К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

В. Д. Иртегов (Казань)

Пусть твердое тело с одной закрепленной точкой находится в потенциальном силовом поле, определяемом функцией $U = U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, которую для простоты будем предполагать голоморфной во всей нужной в дальнейшем области значений переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Тогда уравнения движения тела

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + \gamma_3\frac{\partial U}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + \gamma_1\frac{\partial U}{\partial\gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + \gamma_2\frac{\partial U}{\partial\gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial U}{\partial\gamma_2}, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \tag{1}$$

допускают следующие первые интегралы

$$2H = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \text{const}$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}, \qquad V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{2}$$

Здесь A, B, C — моменты инерции тела относительно главных осей, с ним связанных и имеющих начало в неподвижной точке; p, q, r — проекции угловой скорости тела на выше названные оси; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — косинусы углов между главными осями тела и неподвижной в пространстве осью — «вертикалью».

Для исследования устойчивости стационарных движений тела воспользуемся, как и в работе [3], теоремой Рауса — Ляпунова [4].

Составим из интегралов (2) функцию Лагранжа

$$K = H - \lambda_1 V_1 - {}^1/_2\, \lambda_2 V_2 \tag{3}$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные множители, и запишем необходимые условия экстремума K по переменным $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial r} = \frac{\partial K}{\partial\gamma_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Эти условия, после очевидных преобразований, принимают в рассматриваемом случае вид

$$p = \lambda_1\gamma_1, \qquad q = \lambda_1\gamma_2, \qquad r = \lambda_1\gamma_3 \tag{4}$$

$$(\lambda_1^2 A + \lambda_2)\gamma_1 + \partial U / \partial\gamma_1 = 0, \quad (\lambda_1^2 B + \lambda_2)\gamma_2 + \partial U / \partial\gamma_2 = 0,$$

$$(\lambda_1^2 C + \lambda_2)\gamma_3 + \partial U / \partial\gamma_3 = 0 \tag{5}$$

Из уравнений (4) следует, что перманентной осью может служить только неподвижная в пространстве вертикаль, причем $\lambda_1 = \omega$ — угловой скорости вращения тела вокруг этой оси.

Уравнения (5) для каждого значения параметра λ_2 при учете соотношения $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ определяют, вообще говоря, $\lambda_1 = \omega$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, характеризующие положение перманентной оси в теле.

Исключая из уравнений (5) λ_1 и λ_2, получим поверхность, аналогичную конусу Штауде [2]

$$\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}(B-C)\gamma_2\gamma_3 + \frac{\partial U}{\partial\gamma_2}(C-A)\gamma_3\gamma_1 + \frac{\partial U}{\partial\gamma_3}(A-B)\gamma_1\gamma_2 = 0 \tag{6}$$

которая вместе с условием $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, будет определять все многообразие перманентных осей в теле.

Для исследования устойчивости полученных движений рассмотрим условие знакоопределенности второй вариации K на линеаризованном многообразии, определяемом интегралами V_1 и V_2.

В возмущенном движении примем $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ за отклонения $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ от их невозмущенных значений, соответственно. Тогда

$$2\delta^2 K = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 - 2\omega (A\xi_1\eta_1 + B\xi_2\eta_2 + C\xi_3\eta_3) - \lambda_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) - \\ - u_{11}\eta_1^2 - u_{22}\eta_2^2 - u_{33}\eta_3^2 - 2u_{12}\eta_1\eta_2 - 2u_{13}\eta_1\eta_3 - 2u_{23}\eta_2\eta_3 \qquad (7)$$

$$\delta V_1 = Ap\eta_1 + Bq\eta_2 + Cr\eta_3 + A\gamma_1\xi_1 + B\gamma_2\xi_2 + C\gamma_3\xi_3 + \ldots = 0 \qquad (8)$$

$$\delta V_2 = \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \gamma_3\eta_3 + \ldots = 0$$

Здесь и далее будем обозначать

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma_i} = u_i, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = u_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Следуя работе [3], введем новые переменные $x_i = \xi_i - \omega\eta_i$ вместо ξ_i $(i = 1, 2, 3)$. После подстановки и очевидных сокращений получим из (7) и (8)

$$2\delta^2 K = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - (A\omega^2 + \lambda_2 + u_{11})\eta_1^2 - (B\omega^2 + \lambda_2 + u_{22})\eta_2^2 - \\ - (C\omega^2 + \lambda_2 + u_{33})\eta_3^2 - 2u_{12}\eta_1\eta_2 - 2u_{13}\eta_1\eta_3 - 2u_{23}\eta_2\eta_3 \qquad (9)$$

$$\delta V_1 = A\gamma_1 x_1 + B\gamma_2 + x_2 + C\gamma_3 x_3 + 2Ap\eta_1 + 2Bq\eta_2 + 2Cr\eta_3 + \ldots = 0$$

$$\delta V_2 = \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \gamma_3\eta_3 + \ldots = 0 \qquad (10)$$

