взаимодействиями рост «амплитуды» колебаний может значительно превышать рост амплитуды внешней силы.

3. Влияние параметра R на диссипативные свойства системы весьма сложно, так как рассеиваемая при соударениях энергия существенно зависит не только от величины R, но и от характера соударений. Как видно из фиг. 5, уменьшение R может привести к резкому возрастанию вибраций.

4. Рассматриваемая модель неоднократно изучалась с точки зрения ударного виброгашения [1, 2, 3]. При этом исследовалось двухударное симметричное периодическое движение, в рамках которого гаситель оказывался весьма эффективным. Проведенное исследование показывает, что эффект от применения ударных виброгасителей может оказаться обратным, если в системе установится другое движение.

Поступила 21 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Grubin C. On the theory of the acceleration damper. Journal of Applied Mechanics, 1956, vol. 23, N 3.
2. Фейгин М. И. К теории нелинейных демпферов (ударный демпфер и демпфер сухого трения). Изв. вузов, Радиофизика, 1959, т. 2, № 4.
3. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями. М., Изд-во Наука, 1964.
4. Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний. Механика твердого тела, 1966, № 1.
5. Фейгин М. И. Некоторые вопросы теории нелинейных демпферов. В сб. Динамика машин, М. Машгиз, 1963.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МЕХАНИКИ

Л. Я. Айнола (Таллин)

Вариационным принципам механики посвящены многочисленные работы, из которых отметим лишь монографии [1-4].

Известные интегральные вариационные формулировки задач механики предполагают, что задано положение механической системы в конце рассматриваемого интервала времени. Однако, обычно это конечное положение системы неизвестно, а известны начальное положение и начальная скорость. Ниже приводятся вариационные формулировки этой задачи с заданными начальными условиями для линейных систем, уравнения которых имеют постоянные коэффициенты.

1. Первая форма вариационного принципа. Рассмотрим систему материальных точек, обладающую n степенями свободы; обозначим ее обобщенные координаты через $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Предположим, что кинетическая T и собственная потенциальная энергия U системы представлены определенно положительными квадратичными формами с постоянными коэффициентами соответственно от обобщенных скоростей и от обобщенных координат.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_k^{\boldsymbol{\cdot}}, \qquad U = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k \tag{1.1}$$

Система подвержена действию внешних сил $f_1, \ldots, f_n$. Связанная с ними потенциальная энергия суть

$$V = -\sum_{i=1}^{n} f_i q_i \tag{1.2}$$

Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i^{\boldsymbol{\cdot}} q_k^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k + \sum_{i=1}^{n} f_i q_i \tag{1.3}$$

Если известны положения системы в момент времени $t = 0$ и $t = \tau$, тогда по принципу Гамильтона между этими положениями система движется таким образом, чтобы

$$\delta \int_0^\tau L(q, q^{\cdot}, t)\, dt = 0 \qquad (1.4)$$

При заданных положениях системы в моменты времени $t = 0$ и $t = \tau$, из условия (1.4) вытекают уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} q_k^{\cdot\cdot} + c_{ik} q_k) = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.5)$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда заданы положение и скорость системы в начальный момент времени $t = 0$. Без потери общности можно принять

$$q_i(0) = 0, \qquad q_i^{\cdot}(0) = 0 \qquad (1.6)$$

Принимая во внимание вид функции Лагранжа (1.3), введем в рассмотрение функционал

$$A = \int_0^\tau K^*(q, q^*, q^{\cdot}, q^{\cdot *}, t)\, dt$$
$$K^* = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i^{\cdot} q_k^{\cdot *} - \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k^* + \sum_{i=1}^{n} f_i^* q_i + \sum_{i=1}^{n} f_i q_i^* \qquad (1.7)$$

При этом предположим, что функции q_i, q_i^* будут независимыми одна от другой функциональными аргументами и функции f_i^*, как и f_i,— заданные функции. Конкретный вид функций f_i^* определяется в дальнейшем.

