

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
2. Анчев А. О перманентных вращениях твердого тела с одной закрепленной точкой и их устойчивости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Кузьмин П. А. Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. конференции по прикладной теории устойчивости и аналитической механике. Казань, 1962.
4. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1. Изд-во АН СССР, 1954.
5. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных. Усп. матем. н., 1954, т. 9, № 2.
6. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера. Харьков, 1916.
7. Апыхтин Н. Г. Об устойчивости некоторых перманентных вращений твердого тела. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УДАРНЫМИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

М. И. Фейгин (Горький)

В работе исследуются вынужденные колебания двухмассовой динамической системы с ударными взаимодействиями. Простейшее периодическое движение рассматриваемой системы изучалось ранее в ряде работ [1-3]. Было установлено, что в довольно узкой области изменения параметров ударные взаимодействия приводят к значительному уменьшению вибраций. Однако подобным нелинейным системам свойственно многообразие различных видов вынужденных колебаний [4], могущих возникнуть в других областях значений параметров и не исключающих проявления существенно новых свойств системы. Поэтому представляет интерес исследование влияния изменения параметров на характер движения.

Данная задача решается в предлагаемой работе посредством моделирования на ЭВМ уравнений движения, сведенных к некоторым точечным отображениям четырехмерных поверхностей. Так как цифровая машина по своей природе, вообще говоря, хорошо приспособлена для выполнения точечных отображений независимо от характера нелинейностей, то использованный прием оказался значительно эффективней моделирования исследуемой системы на аналоговой машине [5].

В результате изучения поведения фазовых траекторий (сколь угодно сложной структуры на достаточно большом интервале времени) выделена область значений параметров, при которых в системе имеют место ярко выраженные резонансные явления. Следовательно, применение ударного виброгасителя может приводить в некоторых режимах к резкому увеличению вибраций системы.

§ 1. Уравнения движения системы. Принимаемая для исследования модель приведена на фиг. 1. Она состоит из упруго закрепленной массы M , на которую воздействует сила $F \cos \Omega t$. Движение второй массы m ограничено двумя преградами. Взаимодействие масс происходит лишь в моменты удара и в процессе их совместного (как единой массы) движения. При обычных для рассматриваемого типа задач предположениях, уравнения движения записываются следующим образом.

Независимое движение масс в промежутках времени между ударами

$$M\xi'' + k\xi = F \cos \Omega t, \quad m\eta'' = 0, \quad |\eta - \xi| < D \quad (1.1)$$

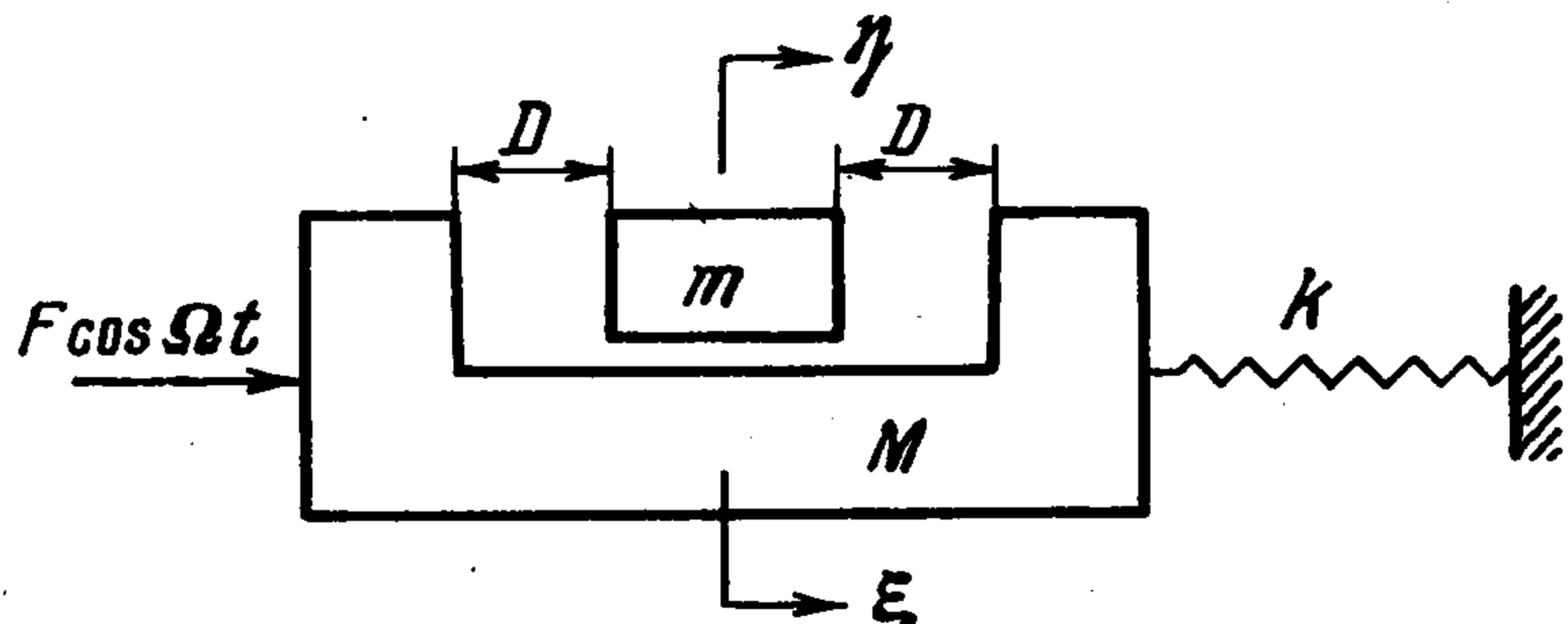
Соотношение доударных и послеударных скоростей масс

