КИНЕМАТИКА КОНТИНУАЛЬНО-ДИСЛОКАЦИОННОЙ СРЕДЫ

В. А. Бабкин (Москва)

Рассматривается теория деформации среды с континуальным распределением дислокаций. Такую среду будем называть континуально-дислокационной в отличие от дискретно-дислокационной среды, в которой число дислокаций конечное, хотя бы и очень большое.

1. Деформация. Движение точки сплошной среды с лагранжевыми координатами ξ^i $(i = 1, 2, 3)$, рассматривается в трехмерном эвклидовом пространстве, в котором введена декартова система координат x^i $(i = 1, 2, 3)$. Все кинематические характеристики будут проектироваться на координатные оси x^i.

В настоящей работе делается следующее основное предположение: в фиксированный момент времени t малое относительное перемещение точек с лагранжевыми координатами ξ^i и $\xi^i + d\xi^i$ является полным дифференциалом по ξ^i и по некоторым пока неопределенным физическим параметрам $\chi^s(\xi^i, t)$ $(s = 1, \ldots, S)$

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} d\xi^i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi^s} d\chi^s \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u} = u^i(\xi^j, \chi^s(\xi^j, t), t)$ Эi — перемещение точки в декартовых координатах.

В дальнейшем по разновысоким индексам, стоящим рядом, всегда будет производиться суммирование.

По определению, относительное перемещение при $\chi^s = \text{const}$ $(s = 1, 2, \ldots, S)$

$$d\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i}\bigg|_{\chi^s = \text{const}} d\xi^i \tag{1.2}$$

называется упругим относительным перемещением, а относительное перемещение

$$d\mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi^s} d\chi^s \tag{1.3}$$

параметрическим (неупругим) относительным перемещением, ибо оно связано с изменением параметров χ^s.

Физический смысл введения параметров χ^s состоит в том, что введение этих параметров позволяет разделить малое относительное перемещение на две части (1.2) и (1.3). Таким образом, кинематическое описание становится более подробным: вектор $\mathbf{u}(\xi^i, \chi^s, t)$ показывает не только каково общее перемещение точки ξ^i, но и какими физическими процессами в среде, характеризуемыми параметрами χ^s, сопровождается это перемещение.

Параметры χ^s, зависящие от координат ξ^i и времени t, по самому смыслу своего введения должны быть тесно связаны с относительным перемещением, должны характеризовать его в каждой точке и в каждый момент времени. Они могут быть скалярами, векторами, тензорами. Но вообще параметры χ^s должны быть найдены из опыта и физических соображений.

Математический смысл введения χ^s заключается в том, что выражение (1.1) позволяет описать относительное перемещение в континуально-дислокационной среде.

Перепишем формулу (1.1) в виде

$$d\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial \xi^i}\right) d\xi^i = \frac{D\mathbf{u}}{D\xi^i} d\xi^i \tag{1.4}$$

Поскольку $d\mathbf{u}$ — полный дифференциал по ξ^i, то

$$\frac{D^2\mathbf{u}}{D\xi^i D\xi^j} = \frac{D^2\mathbf{u}}{D\xi^j D\xi^i} \tag{1.5}$$

а так как $d\mathbf{u}$ — также полный дифференциал по ξ^i и χ^s (см. формулировку гипотезы), то

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial \xi^j \partial \xi^i} \tag{1.6}$$

Но, как легко проверить,

$$\frac{D}{D\xi^j}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \neq \frac{D}{D\xi^i}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} \tag{1.7}$$

Тогда интеграл по любому замкнутому контуру C

$$\oint\limits_C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \mathbf{b} \tag{1.8}$$

дает, по определению [1, 2], вектор Бюргерса, не равный нулю ввиду (1.7). А это и означает, что в рассматриваемой среде континуально распределены дислокации.

Если относительное перемещение $d\mathbf{u}$ описывается формулами (1.2) и (1.3), то, очевидно, в такой среде дислокаций нет.

