,q)+2\frac{z-z_j}{|t-\bar t_j|}(1+q)\boldsymbol{K}(q)+\frac{2i|t-\bar t_j|}{r(1+q)}[\boldsymbol{K}(q)-\boldsymbol{E}(q)]\\
\Theta(t,\bar t;t_j,\bar t_j)=\frac{1+q}{|t-\bar t_j|}\boldsymbol{K}(q)+\frac{i}{r}\left[H(\delta,q)-\frac{\pi}{2}\right]\\
H(\delta,q)=\boldsymbol{E}(q)F(\delta,q')-\boldsymbol{K}(q)F(\delta,q')+\boldsymbol{K}(q)E(\delta,q')
\end{gathered}
\tag{1.8, 1.9}
$$

$$
q=\frac{|t-\bar t_j|-|t-t_j|}{|t-\bar t_j|+|t-t_j|},\qquad q'=\sqrt{1-q^2},\qquad \delta=\operatorname{Arc}\cos\left[\frac{q}{q'}\left(\frac{r}{qr_j}-1\right)^{1/2}\right]
$$

Здесь $F(\delta,q')$ и $E(\delta,q')$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля q', а $K(q)$ и $E(q)$ — полные эллиптические интегралы модуля q. Используем те ветви функций Ξ и Θ, которые соответствуют значениям $\delta=\pi/2$, если $r=0$, $z\to\infty$ и $\delta=-\pi/2$, если $r=0$, $z\to-\infty$. Линии разветвления соединяют точки t_j и $\bar t_j$, они пересекают ось z в одной и той же для всех $j=1\div m$ точке, лежащей внутри области D выше последнего контура L_n. Когда $j\geqslant m+1$, будем полагать $t_j=\bar t_j=z_j$ и разрезать плоскость вдоль оси z при $z\leqslant z_j$.

2. Пусть линия L' разделена на n_1+1 дуг l_k' $(0 \leqslant k \leqslant n_1,\ n_1 \geqslant n)$, начальные точки которых обозначим через c_k. Точки c_k и $\bar{c}_k$, не лежащие на оси симметрии, будем называть узлами; точки пересечения L с осью z к числу узлов относить не будем. Общее число узлов равно $2p$ $(p \leqslant n_1)$. Обозначим через Λ_1 совокупность дуг l_k', на которых заданы внешние силы p_z и p_r, а через Λ_2 — совокупность дуг l_k', на которых заданы перемещения w и u. Дуги одного и того же контура L_j', принадлежащие Λ_1 и Λ_2, чередуются. Пока будем предполагать, что ни одна из кривых L_j' не содержится полностью в Λ_1. Подставляя (1.7) в (1.5) и (1.1) и устремляя t к контурной точке $\tau_0 \in l_k'$ $(0 \leqslant k \leqslant n_1)$, имеем

$$2b(\tau_0)\,\Phi_*(\tau_0, \bar{\tau}_0) - \varkappa'\Phi_*(\tau_0, \bar{\tau}_0) + \overline{\tau_0\Phi_*'(\tau_0, \bar{\tau}_0)} + \overline{\Psi_*(\tau_0, \bar{\tau}_0)} + \sum_{j=1}^{n} A_j S_j(\tau_0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} B_j T_j(\tau_0) - b(\tau_0) \int_{c_k}^{\tau_0} 2i \operatorname{Im} \Phi_*(\tau, \bar{\tau}) \frac{d\tau + d\bar{\tau}}{\tau - \bar{\tau}} = -f(\tau_0) + C(\tau_0) \qquad (2.1)$$

Здесь

$$S_j(\tau_0) = 2b(\tau_0)\,\Theta_j - \varkappa'(\Theta_j + \bar{\Theta}_j) + \tau_0\bar{\Theta}_j' - \frac{1}{\tau_0 - \bar{\tau}_0}\,\alpha_j(\tau_0)\,b(\tau_0) -$$

$$- b(\tau_0) \int_{c_k}^{\tau_0} \left[2i \operatorname{Im} \Theta(\tau, \bar{\tau}; t_j, \bar{t}_j) - \frac{1}{\tau - \bar{\tau}}\,\alpha_j(\tau_0)\right] \frac{d\tau + d\bar{\tau}}{\tau - \bar{\tau}} \qquad (2.2)$$

$$T_j(\tau_0) = 2b(\tau_0)\,\Xi_j - \varkappa'(\Xi_j - \bar{\Xi}_j) + \tau_0\bar{\Xi}_j' - b(\tau_0) \int_{c_k}^{\tau_0} 2i \operatorname{Im} \Xi(\tau, \bar{\tau}; t_j, \bar{t}_j) \frac{d\tau + d\bar{\tau}}{\tau - \bar{\tau}}$$

$$\Theta_j = \Theta(\tau_0, \bar{\tau}_0; t_j, \bar{t}_j), \qquad \Xi_j = \Xi(\tau_0, \bar{\tau}_0; t_j, \bar{t}_j), \qquad A = 0$$