$$\begin{aligned} (M + m)\xi' &= (M - mR)\xi' + m(1 + R)\eta' \\ (M + m)\eta' &= M(1 + R)\xi' + (m - MR)\eta', \quad |\eta - \xi| = D \end{aligned} \quad (1.2)$$

Совместное движение масс после абсолютно неупругого удара или удара с нулевой относительной скоростью, если в момент удара выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} &(\xi'' - \eta'')(\xi - \eta) > 0 \\ &(M + m)\xi'' + k\xi = F \cos \Omega t \\ &\xi''(\xi - \eta) > 0, \quad |\eta - \xi| = D \quad (1.3) \end{aligned}$$

За начало отсчета $\xi = 0$ взято положение массы M , соответствующее недеформированному состоянию пружины k . Начало отсчета $\eta = 0$ соответствует такому положению массы m , когда при $\xi = 0$ зазоры между ней и ограничителями равны D . Предполагается, что коэффициент восстановления скорости при ударе R может изменяться от нуля до единицы.



Фиг. 1

Введение безразмерных переменных

$$x = \xi k / F, \quad y = (\eta - \xi) k / F, \quad \tau = t \sqrt{k / M} \quad (1.4)$$

позволяет записать уравнения (1.1)—(1.3) в более простом виде

$$x'' + x = \cos \omega \tau, \quad y'' + x'' = 0, \quad |y| < d \quad (1.5)$$

$$y' = -Ry', \quad x' = x' + \frac{\mu(1+R)}{1+\mu}y', \quad |y| = d \quad (1.6)$$

$$(1 + \mu)x'' + x = \cos \omega \tau, \quad x''y < 0, \quad |y| = d \quad (1.7)$$

Безразмерные параметры системы μ , d и ω выражаются через исходные параметры соотношениями:

$$\mu = m / M, \quad d = Dk / F, \quad \omega = \Omega \sqrt{M / k} \quad (1.8)$$

Движение исследуемой системы (1.5)—(1.7) происходит в пятимерном фазовом пространстве x, x', y, y', τ , структура которого зависит от четырех существенных параметров μ, d, ω, R .

§ 2. Классификация точечных отображений. Область движения изображающей точки ограничена в фазовом пространстве поверхностями ударного взаимодействия масс $y = +d$ и $y = -d$. Целесообразно поэтому [4] для изучения решений системы (1.5)—(1.7) исследовать точечные отображения именно этих поверхностей. Можно рассматривать любую фазовую траекторию состоящей из участков, определяемых уравнениями (1.5), (1.6) или (1.7). Происходящие при этом ударные взаимодействия, определяемые уравнениями (1.6), будем относить к концам участков траектории.