Вектор Бюргерса можно определить также интегралом

$$\oint\limits_C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial \xi^i} d\xi^i = -\mathbf{b} \tag{1.9}$$

В приведенных выше формулах символом $D\mathbf{u} / D\xi^i$ обозначалась полная частная производная по ξ^i, учитывающая зависимость $\mathbf{u}$ от $\chi^s(\xi^i)$. Величина $\partial \mathbf{u} / \partial \xi^i$ — это частная производная по ξ^i при постоянных χ^s. Это упругая частная производная.

Компоненты тензора конечных деформаций определяются формулами [3].

$$2\varepsilon_{ij} = g^{\wedge}_{ij} - g^{\circ}_{ij} = Э^{\wedge}_i Э'_j - Э^{\circ}_i Э^{\circ}_j \tag{1.10}$$

где $Э^{\wedge}_i$ образуют базис в подвижных лагранжевых координатах, а $Э^{\circ}_i$ — в неподвижных.

Пользуясь известным методом выражения тензора деформаций через перемещения [3] и формулой (1.4), легко получим в декартовой системе координат x^i

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial u_i}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_j}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial \chi^s}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \chi^t}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i}\frac{\partial \chi^t}{\partial x^j}\right) \tag{1.11}$$

При бесконечно малых перемещениях

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_i}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i}\right) \tag{1.12}$$

Деформации (1.12) можно разделить на упругие $\varepsilon^{(e)}_{ij}$ и неупругие, или параметрические, $\varepsilon^{(p)}_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{(e)}_{ij} + \varepsilon^{(p)}_{ij} \tag{1.13}$$

причем

$$\varepsilon^{(e)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \qquad \varepsilon^{(p)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i}\right) \tag{1.14}$$

Аналогично компоненты тензора бесконечно малых поворотов можно представить в виде суммы двух компонент

$$\eta^{(e)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \qquad \eta^{(p)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i}\right) \tag{1.15}$$

Но ни тензор конечных деформаций $\varepsilon_{ij}Э^iЭ^j$, ни тензор конечных поворотов $\eta_{ij}Э^iЭ^j$ нельзя разделить на упругую и параметрическую части, как это видно, например, из формулы (1.11).

Для рассматриваемой среды

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{u}(\xi^i, \chi^s(\xi^i, t), t) \tag{1.16}$$

Поэтому скорость точки ξ^i определяем по формуле

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\bigg|_{\chi^s,\ \xi^i=\mathrm{const}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial t}\bigg|_{\xi^i=\mathrm{const}} = \mathbf{v}^{(e)} + \mathbf{v}^{(p)} \tag{1.17}$$

Компоненты тензора скоростей деформации определяются формулами [3]

$$e_{ij} = \left(\frac{De_{ij}}{Dt}\right)_{\xi^i=\mathrm{const}} \tag{1.18}$$

Учитывая формулы (1.14), (1.17), (1.18), получим выражения компонентов тензоров скоростей деформации через скорости в случае, когда $\partial u_i / \partial x^j$ не зависят явно от χ^s, а $\partial u_i / \partial \chi^s$ не зависят явно от t

$$e^{(e)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^{(e)}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^{(e)}_j}{\partial x^i}\right), \qquad e^{(p)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^{(p)}_i}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} + \frac{\partial v^{(p)}_j}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial x^i}\right) \tag{1.19}$$

2. Геометрическая трактовка теории деформации. Будем рассматривать деформацию континуально-дислокационной среды. Введем подвижную лагранжеву систему координат с базисом

$$Э^{\wedge}_i = \frac{D\mathbf{r}}{D\xi^i} \tag{2.1}$$

Если данную среду рассматривать как некоторое пространство с метрикой

$$g^{\wedge}_{ij} = Э^{\wedge}_i Э^{\wedge}_j = g^{\circ}_{ij} + 2\varepsilon^{\wedge}_{ij} \tag{2.2}$$

где $g^{\circ}_{ij} = Э^{\circ}_i Э^{\circ}_j$ и $Э^{\circ}_i$ образуют базис в начальном состоянии в эвклидовом пространстве, то оказывается, что это пространство является эвклидовым пространством.