при $\tau_0 \in l_k' \in \Lambda_1$

$$a(\tau_0) = \frac{1}{4}(3 - 2\varkappa'), \qquad b(\tau_0) = \frac{1}{4}(1 + 2\varkappa'), \qquad f(\tau_0) = R_k + \frac{2}{\tau_0 - \bar{\tau}_0} Z_k \qquad (2.3)$$

$$C(\tau_0) = C_k + \frac{2(1-\nu)}{\tau_0 - \bar{\tau}_0} C_k' - 2(1-\nu) C_k' \int_{c_k}^{\tau_0} \frac{d\tau + d\bar{\tau}}{(\tau - \bar{\tau})^2}$$

при $\tau_0 \in l_k' \in \Lambda_2$

$$\alpha(\tau_0) = \frac{1}{2} - \varkappa', \qquad b(\tau_0) = 0, \qquad f(\tau_0) = 2G(w + iu), \qquad C(\tau_0) = 0. \qquad (2.4)$$

Величины Z_k и R_k могут быть определены по формулам (1.6), где за начальную принимается точка c_k, если x_j' не является концом l_k', в противном случае интегрировать в (1.6) будем от x_j' (в отрицательном направлении). Общее число вещественных постоянных C_k и C_k' равно p, ибо $C_k' = 0$ для дуг, примыкающих к оси z. Величина $\alpha_j(\tau_0)$ равна единице, если $c_k = x_j (j = m+1, \ldots n)$, и нулю во всех остальных случаях. При этих условиях левая и правая части равенства (2.1) непрерывны в пределах каждой дуги l_k' (линия разветвления для Θ_j и Ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ проходит через одну из точек $c_k \in L_j'$).

Следуя идее Д. И. Шермана [9], регулярную часть в (1.7) представим в форме обобщенных интегралов типа Коши

$$\Phi_*(t, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i}\int_L F(\tau)\, W d\tau \qquad \left(W = W(t, \tau) = \frac{\psi(t, \tau)}{\tau - t}\right)$$

$$\Psi_*(t, \bar{t}) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \overline{F(\tau)}\, W\,[(1 - 2\varkappa')\,d\tau + d\bar{\tau}] - \frac{1}{2\pi i}\int_L F(\tau)\left(\bar{\tau}\frac{\partial W}{\partial z}\,d\tau - W d\bar{\tau}\right) \qquad (2.5)$$

где плотность $F(\tau)$ удовлетворяет условию (1.3), W — обобщенное ядро Коши [6], вещественная функция $\psi(t,\tau)$ определена равенствами

$$\psi(t,\tau)=\left|\frac{\tau-\bar\tau}{\tau-\bar t}\right|[\boldsymbol{K}(k_1)-\boldsymbol{D}(k_1)],\qquad \operatorname{Im}\tau\cdot\operatorname{Im}t\geqslant 0$$

$$\psi(t,\tau)=\left|\frac{\tau-\bar\tau}{\tau-t}\right|\boldsymbol{D}(k_2),\qquad \operatorname{Im}\tau\cdot\operatorname{Im}t\leqslant 0 \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{D}(k)=\frac{1}{k^2}[\boldsymbol{K}(k)-\boldsymbol{E}(k)],\quad k_1=\frac{\sqrt{|\tau-\bar\tau|\cdot|t-\bar t|}}{|\tau-\bar t|},\quad k_2=\frac{\sqrt{|\tau-\bar\tau|\cdot|t-\bar t|}}{|\tau-t|}$$