Уравнения (1.5), (1.6) определяют четыре возможных точечных отображения. Это два отображения T_{+-} и T_{-+} , исходная и преобразованная точки которых расположены соответственно на разных поверхностях $y = +d$ и $y = -d$, а также два отображения T_{++} и T_{--} , исходная и преобразованная точки которых расположены соответственно на одной поверхности.

Уравнение (1.7) определяет два возможных точечных отображения. Отображение S_{++} соответствует совместному движению масс на поверхности $y = +d$, а S_{--} — совместному движению масс на поверхности $y = -d$.

Введение перечисленных шести точечных отображений позволяет рассматривать любое движение исследуемой системы как результат последовательного их применения. При этом первый индекс каждого следующего преобразования должен совпадать со вторым индексом предыдущего преобразования. Так, например, после отображения T_{-+} применимы отображения T_{+-} , T_{++} и S_{++} ; после отображения S_{--} — отображения T_{-+} или T_{--} и т. п.

Обозначим через $M_0 \{x_0, x_0', y_0, y_0', \tau_0\}$ начальную, а через $M_1 \{x_1, x_1', y_1, y_1', \tau_1\}$ — конечную точку преобразования. Решая уравнения (1.5) и полагая, что в момент движения τ_1 происходит ударное взаимодействие (1.6), получаем следующие уравнения преобразования типа T в общем виде:

$$x_1 = (x_0' + \omega \alpha \sin \omega \tau_0) \sin (\tau_1 - \tau_0) + (x_0 - \alpha \cos \omega \tau_0) \cos (\tau_1 - \tau_0) + \alpha \cos \omega \tau_1$$

$$x_1' = \frac{1 - \mu R}{1 + \mu} [(x_0' + \omega \alpha \sin \omega \tau_0) \cos (\tau_1 - \tau_0) - (x_0 - \alpha \cos \omega \tau_0) \sin (\tau_1 - \tau_0) - \omega \alpha \sin \omega \tau_1] + \frac{\mu (1 + R)}{1 + \mu} (x_0' + y_0') \quad (2.1)$$

$$y_1 = y_0 + x_0 + (x_0' + y_0') (\tau_1 - \tau_0) - x_1$$

$$(1 - \mu R) y_1' = R (1 + \mu) (x_1' - x_0' - y_0')$$

где $\alpha = (1 - \omega^2)^{-1}$, а значение $\tau_1 > \tau_0$ и является наименьшим корнем уравнения

$$|y_1(\tau_1)| = d \quad (2.2)$$

Уравнения каждого из четырех точечных отображений типа T получаются из общих уравнений (2.1), (2.2) путем подстановки в них конкретных значений y_0 и y_1 согласно табличке, приведенной слева.

	T_{++}	T_{+-}	T_{-+}	T_{--}
y_0	d	d	$-d$	$-d$
y_1	d	$-d$	d	$-d$

Отметим, что уравнения отображений T_{+-} и T_{-+} позволяют определить движение системы и в случае, когда точка M_0 расположена между поверхностями ударного взаимодействия, т. е. $|y_0| < d$.

Уравнения преобразований типа S получаем путем решения уравнения (1.7) в следующем виде:

$$x_1 = \gamma^{-1} (x_0' + \omega \beta \sin \omega \tau_0) \sin \gamma (\tau_1 - \tau_0) + (x_0 - \beta \cos \omega \tau_0) \cos \gamma (\tau_1 - \tau_0) + \beta \cos \omega \tau_1$$

$$x_1' = (x_0' + \omega \beta \sin \omega \tau_0) \cos \gamma (\tau_1 - \tau_0) - \gamma (x_0 - \beta \cos \omega \tau_0) \sin \gamma (\tau_1 - \tau_0) - \beta \omega \sin \omega \tau_1 \quad (2.3)$$

$$y_1 = \begin{cases} +d & \text{для } S_{++}, \\ -d & \text{для } S_{--}, \end{cases} \quad \beta = \frac{1}{1 - (1 + \mu) \omega^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} \quad (2.4)$$

Значение $\tau_1 > \tau_0$ и является наименьшим корнем уравнения $x_1'' = 0$ или