Обратимся теперь к первой вариации функционала (1.7)

$$\delta A = \int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial K^*}{\partial q_i^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot *}} \right) \delta q_i^* + \left(\frac{\partial K^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot}} \right) \delta q_i \right\} dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot *}} \delta q_i^* + \frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot}} \delta q_i \right) \Bigg|_{t=0}^{t=\tau} \qquad (1.8)$$

Введем обозначение

$$L^* = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i^{\cdot *} q_k^{\cdot *} - \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n} c_{ik} q_i^* q_k^* + \sum_{i=1}^{n} f_i^* q_i^*$$

Тогда

$$\frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot *}} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}}, \qquad \frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot}} = \frac{\partial L^*}{\partial q_i^{\cdot *}}, \qquad \frac{\partial K^*}{\partial q_i^*} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial K^*}{\partial q_i} = \frac{\partial L^*}{\partial q_i^*} \qquad (1.9)$$

или

$$\frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot *}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^{\cdot} \qquad \frac{\partial K^*}{\partial q_i^{\cdot}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k^{\cdot *}$$

Воспользовавшись соотношениями (1.9), вариацию (1.8) можно представить в виде

$$\delta A = \int_0^\tau \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} \right) \delta q_i^* + \left(\frac{\partial L^*}{\partial q_i^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial q_i^{\cdot *}} \right) \delta q_i \right\} dt +$$
$$+ \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} \left[q_i^{\cdot}(\tau)\, \delta q_k^*(\tau) + q_i^{\cdot *}(\tau)\, \delta q_k(\tau) - q_i^{\cdot}(0)\, \delta q_k^*(0) - q_i^{\cdot *}(0)\, \delta q_k(0) \right] \qquad (1.10)$$

Из выражения (1.10) следует, что $\delta A = 0$, если функции q_i удовлетворяют уравнениям (1.5) и начальным условиям (1.6), а функции q_i^* удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial q_i^{\cdot *}} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i^*} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} q_k^{\cdot\cdot *} + c_{ik} q_k^*) = f_i^* \qquad (1.11)$$

и условиям

$$q_i^*(\tau) = 0, \qquad q_i^{\cdot *}(\tau) = 0 \qquad (1.12)$$

Преобразуем теперь вспомогательную задачу (1.11), (1.12) к виду рассматриваемой задачи (1.5), (1.6). Введем новую переменную

$$\eta = \tau - t \qquad (1.13)$$

и обозначим

$$r_i(\eta) = q_i^*(\tau - \eta), \qquad g_i(\eta) = f_i^*(\tau - \eta) \qquad (1.14)$$

$$\Lambda(r, r', \eta) = L^*[q^*(\tau - \eta), \quad q^{\cdot *}(\tau - \eta), \tau - \eta]$$

Заметим, что

$$r_i' = \frac{dr_i}{d\eta} = -q_i^{\cdot *}(\tau - \eta) \qquad (1.15)$$

По соотношению (1.9) имеем

$$\Lambda(r, r', \eta) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} r_i' r_k' - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} r_i r_k + \sum_{i=1}^{n} g_i r_i \qquad (1.16)$$

Уравнения (1.11) и условия (1.12) в новых обозначениях принимают вид

$$\frac{d}{\partial\eta}\frac{\partial\Lambda}{\partial r_i'} - \frac{\partial\Lambda}{\partial r_i} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} r_k'' + c_{ik} r_k) = g_i \qquad (1.17)$$

$$r_i(0) = 0, \qquad r_i'(0) = 0 \qquad (1.18)$$

Полученные уравнения (1.17) и условия (1.18) только по обозначениям переменных отличаются от уравнений (1.5) и условий (1.6). Если теперь обозначить

$$\eta = t, \quad r_i = q_i, \quad g_i = f_i \qquad (1.19)$$

тогда уравнения вспомогательной задачи (1.17) при начальных условиях (1.18) полностью совпадают с уравнениями рассматриваемой задачи (1.5) при начальных условиях (1.6).