Тогда

$$-\varkappa'\Phi_*(t,\bar t)+t\overline{\Phi_*'(t,\bar t)}+\overline{\Psi_*(t,\bar t)}=\frac{1-2\varkappa'}{4\pi i}\int_L F(\tau)(Wd\tau-\overline{W}d\tau)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{F(\tau)}\left[(\tau-t)\frac{\partial\overline{W}}{\partial z}d\bar\tau-\overline{W}d\tau\right]-\frac{1}{4\pi i}\int_L F(\tau)(W+\overline{W})\,d\tau=$$
$$=\frac{1-2\varkappa'}{4\pi i}\int_L F(\tau)(Wd\tau-\overline{W}d\bar\tau)-\frac{1}{2\pi i}\int_L F(\tau)\overline{W}_1\left(\frac{\bar\tau-t}{\tau-\bar t}d\tau-d\bar\tau\right)-$$
$$-\frac{1}{4\pi i}\int_L F(\tau)\frac{\tau+\bar\tau-t-\bar t}{\tau-\bar t}(W+\overline{W})\,d\tau \tag{2.7}$$

Здесь обозначено $W_1=W(t,\bar\tau)$ и учтены соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{1}{2(\tau-t)}(2W+W_1+\overline{W}_1),\qquad \int_L F(\bar\tau)W_1d\bar\tau=-\int_L F(\tau)\,Wd\tau$$

Имея в виду, что для обобщенных интегралов типа Коши справедливы формулы Сохоцкого — Племеля, устремим в (2.5) и (2.7) t к τ_0. Подставим получающиеся выражения в (2.1) и положим

$$A_j=\operatorname{Re}\int_{L'_j}F(\tau)\,ds=\frac{1}{2}\int_L F(\tau)\,\rho_j(\tau)\,d\tau$$

$$B_j=\operatorname{Im}\int_{L'_j}F(\tau)\,|\tau-\bar\tau|\,ds=-\frac{1}{2}\int_L F(\tau)\,(\tau-\bar\tau)\,\rho_j(\tau)\,d\tau \tag{2.8}$$

Здесь $\rho_j(\tau)=d\bar\tau\,/\,ds$ при $\tau\in L_j$ и $\rho_j=0$ во всех остальных точках. В результате равенство (2.1) преобразуется в сингулярное интегральное уравнение относительно $F(\tau)$:

$$a(\tau_0)F(\tau_0)+\frac{b(\tau_0)}{\pi i}\int_L W(\tau_0,\tau)F(\tau)\,d\tau+\int_L K(\tau_0,\tau)F(\tau)\,d\tau=-f(\tau_0)+C(\tau_0) \tag{2.9}$$

$$K(\tau_0,\tau)=\frac{2\varkappa'-1}{4\pi i}\psi(\tau_0,\tau)\frac{d}{d\tau}\ln\frac{\bar\tau-\bar\tau_0}{\tau-\tau_0}+\frac{1}{2\pi i}\psi(\tau_0,\bar\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\bar\tau-\tau_0}{\tau-\bar\tau_0}\right)-$$
$$-\frac{1}{4\pi i}\psi(\tau_0,\tau)\frac{(\tau+\bar\tau-\tau_0-\bar\tau_0)^2}{(\tau-\bar\tau_0)\,|\tau-\tau_0|^2}-\frac{1}{2(\tau-\bar\tau)}b(\tau_0)\left(1+\frac{d\bar\tau}{d\tau}\right)[\beta(\tau_0,\tau)-\beta(\tau_0,\bar\tau)]-$$
$$-\frac{b(\tau_0)}{\pi i}Q(\tau_0,\tau)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}S_j(\tau_0)\,\rho_j(\tau)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}T_j(\tau_0)(\tau-\bar\tau)\,\rho_j(\tau) \tag{2.10}$$

$$Q(\tau_0,\tau)=\int_{c_k}^{\tau_0}[W(t,\tau)-\overline{W(t,\bar\tau)}]\frac{dt+d\bar t}{t-\bar t}\qquad (t,\tau_0\in l_k')$$

Здесь $\beta(\tau_0, \tau) = 1$, если $\tau \in c_k\tau_0$ при $\tau_0 \in l_k'$, и $\beta(\tau_0, \tau) = 0$ — для других случаев взаимного расположения τ_0 и τ. При дифференцировании по τ считается, что $\bar\tau$ есть функция от τ, а τ_0 и $\bar\tau_0$ — постоянные. Хотя выше было принято $\operatorname{Im}\tau_0 \geqslant 0$, но уравнение (2.9) остается справедливым и для произвольного τ_0, если полагать, что

$$a(\tau_0) = a(\bar\tau_0),\ \ b(\tau_0) = b(\bar\tau_0),\ \ f(\tau_0) = \overline{f(\bar\tau_0)},\ \ C(\tau_0) = \overline{C(\bar\tau_0)},\ \ K(\tau_0, \tau) = -\overline{K(\bar\tau_0, \tau)} \tag{2.11}$$