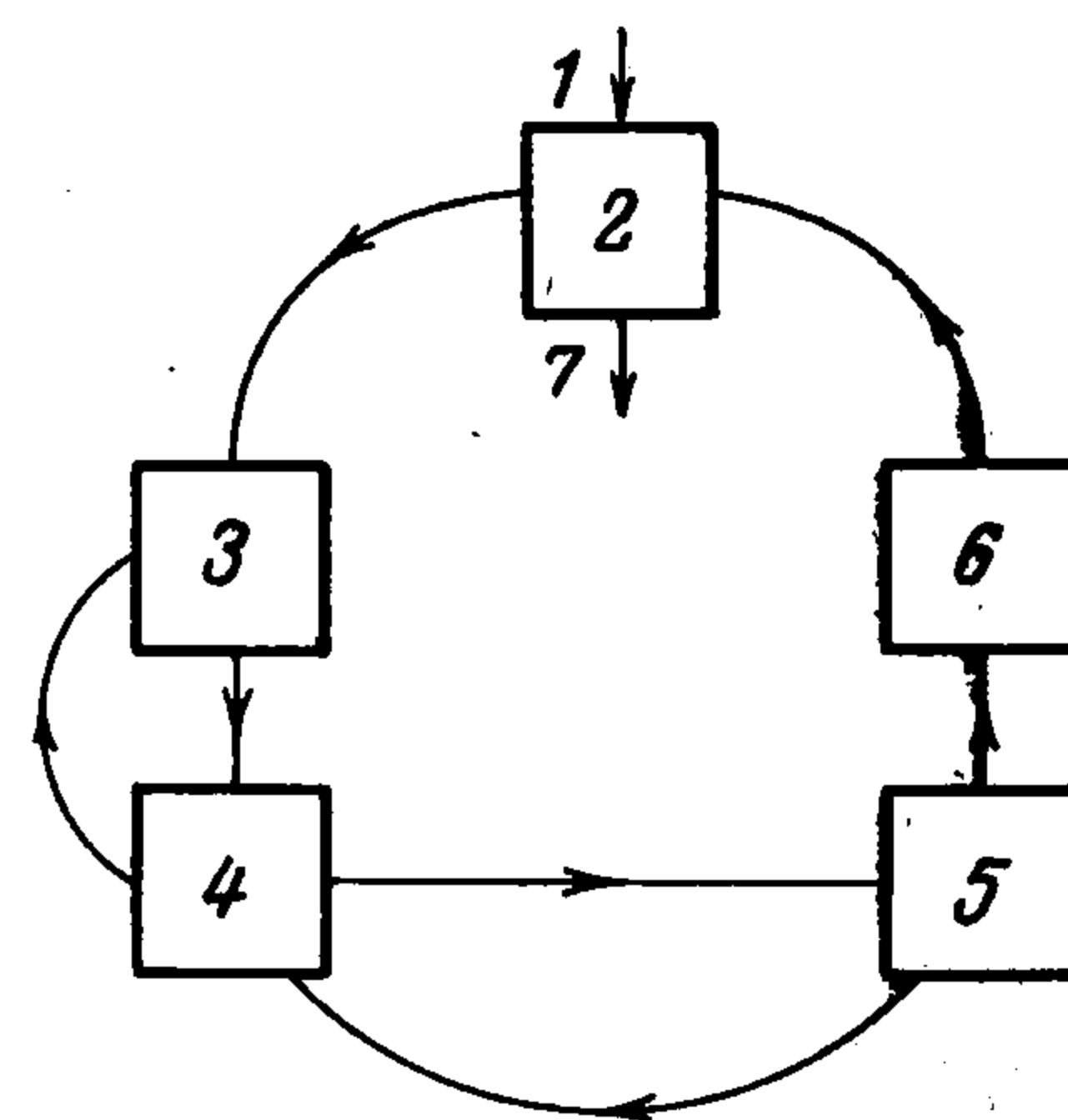
$$-x_1 + \cos \omega \tau_1 = 0 \quad (2.5)$$