В самом деле, как легко проверить непосредственным вычислением,

$$R_{ikl}{}^m = \frac{\partial \Gamma_{kl}{}^m}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}{}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{ip}{}^m \Gamma_{kl}{}^p - \Gamma_{kp}{}^m \Gamma_{il}{}^p \equiv 0 \tag{2.3}$$

$$S_{ij}{}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}{}^k - \Gamma_{ji}{}^k) \equiv 0 \tag{2.4}$$

Здесь $R_{ikl}{}^m$ — компоненты тензора кривизны, $S_{ij}{}^k$ — компоненты тензора кручения и $\Gamma_{ij}{}^k$ — коэффициенты связности, записанные в декартовой системе координат. Коэффициенты связност иопределяются формулами

$$\frac{DЭ^{\wedge}_i}{D\xi^j} = \Gamma^{\wedge}_{ij}{}^k Э^{\wedge}_k = \Gamma_{ij}{}^k Э_k \tag{2.5}$$

Полученный результат вполне естествен, так как полная деформация тела заключается в том, что точки тела перешли из одних точек эвклидова пространства в другие точки эвклидова же пространства, т. е. само тело по-прежнему осталось частью эвклидова пространства.

Но данную континуально-дислокационную среду можно рассматривать как пространство, в котором метрический тензор $g^{(e)}_{ij}Э^iЭ^j$ определен формулами

$$g^{(e)\wedge}_{ij} = Э^{(e)}_i Э^{(e)}_j, \qquad g^{(e)\wedge}_{ij}\, Э^{(e)i}Э^{(e)j} = g^{(e)}_{ij}\, Э^iЭ^j \tag{2.6}$$

$$Э^{(e)}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}\bigg|_{\chi^s=\mathrm{const}} \tag{2.7}$$

$Э^{(e)}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ будем называть упругим базисом.

Учитывая формулы (1.10), (2.6), (1.14), получим, что метрический тензор $g^{(e)}_{ij}Э^iЭ^j$ при бесконечно малых деформациях связан с тензором упругих деформаций по формулам

$$g^{(e)\wedge}_{ij} - g^{\circ}_{ij} = 2\varepsilon^{(e)\wedge}_{ij} \tag{2.8}$$

Поскольку при движении среды $Э^{(e)}_i$ одновременно зависят от координат ξ^i явно и через параметры χ^s, коэффициенты связности определяются формулами

$$\frac{DЭ^{(e)}_i}{D\xi^j} = \Gamma^{(e)\wedge}{}_{ij}{}^k Э^{(e)}_k = \Gamma^{(e)}{}_{ij}{}^k Э_k \tag{2.9}$$

Непосредственное вычисление в декартовой системе координат дает

$$2S^{(e)}{}_{ij}{}^k Э_k = (\Gamma^{(e)}{}_{ij}{}^k - \Gamma^{(e)}{}_{ji}{}^k)\, Э_k = \frac{D}{Dx^j}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} - \frac{D}{Dx^i}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Dg^{(e)}{}_{is}}{Dx^j} + \frac{Dg^{(e)}{}_{js}}{Dx^i} - \frac{Dg^{(e)}{}_{ij}}{Dx^s}\right) -$$

$$- S^{(e)}{}_{js}{}^k g^{(e)}{}_{ki} - S^{(e)}{}_{is}{}^k g^{(e)}{}_{kj} + S^{(e)}{}_{ij}{}^k g^{(e)}{}_{ks} = \Gamma^{(e)}{}_{ij}{}^k g^{(e)}{}_{ks} \tag{2.11}$$

Формулы (2.10), (2.11) показывают, что континуально-дислокационную среду можно, с геометрической точки зрения, рассматривать как трехмерное пространство аффинной связности $L^{(e)}{}_3$ с тензором кручения $S^{(e)}{}_{ij}{}^k Э^i Э^j Э_k$.