Ядро $K(\tau_0, \tau)$ имеет представление

$$K(\tau_0, \tau) = \frac{N(\tau_0, \tau)}{|\tau - \tau_0|^\lambda\, |\tau - \bar\tau_0|^\lambda} \prod_{(k)} (|\tau - c_k| \cdot |\tau - \bar c_k|)^{-\lambda} \tag{2.12}$$

где знак произведения распространяется на все узлы, функция $N(\tau_0, \tau)$ принадлежит классу H, а λ — произвольное число в интервале $0 < \lambda < 1$, которое можно сделать сколь угодно малым.

Заметим, что уравнение (2.9) может быть преобразовано в интегральное уравнение с обычным ядром Коши

$$a(\tau_0) F(\tau_0) + \frac{b(\tau_0)}{\pi i} \int_L \frac{F(\tau)\, d\tau}{\tau - \tau_0} + \int_L \left[\frac{1}{\pi i} K_0(\tau_0, \tau) + K(\tau_0, \tau)\right] F(\tau)\, d\tau = -f(\tau_0) + C(\tau_0) \tag{2.13}$$

Ядро $K_0(\tau_0, \tau) = b(\tau_0)\, [\psi(\tau_0, \tau) - 1]\, (\tau - \tau_0)^{-1}$ не добавляет новых особенностей к (2.12), если ни одна из дуг $l_k' \in \Lambda_1$ не примыкает к оси z. Если же, например, $x_j \in \Lambda_1$, то при $\tau_0 = \bar\tau_0 = x_j$, $\tau \to x_j$ это ядро имеет особенность типа $\mathrm{const}\, (\tau - x_j)^{-1}$.

3. Пусть $f(\tau)$ принадлежит классу H_0, а $df / d\tau$ — классу H^*. Решение $F(\tau)$ уравнения (2.9) будем искать в классе h_{2p} (терминология [11]). Методом, использованным в работе [10], но с привлечением некоторых дополнительных рассуждений, можно доказать принадлежность $F(\tau)$ классу H, а производной $dF / d\tau$ — классу H^*. Отсюда вытекает, что выражения, стоящие в правых частях равенств (1.1) и (1.5), непрерывно продолжимы на все точки каждой из дуг l_k', и сделанные в п. 2 выкладки законны.

Рассмотрим уравнение (2.9) при $f(\tau_0) \equiv 0$. Пусть $F_0(\tau)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (1.3), а $\Phi_0(t, \bar t)$ и $\Psi_0(t, \bar t)$ — соответствующие обобщенные аналитические функции. Можно показать, что напряжения, получающиеся при подстановке Φ_0 и Ψ_0 в (1.4), непрерывно продолжимы на все точки границы L, кроме узлов. В окрестности каждого из узлов c_k они не превосходят по модулю выражения $\mathrm{const}\, |t - c_k|^{-\alpha}$ $(\alpha < 1)$. Поэтому здесь применима теорема единственности. Следовательно

$$\Phi_0(t, \bar t) = \gamma + \frac{1}{t - \bar t}\gamma', \qquad \Psi_0(t, \bar t) = \varkappa'\gamma - \frac{\varkappa'}{t - \bar t}\gamma', \qquad C_k \equiv \gamma, \qquad C_k' \equiv \gamma' \tag{3.1}$$

Здесь γ и γ' — вещественные постоянные. Подставляя найденные выражения для Φ и Ψ в (1.7) и учитывая, что $A = 0$, а Φ_* и Ψ_* регулярны, имеем $\gamma' = 0$ и

$$A_j \equiv 0, \qquad B_j \equiv 0. \tag{3.2}$$

Используем выражения (2.5), преобразуя второе из них интегрированием по частям. Получим

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_L F_0(\tau)\, W d\tau \tag{3.3}$$

$$\varkappa'\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{(1 - \varkappa')\, \overline{F_0(\tau)} - \bar\tau \frac{d}{d\tau} F_0(\tau) - \frac{\bar\tau}{2(\tau - \bar\tau)} \left(1 - \frac{d\bar\tau}{d\tau}\right) [F_0(\tau) - \overline{F_0(\tau)}]\right\} W d\tau$$