Начальная точка преобразований S_{++} и S_{--} расположена соответственно на [поверхностях $y = +d$ и $y = -d$, а сами преобразования имеют место после абсолютно неупругого удара ($R = 0$) или удара с нулевой относительной скоростью при выполнении неравенства

$$y_0 y_0'' > 0 \quad (2.6)$$

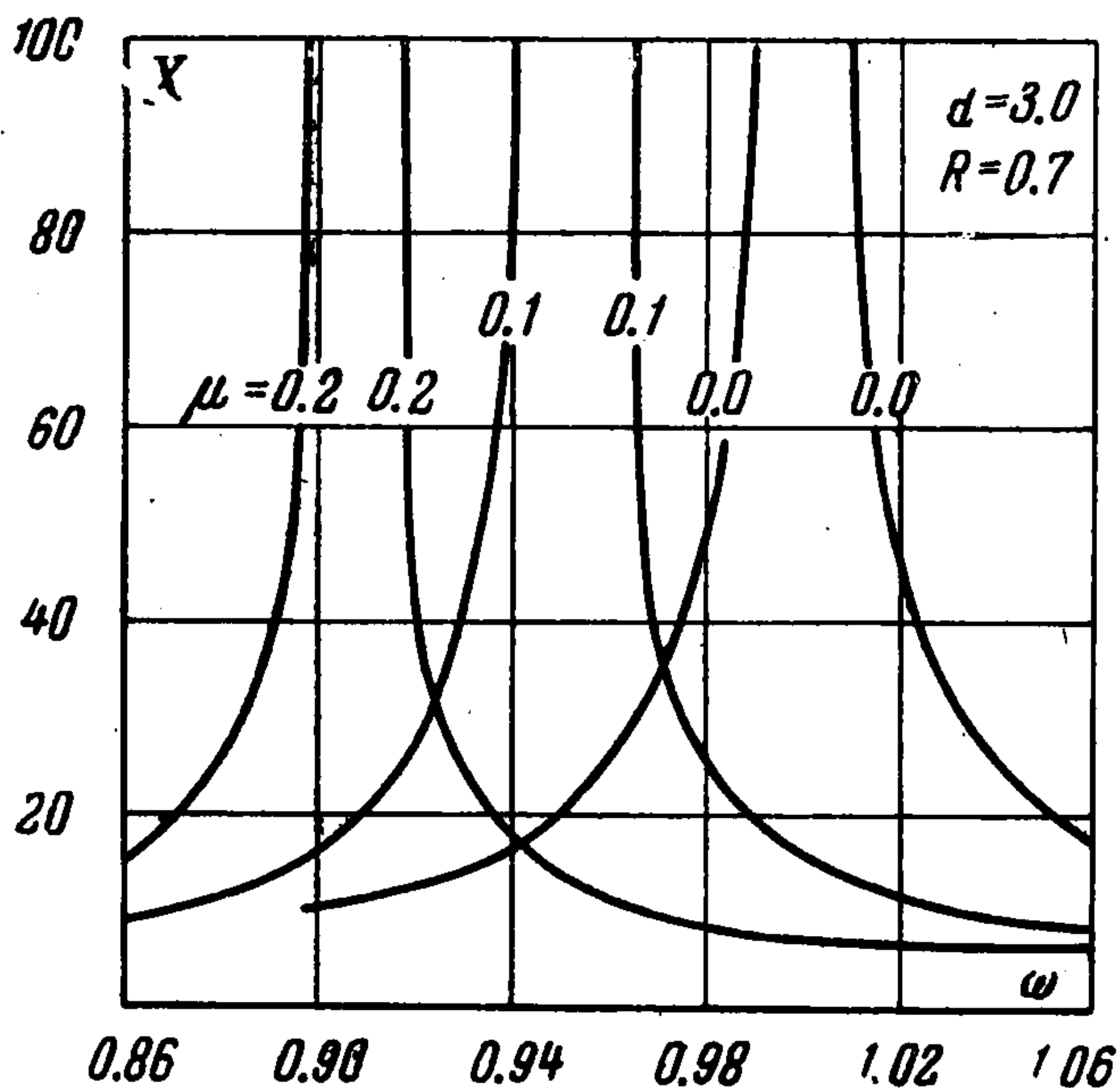
Если указанные условия не выполняются, изображающая точка покидает поверхность ударного взаимодействия и имеет место преобразование типа T .

§ 3. Результаты решения задачи. Уравнения точечных отображений (2.1)–(2.3) и (2.5) полностью определяют движение системы, если заданы значения параметров и начальное положение изображающей точки в фазовом пространстве.