Если же подвижный репер и метрику пространства, сопоставляемого деформируемой среде, определить формулами

$$Э^{(p)}{}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^s}\frac{\partial \chi^s}{\partial \xi^i} \tag{2.12}$$

$$g^{(p)\wedge}{}_{ij} = Э^{(p)}{}_i Э^{(p)}{}_j, \qquad g^{(p)\wedge}{}_{ij}\, Э^{(p)i} Э^{(p)j} = g^{(p)}{}_{ij}\, Э^i Э^j \tag{2.13}$$

то получатся формулы, аналогичные (2.10) и (2.11)

$$2S^{(p)}{}_{ij}{}^k Э_k = (\Gamma^{(p)}{}_{ij}{}^k - \Gamma^{(p)}{}_{ji}{}^k)\, Э_k = \frac{D}{Dx^i}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} - \frac{D}{Dx^j}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Dg^{(p)}{}_{is}}{Dx^j} + \frac{Dg^{(p)}{}_{js}}{Dx^i} - \frac{Dg^{(p)}{}_{ij}}{Dx^s}\right) -$$

$$- S^{(p)}{}_{js}{}^k g^{(p)}{}_{ki} - S^{(p)}{}_{is}{}^k g^{(p)}{}_{kj} + S^{(p)}{}_{ij}{}^k g^{(p)}{}_{ks} = \Gamma^{(p)}{}_{ij}{}^k g^{(p)}{}_{ks} \tag{2.15}$$

и пространство снова является метрическим пространством аффинной связности $L^{(p)}{}_3$ с тензором кручения $S^{(p)}{}_{ij}{}^k Э^i Э^j Э_k$. Из сравнения (2.10) с (2.14)

$$S^{(e)}{}_{ij}{}^k = - S^{(p)}{}_{ij}{}^k \tag{2.16}$$

Таким образом, данную континуально-дислокационную среду, с геометрической точки зрения, можно рассматривать или как пространство аффинной связности $L^{(e)}{}_3$ или как $L^{(p)}{}_3$ в зависимости от того, рассматривается ли среда, с физической точки зрения, как упругая с тензором несовместности деформаций или как неупругая также с тензором несовместности деформаций. Если рассматривать в среде упругие и неупругие деформации одновременно, то полные деформации совместны, и континуально-дислокационная среда с геометрической точки зрения является эвклидовым пространством.

Легко проверить, что тензоры кривизны пространств $L_3{}^{(e)}$ и $L_3{}^{(p)}$ равны нулю.

Все проведенные в этом параграфе рассуждения справедливы как для случая бесконечно малых деформаций, так и для случая конечных деформаций. Однако в случае конечных деформаций формулы (2.8) уже не определяют компонентов тензора упругой деформации, так как, очевидно, в случае конечных деформаций такой тензор вообще нельзя выделить из тензора деформаций, но определяют компоненты тензора, который можно назвать квазиупругим тензором.

Аналогично, в случае конечных деформаций формулы

$$g^{(p)\wedge}{}_{ij} - g^{\circ}{}_{ij} = 2\varepsilon^{(p)\wedge}{}_{ij} \tag{2.17}$$

определяют компоненты квазипараметрического тензора.

Тензор кручения $S^{(e)}{}_{ij}{}^{k}\text{Э}^i\text{Э}^j\text{Э}_k$ пространства $L^{(e)}{}_3$ в терминах континуальной теории дислокацией есть тензор плотности дислокаций $\alpha^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j$. В самом деле, по определению тензора плотности дислокаций [1],

$$\mathbf{b} = \oint\limits_C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}\, dx^i = \int\limits_S \alpha^{ik}\, dS_i \text{Э}_k \tag{2.18}$$

где S — поверхность, опирающаяся на C. По формуле Стокса из (2.18), получается

$$\alpha^{ik}\text{Э}_k = e^{ilm}\frac{D}{Dx^l}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^m} \tag{2.19}$$

Отсюда, сравнивая (2.19) с (2.10), имеем

$$\alpha^{ik} = e^{ilm} S^{(e)}{}_{lm}{}^{k}, \qquad S^{(e)}{}_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}\, e_{lij}\alpha^{lk} \tag{2.20}$$

Здесь $e^{ilm}\text{Э}_i\text{Э}_l\text{Э}_m$, $e_{ilm}\text{Э}^i\text{Э}^l\text{Э}^m$ — полностью антисимметричные единичные тензоры третьего ранга; e^{ilm} и e_{ilm} равны $(+1)$ при четной перестановке индексов и (-1) — при нечетной. Формулы, аналогичные (2.20), получены ранее [5].