Соотношения (1.14), (1.19) позволяют выразить q_i^*, f_i^* через функции q_i, f_i

$$q_i^*(\tau - t) = q_i(t), \qquad f_i^*(\tau - t) = f_i(t) \qquad (1.20)$$

Нетрудно поверить, что из соотношений (1.20) следует

$$q_i^*(t) = q_i(\tau - t), \qquad f_i^*(t) = f_i(\tau - t) \qquad (1.21)$$

Подставляя найденные функции q_i^*, f_i^* в функционал (1.7), получим следующий вариационный принцип механики.

При заданных начальных положении и скорости истинное движение системы в промежутке времени $(0, \tau)$ таково, что интеграл

$$A = \int_0^\tau K[q(t), q(\tau - t), q^{\cdot}(t), q^{\cdot}(\tau - t), t]dt \qquad (1.22)$$

имеет при этом стационарное значение.

Здесь функция K имеет вид

$$K = -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i^{\cdot}(t) q_k^{\cdot}(\tau - t) - \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i(t) q_k(\tau - t) + 2\sum_{i=1}^{n} f_i(t) q_i(\tau - t) \qquad (1.23)$$

2. Вторая форма вариационного принципа. Сформулируем вариационный принцип механики для случая, когда движение системы описывается при помощи обобщенных координат и импульсов.

Рассматриваемая задач определена уравнениями Гамильтона

$$q_i^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p_i^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.1}$$

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^{(-1)} p_i p_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i q_k - \sum_{i=1}^{n} f_i q_i \tag{2.2}$$

при начальных условиях

$$q_i(0) = 0, \qquad p_i(0) = 0 \tag{2.3}$$

Для данной задачи можно показать справедливость следующей формы вариационного принципа. При заданных начальных положениях и импульсах истинное движение системы в промежутке времени $(0, \tau)$ таково, что интеграл

$$J = \int_0^{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(\tau - t) q_i^{\cdot}(t) + G[q(t),\ q(\tau - t),\ p(t),\ p(\tau - t),\ t] \right\} dt \tag{2.4}$$

имеет при этом стационарное значение. Здесь функция G имеет вид (2.5)

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^{(-1)} p_i(t) p_k(\tau - t) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} q_i(t) q_k(\tau - t) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\tau - t) q_i(t)$$

Для доказательства принципа представим первую вариацию функционала (2.4)

$$\delta J = -\int_0^{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[p_i^{\cdot}(\tau - t) - \frac{\partial G}{\partial q_i} \right] \delta q_i(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \left[q_i^{\cdot}(\tau - t) - \frac{\partial G}{\partial p_i} \right] \delta p_i(t) \right\} dt - \sum_{i=1}^{n} p_i(\tau - t)\, \delta q_i(t) \Big|_{t=0}^{t=\tau} \tag{2.6}$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_0^{\tau} u(t)\, v(\tau - t)\, dt = \int_0^{\tau} u(\tau - t)\, v(t)\, dt \tag{2.7}$$

получим из соотношений (2.2), (2.5) (2.8)

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{\partial H[q(\tau - t),\ p(\tau - t),\ \tau - t]}{\partial q_i(\tau - t)}, \qquad \frac{\partial G}{\partial p_i} = -\frac{\partial H[q(\tau - t),\ p(\tau - t),\ \tau - t]}{\partial p_i(\tau - t)}$$

В силу соотношений (2.8) вариация (2.6) равняется нулю, если удовлетворены условия (2.3) и уравнения

$$q_i^{\cdot}(\tau - t) + \frac{\partial H[q(\tau - t),\ p(\tau - t),\ \tau - t]}{\partial p_i(\tau - t)} = 0$$

$$p_i^{\cdot}(\tau - t) - \frac{\partial H[q(\tau - t),\ p(\tau - t),\ \tau - t]}{\partial q_i(\tau - t)} = 0 \tag{2.9}$$

Так как эти уравнения только по обозначению независимой переменной отличаются от уравнений Гамильтона (2.1), то вариационный принцип доказан.

Поступила 3 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л а к Л. С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М., Физматгиз, 1960.
2. Вариационные принципы механики. Сб. статей под ред. Л. С. Полака. М., Физматгиз, 1959.
3. Л а н ц о ш К. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965.
4. Y o u r g r a u W., M a n d e l s t a m S. Variational principles in dynamics and quantum theory. London, 1960.