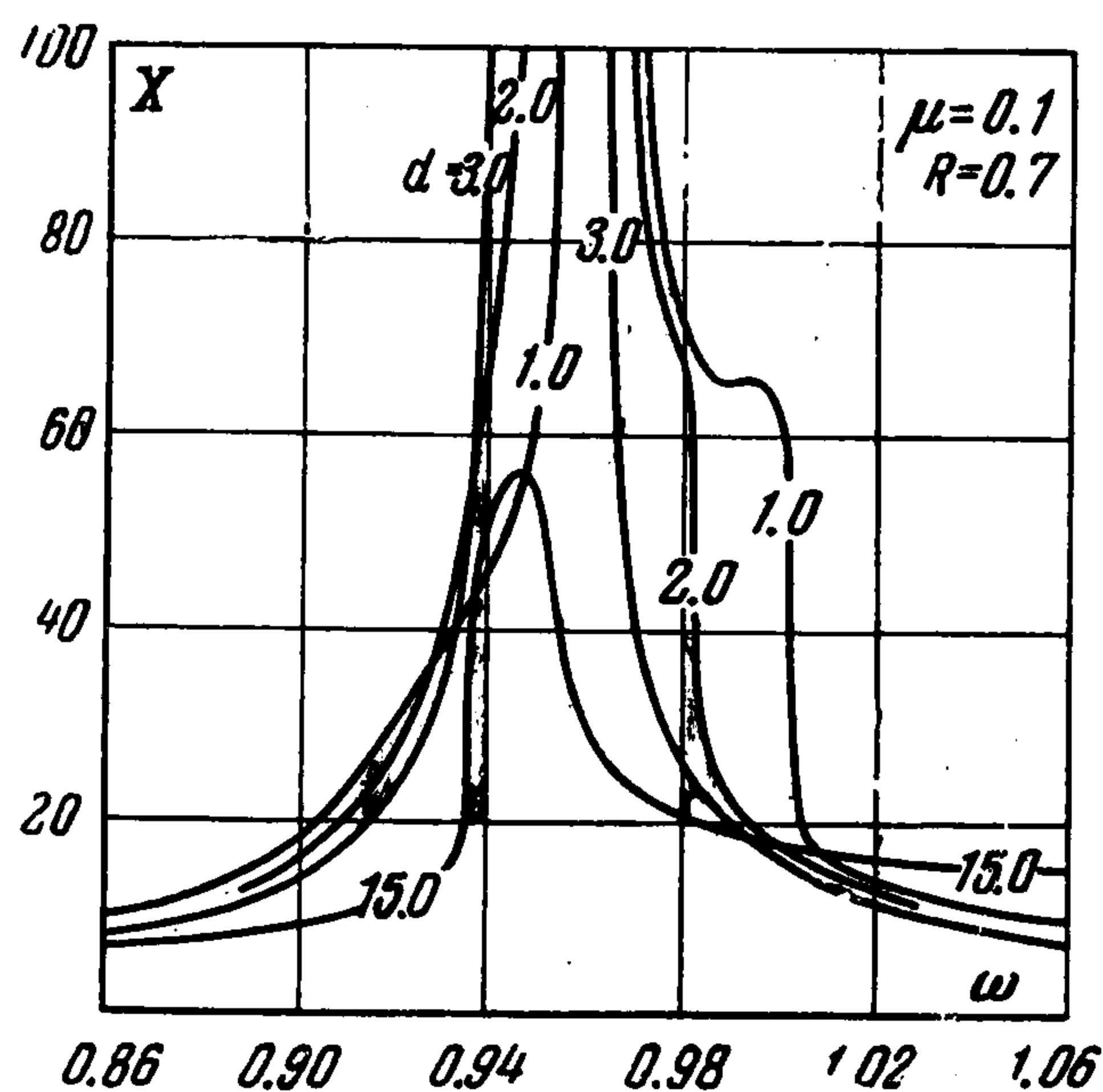


Фиг. 2

Изучение резонансных свойств рассматриваемой системы проводилось на цифровой машине «Раздан-2» Горьковского института инженеров водного транспорта; принятая схема решения представлена на фиг. 2, где 1 — вход; 2 — задание начальных условий и параметров; 3 — определение типа очередного точечного отображения; 4 — расчет участка фазовой траектории; 5 — анализ решения; 6 — печать ре-