Формулы, выражающие компоненты тензоров кручения через перемещения, записываются и декартовой системе координат в виде

$$S^{(e)}{}_{ij}{}^{k} = S^{(p)}{}_{ji}{}^{k} = \frac{1}{2}\, e_{lij}\, e^{lnm}\frac{D}{Dx^n}\frac{\partial u^k}{\partial x^m} \tag{2.21}$$

В заключение этого параграфа надо отметить, что континуально-дислокационную среду можно, с геометрической точки зрения, рассматривать как пространство аффинной связности, отличное от $L^{(e)}{}_3$ и $L^{(p)}{}_3$.

В самом деле, метрику пространства и кручение можно ввести по формулам

$$g^{(1,\ldots,q)\wedge}{}_{ij} = \text{Э}^{(1,\ldots,q)}{}_i\text{Э}^{(1,\ldots,q)}{}_j \tag{2.22}$$

$$\text{Э}^{(1,\ldots,q)}{}_i = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi^s}\right|_{\substack{\chi^m=\mathrm{const}\\ m=1,\ldots,q}} \frac{\partial \chi^s}{\partial \xi^i} \qquad (s=1,\ldots,(S-q)) \tag{2.23}$$

$$2S^{(1,\ldots,q)}{}_{ij}{}^{k} = \Gamma^{(1,\ldots,q)}{}_{ij}{}^{k} - \Gamma^{(1,\ldots,q)}{}_{ji}{}^{k} \tag{2.24}$$

Коэффициенты связности определены формулами

$$\frac{D\text{Э}^{(1,\ldots,q)}{}_i}{D\xi^j} = \Gamma^{(1,\ldots,q)\wedge}{}_{ij}{}^{k}\text{Э}^{(1,\ldots,q)}{}_k \tag{2.25}$$

Коэффициенты $\Gamma^{(1,\ldots,q)\wedge}{}_{ij}{}^{k}$ при переходе к другим координатам преобразуются по формулам преобразований символов Кристоффеля, а потому они — коэффициенты связности. Доказательство этого дословно такое же, как в [3].

Тензор кручения $S^{(1,\ldots,q)}{}_{ij}{}^{k}\text{Э}^i\text{Э}^j\text{Э}_k$ уже не связан с тензором плотности дислокаций формулами (2.20), так как тензор плотности дислокаций, по определению, характеризует полную несовместность, когда изменяются одновременно все параметры χ^s, а не только некоторые из них.

Легко видеть, что число пространств аффинной связности $L^{(1,\ldots,q)}{}_3$ включая $L^{(p)}{}_3$, равно

$$C_s^1 + C_s^2 + \ldots + C_s^s = 2^s \tag{2.26}$$

где $C_s{}^k$ — число сочетаний из s по k.

3. Уравнения равновесия. Почти дословно повторяя рассуждения И. А. Кунина [6], с помощью геометрических тождеств, связывающих тензоры $g^{(e)}{}_{ij}\text{Э}^i\text{Э}^j$, $S^{(e)}{}_{ij}{}^{k}\text{Э}^i\text{Э}^j\text{Э}_k$, $R^{(e)}{}_{ijk}{}^{l}\text{Э}^i\text{Э}^j\text{Э}^k\text{Э}_l$ можно получить полную систему статических уравнений континуальной теории дислокаций [2], [4], [6]

$$\mathrm{Rot}\, w^{(e)i}{}_j\text{Э}_i\text{Э}^j = \alpha^{ij}\text{Э}_i\text{Э}_j, \qquad \mathrm{Div}\, p^{(e)ij}\,\text{Э}_i\text{Э}_j = 0, \qquad p^{(e)ij} = \lambda^{(e)ijlm}\, w^{(e)}{}_{lm} \tag{3.1}$$