Если ввести обозначения

$$\Phi^*(\tau, \bar\tau) = F_0(\tau) - \gamma$$

$$\Psi^*(\tau, \bar\tau) = (1 - \varkappa')\, \overline{F_0(\tau)} - \bar\tau \frac{d}{d\tau} F_0(\tau) - \frac{\bar\tau}{2(\tau - \bar\tau)} \left(1 - \frac{d\bar\tau}{d\tau}\right) [F_0(\tau) - \overline{F_0(\tau)}] - \varkappa'\gamma \tag{3.4}$$

то из (3.3) следует, что $\Phi^*(\tau, \bar{\tau})$ и $\Psi^*(\tau, \bar{\tau})$ представляют собой граничные значения функций $\Phi^*(t, \bar{t})$ и $\Psi^*(t, \bar{t})$, которые регулярны в областях $D_1', D_1'', D_2', D_2'', \ldots, \ldots, D_m', D_m'', D_{m+1}, \ldots, D_n, D_{n+1}$ и исчезают на бесконечности (конечные области D_j' и D_j'' $(j = 1, 2, \ldots, m)$ лежат соответственно внутри контуров L_j' и L_j''; области D_j $(j = m+1, \ldots n)$ — внутри контуров L_j; а бесконечная область D_{n+1} лежит вне контура L_{n+1}).

Исключая из равенств (3.4) функцию $F_0(\tau)$, будем иметь

$$(1-\varkappa')\,\overline{\Phi^*(\tau, \bar{\tau})} - \bar{\tau}\,\Phi^{*\prime}(\tau, \bar{\tau}) - \Psi^*(\tau, \bar{\tau}) = 8(1-\nu)\,\gamma \tag{3.5}$$

Здесь под $\Phi^{*\prime}(\tau, \bar{\tau})$ понимается граничное значение функции $\Phi^{*\prime}(t, \bar{t})$. При помощи формулы Грина легко получить

$$\operatorname{Im}\int_{L'_j} \Phi^{*\prime}\left[(1-\varkappa')\,\overline{\Phi^*} - \bar{\tau}\Phi^{*\prime} - \Psi^*\right]|\tau - \bar{\tau}|\,d\tau = -8\iint_{D'_j}\left[2(1-\nu)(\operatorname{Re}\Phi^{*\prime})^2 + \right.$$
$$\left. + (1-2\nu)(\operatorname{Im}\Phi^{*\prime})^2\right] r\,dz\,dr \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{3.6}$$

При подстановке (3.5) левая часть (3.6) обращается в нуль. Поэтому $\Phi^{*\prime}(t, \bar{t}) \equiv 0$, и

$$\Phi^*(t, \bar{t}) = \gamma_j + \frac{1}{t - \bar{t}}\gamma_j', \quad \Psi^*(t, \bar{t}) = -8(1-\nu)\gamma + (1-\varkappa')\gamma_j - \frac{1-\varkappa'}{t-\bar{t}}\gamma_j', \; t \in D_j' \tag{3.7}$$

Здесь γ_j и γ_j' — вещественные постоянные, причем $\gamma_j' = 0$ $(j \geqslant m+1)$.

Из условий на бесконечности вытекает

$$\gamma_{n+1} = 0, \qquad \gamma = 0 \tag{3.8}$$

Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.4), имеем

$$F_0(\tau) = \gamma_j + \frac{1}{\tau - \bar{\tau}}\gamma_j' \qquad (\tau \in L_j' + L_j''; \; j = 1, 2, \ldots m)$$
$$F_0(\tau) = \gamma_j \qquad (\tau \in L_j; \; j = m+1, \ldots n), \qquad F_0(\tau) = 0 \qquad (\tau \in L_{n+1}) \tag{3.9}$$

Теперь при помощи (2.8) и (3.2) получаем $\gamma_j \equiv 0$, $\gamma_j' \equiv 0$, а потому

$$F_0(\tau) \equiv 0, \qquad C_k \equiv 0, \qquad C_k' \equiv 0 \tag{3.10}$$

Таким же путем доказывается, что однородное уравнение (2.9) не имеет иных решений, кроме тривиального. Наложенное на $F(\tau)$ условие (1.3) не уменьшает общности, ибо вследствие (2.11) произвольное решение уравнения (2.9) может быть представлено в форме $F_1(\tau) + iF_2(\tau)$, где $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$ удовлетворяют (2.9) и (1.3).