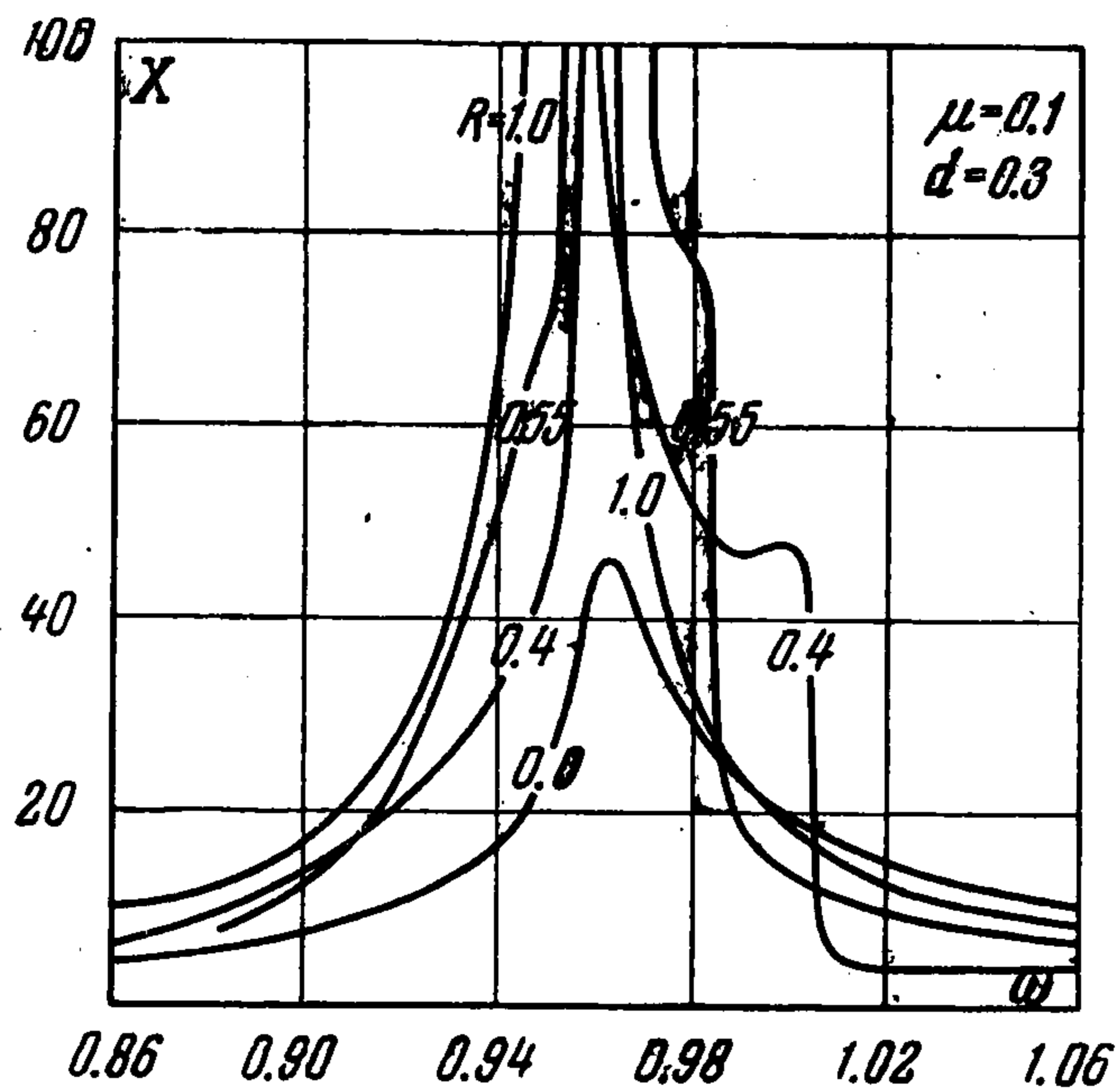
Фиг. 3



Фиг. 4

зультатов; 7 —останов. Исходное положение изображающей точки всегда задавалось в начале координат. В процессе решения запоминались и анализировались максимальные и минимальные отклонения $X^i = |x(\tau_i)|_{\max}$. Резонансные свойства системы при каждом значении параметров характеризовались величиной $X = X^i_{\max}$. Выработка последовательности значений X^j прекращалась при выполнении одного из трех условий: а) ни одно из N последних значений X^j не оказалось больше выделенного ранее X^i_{\max} . б) Значение X превысило некоторую заданную величину X^* ; в) Время решения τ превысило некоторое заданное значение τ^* .