Здесь $w^{(e)i}{}_j$ — компоненты тензора упругой дисторсии

$$w^{(e)i}{}_j = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \tag{3.2}$$

Операции Rot и Div для тензора $a^{ij}Э_iЭ_j$, определены формулами

$$\mathrm{Rot}\, a^i{}_j Э_i Э^j = e^{ilm} \frac{Da^k{}_m}{Dx^l} Э_i Э_k$$

$$\mathrm{Div}\, a^{ij} Э_i Э_j = \frac{Da^{ij}}{Dx^i} Э_j \tag{3.3}$$

Известный тензор плотности дислокаций $\alpha^{ij}Э_iЭ_j$ должен быть подчинен условию

$$\mathrm{Div}\, \alpha^{ij} Э_i Э_j = 0 \tag{3.4}$$

Но, очевидно, аналогичные уравнения можно получить с помощью геометрических тождеств, связывающих тензоры

$$g^{(p)}{}_{ij}\, Э^i Э^j, \quad S^{(p)}{}_{ij}{}^k Э^i Э^j Э_k, \qquad R^{(p)}{}_{ijk}{}^l Э^i Э^j Э^k Э_l$$

$$\mathrm{Rot}\, w^{(p)i}{}_j Э_i Э^j = -\alpha^{ij} Э_i Э_j, \quad \mathrm{Div}\, p^{(p)ij}\, Э_i Э_j = 0, \quad p^{(p)ij} = \lambda^{(p)ijlm}\, w^{(p)}{}_{lm} \tag{3.5}$$

Здесь

$$w^{(p)i}{}_j = \frac{\partial u^i}{\partial \chi^s} \frac{\partial \chi^s}{\partial x^j} \tag{3.6}$$

компоненты тензора параметрической дисторсии.

Если обе системы уравнений сложить, складывая соответствующие уравнения, что сделать можно, поскольку уравнения линейные, то получим

$$\begin{gathered} \mathrm{Rot}\, w^i{}_j Э_i Э^j \equiv 0, \qquad w^i{}_j = w^{(e)i}{}_j + w^{(p)i}{}_j \\ \mathrm{Div}\, p^{ij} Э_i Э_j = 0, \qquad p^{ij} = p^{(e)ij} + p^{(p)ij} \\ p^{ij} = \lambda^{(e)ijlm}\, w^{(e)}{}_{lm} + \lambda^{(p)ijlm}\, w^{(p)}{}_{lm} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Первое уравнение (3.7) удовлетворяется тождественно; второе и третье уравнения (3.7) — это соответственно уравнения равновесия и состояния среды.

Если среда находится в равновесном статическом состоянии, то параметры среды должны одновременно удовлетворять всем трем системам уравнений, а отсюда следует что в среде с дислокациями необходимо существует не только тензор упругих напряжений $p^{(p)ij}Э_iЭ_j$, определяемый по (3.2), но и тензор параметрических напряжений $p^{(p)ij}Э_iЭ_j$, определяемый, по (3.5).

Система уравнений (3.7), не замкнута. Получению замкнутой системы динамических уравнений будет посвящена следующая работа.

В заключение автор благодарит Л. И. Седова и В. В. Лохина за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 29 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. Изд-во иностр. литер., М., 1963.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория упругости. Изд-во Наука, М., 1965.
3. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, М., 1962.
4. Косевич А. М. Динамическая теория дислокаций. УФН, т. 84, вып. 4, 1964.
5. Kondo K. Memoirs of unifying study of the basic problems in engineering by means of geometry, I, II. Tokyo, Cakujutsu Bunken Fukyn — Kai, 1955, 1958.
6. Кунин И. А. Теория дислокаций. Дополнение к монографии. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. Изд-во Наука, М., 1965.