Остальные рассуждения данного пункта основаны на предположении, что для уравнения (2.9) (или (2.13)) справедливы теоремы Нетера (если точки оси симметрии не принадлежат Λ_1, то это очевидно, так как тогда ядро K_0 — фредгольмово).

Индекс класса h_{2p} уравнения (2.9) равен $(-p)$. Поэтому существует p линейно независимых решений класса h_0 союзного однородного уравнения

$$a(\tau_0)\,\mathrm{K}(\tau_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L b(\tau)\,W(\tau, \tau_0)\,\mathrm{K}(\tau)\,d\tau + \int_L K(\tau, \tau_0)\,\mathrm{K}(\tau)\,d\tau = 0 \tag{3.11}$$

Не уменьшая общности, указанные решения $\mathrm{K}_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ можно считать удовлетворяющими условию (1.3).

Теперь условия разрешимости уравнения (2.9) принимают вид

$$\int_L [C(\tau) - f(\tau)]\,\mathrm{K}_j(\tau)\,d\tau = 2i\operatorname{Im}\int_{L'} [C(\tau) - f(\tau)]\,\mathrm{K}_j(\tau)\,d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots p) \tag{3.12}$$

Отсюда легко получить систему вещественных линейных уравнений для определения постоянных C_k и C_k'. Рассуждая по аналогии с [10] и учитывая (3.1)—(3.10), можно показать, что определитель этой системы нулю не равен. Следовательно, поставленная задача имеет решение и притом единственное.

4. Снимем ограничение, наложенное на Λ_1 в п. 2. Пусть, например, контур L_m' целиком входит в состав Λ_1. Тогда взамен (2.8) для $j = m$ положим (сравним [7]):

$$A_m = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int\limits_{L'_m} rp_z ds, \quad 4\pi B_m + \int\limits_{L'_m} \left[2i \operatorname{Im} \Phi(\tau, \bar\tau) - \frac{1}{\tau - \bar\tau} C_m'\right] \frac{d\tau + d\bar\tau}{\tau - \bar\tau} =$$

$$= \frac{1}{2(1-\nu)} \int\limits_{L'_m} \left(p_r + \frac{1}{r^2} Z_m \frac{dz}{ds}\right) ds \qquad (4.1)$$

$$C_m = -\operatorname{Re} \int\limits_{L'_m} F(\tau)\, ds, \qquad C_m' = -\operatorname{Im} \int\limits_{L'_m} F(\tau) \,|\tau - \bar\tau|\, ds$$

Оба выражения (2.5) следует дополнить слагаемым

$$b_m \Theta'(t, \bar t; t_m, \bar t_m) \qquad \left(b_m = \operatorname{Re} \int\limits_{L'_m} \overline{F(\tau)} (\tau - \bar\tau)\, d\tau\right) \qquad (4.2)$$

и заменить там $\varkappa'$ на $\varkappa_1(\tau)$, полагая $\varkappa_1(\tau) = -0.5$ при $\tau \in L_m' + L_m''$ и $\varkappa_1(\tau) = \varkappa'$ на остальных частях L. В результате получается интегральное уравнение вида (2.9), где $b(\tau_0) = 0$ при $\tau_0 \in L_m' + L_m''$. Его разрешимость легко доказывается методом, примененным в п. 3.

Указанный прием может быть распространен и на случай нескольких контуров $L_j' \in \Lambda_1$ (в том числе и примыкающих к оси симметрии).

Поступила 8 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ростовцев Н. А. Комплексные функции напряжений в осесимметричной контактной задаче теории упругости. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
2. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 4.
3. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
4. Положий Г. Н. О (p, q)-аналитических функциях комплексного переменного и некоторых их применениях. В сб. «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного», Физматгиз, 1960.
5. Чемерис В. С. Об интегральных уравнениях осесимметричной теории упругости. Прикладная механика, АН УССР, 1965, т. 1, вып. 5.
6. Соловьев Ю. И. Решение осесимметричной задачи теории упругости для односвязных тел вращения. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3.
7. Соловьев Ю. И. Решение пространственной осесимметричной задачи теории упругости для многосвязных тел вращения при помощи обобщенных аналитических функций. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2.
8. Данилюк И. И. Об общем представлении осесимметричных полей. ПМТФ, 1960, № 2.
9. Шерман Д. И. Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
10. Манджавидзе Г. Ф. Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости, ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
11. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1962.