При решении принималось $N = 20$, $X^* = 100$ и $\tau^* = 100 (2\pi / \omega)$. Естественно, что выделенная при указанных условиях область значений параметров, при которых происходят опасные колебания, может оказаться несколько уменьшенной. Резонансные кривые системы в виде семейств зависимостей $X(\omega)$ представлены на фиг. 3—5. Отметим особенности вынужденных колебаний рассматриваемой динамической системы.



Фиг. 5

1. Если фиксировать параметры μ, d, R и изменять лишь частоту внешней силы, то поведение изучаемой системы аналогично поведению системы с одной степенью свободы. Увеличение относительной массы ударника μ смещает резонансную область в сторону более низких частот (фиг. 3).

2. Нелинейность системы особенно проявляется при изменении относительного зазора d и коэффициента восстановления скорости при ударе R . Имеющая место в линейных системах пропорциональная зависимость амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды внешней силы заложена в рассматриваемой задаче в соотношении (1.4) $\xi = x(F/k)$ между размерной и безразмерной координатами. Наличие дополнительной зависимости X от $d = D(k/F)$ (фиг. 4) показывает, что в системе с ударными

взаимодействиями рост «амплитуды» колебаний может значительно превышать рост амплитуды внешней силы.

3. Влияние параметра R на диссипативные свойства системы весьма сложно, так как рассеиваемая при соударениях энергия существенно зависит не только от величины R , но и от характера соударений. Как видно из фиг. 5, уменьшение R может привести к резкому возрастанию вибраций.

4. Рассматриваемая модель неоднократно изучалась с точки зрения ударного виброгашения [1, 2, 3]. При этом исследовалось двухударное симметричное периодическое движение, в рамках которого гаситель оказывался весьма эффективным. Проведенное исследование показывает, что эффект от применения ударных виброгасителей может оказаться обратным, если в системе установится другое движение.

Поступила 21 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Grubin C. On the theory of the acceleration damper. Journal of Applied Mechanics, 1956, vol. 23, N 3.
2. Фейгин М. И. К теории нелинейных демпферов (ударный демпфер и демпфер сухого трения). Изв. вузов, Радиофизика, 1959, т. 2, № 4.
3. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями. М., Изд-во Наука, 1964.
4. Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний. Механика твердого тела, 1966, № 1.
5. Фейгин М. И. Некоторые вопросы теории нелинейных демпферов. В сб. Динамика машин, М. Машгиз, 1963.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МЕХАНИКИ

Л. Я. Айнало (Таллин)

Вариационным принципам механики посвящены многочисленные работы, из которых отметим лишь монографии [1-4].

Известные интегральные вариационные формулировки задач механики предполагают, что задано положение механической системы в конце рассматриваемого интервала времени. Однако, обычно это конечное положение системы неизвестно, а известны начальное положение и начальная скорость. Ниже приводятся вариационные формулировки этой задачи с заданными начальными условиями для линейных систем, уравнения которых имеют постоянные коэффициенты.

1. Первая форма вариационного принципа. Рассмотрим систему материальных точек, обладающую n степенями свободы; обозначим ее обобщенные координаты через q_1, q_2, \dots, q_n . Предположим, что кинетическая T и собственная потенциальная энергия U системы представлены определенно положительными квадратичными формами с постоянными коэффициентами соответственно от обобщенных скоростей и от обобщенных координат.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n c_{ik} q_i q_k \quad (1.1)$$

Система подвержена действию внешних сил f_1, \dots, f_n . Связанная с ними потенциальная энергия суть

$$V = - \sum_{i=1}^n f_i q_i \quad (1.2)$$

Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n c_{ik} q_i q_k + \sum_{i=1}^n f_i q_i \quad (1.3)$$