Условиями знакоопределенности квадратичной формы (9) на линейном многообразии (10) согласно известному обобщению критерия Сильвестра [5,3], будут: положительность определителя

$$\begin{vmatrix} -A^* & -u_{12} & -u_{13} & 0 & 0 & 0 & 2Ap & \gamma_1 \\ -u_{12} & -B^* & -u_{23} & 0 & 0 & 0 & 2Bq & \gamma_2 \\ -u_{13} & -u_{23} & -C^* & 0 & 0 & 0 & 2Cr & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & A\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & B\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & C\gamma_3 & 0 \\ 2Ap & 2Bq & 2Cr & A\gamma_1 & B\gamma_2 & C\gamma_3 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и еще трех определителей, получаемых из вышенаписанного вычеркиванием шестого столбца и строки, пятого и шестого столбца и строк, и наконец, четвертого, пятого и шестого столбца и строк. Здесь для сокращения приняты обозначения

$$A^* = A\omega^2 + \lambda_2 + u_{11}, \qquad B^* = B\omega^2 + \lambda_2 + u_{22}, \qquad C^* = C\omega^2 + \lambda_2 + u_{33} \qquad (11)$$

Эти условия, как нетрудно проверить, имеют вид

$$4\omega^2 T_1 > 0, \qquad A(4\omega^2 T_1 - A\gamma_1^2 S_1) > 0$$

$$AB(4\omega^2 T_1 - (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2) S_1) > 0$$

$$ABC(4\omega^2 T_1 - JS_1) > 0 \qquad (J = A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) \qquad (12)$$

Здесь J — момент инерции тела относительно перманентной оси

$$T_1 = -[A^*(B-C)^2\gamma_3^2\gamma_2^2 + B^*(C-A)^2\gamma_1^2\gamma_3^2 + C^*(A-B)^2\gamma_2^2\gamma_1^2] - \\ - 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 [(A-C)(B-A)u_{23}\gamma_1 + (B-A)(C-B)u_{13}\gamma_2 + (C-B)(A-C)u_{12}\gamma_3]$$

$$S_1 = [(u_{23}^2 - B^*C^*)\gamma_1^2 + (u_{13}^2 - C^*A^*)\gamma_2^2 + (u_{12}^2 - A^*B^*)\gamma_3^2] - \qquad (13)$$

$$- 2\gamma_2\gamma_3(u_{12}u_{13} - u_{23}A^*) - 2\gamma_3\gamma_1(u_{23}u_{12} - u_{13}B^*) - 2\gamma_1\gamma_2(u_{13}u_{23} - u_{12}C^*)] \qquad (14)$$

Очевидно второе и третье условие (12) всегда выполняются, если выполнено первое и последнее. Таким образом, условиями положительной определенности второй вариации K на линеаризованном многообразии, определяемом интегралами V_1 и V_2, будут

$$T_1 > 0, \qquad 4\omega^2 T_1 - JS_1 > 0 \qquad (15)$$

Согласно теореме Рауса — Ляпунова [4] эти условия и будут достаточными условиями устойчивости наших движений по переменным $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Последнее условие (15) является, если исключить границу $a_2 = 0$, также и необходимым, так как характеристическое уравнение для уравнений в вариациях в этом случае имеет вид

$$\varkappa^2 (\varkappa^4 a_0 + \varkappa^2 a_1 + a_2) = 0 \qquad (a_0 = ABC)$$

$$\begin{aligned} a_1 = {} & [A (A - B - C)^2\gamma_1^2 + B (B - C - A)^2\gamma_2^2 + C (C - A - B)^2\gamma_3^2]\,\omega^2 - \\ & - [AA^* (B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) + BB^* (A\gamma_1^2 + C\gamma_3^2) + CC^* (B\gamma_2^2 + A\gamma_1^2)] + \\ & + 2ABu_{12}\gamma_1\gamma_2 + 2BCu_{32}\gamma_3\gamma_2 + 2CAu_{13}\gamma_1\gamma_3 \end{aligned}$$

$$a_2 = 4\omega^2 T_1 - IS_1$$

Если силовая функция задана в форме

$$u = x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3 + \mu (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

то условия (15) совпадают с условиями, полученными П. А. Кузьминым [3] для устойчивости перманентных вращений в центральном поле сил тяготения.

Для силовой функции, которую можно представить в виде

$$u = f_1 (\gamma_1) + f_2 (\gamma_2) + f_3 (\gamma_3)$$

достаточные условия устойчивости получатся из (15) после подстановки туда $u_{ij} = 0$, $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, 3)$ и будут мягче условий А. Анчева, полученных для указанного вида функции u в работе [2]. Для силового поля с функцией Д. Н. Горячева [6,7]

$$U (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \frac{a}{n - 1}\, \gamma_3^{1-n} + \frac{1}{2}\, b (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) - c_1\gamma_1 - c_2\gamma_2$$

направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ перманентных осей будут определяться согласно (5) из уравнений

$$(A\omega^2 + \lambda_2)\,\gamma_1 - b\gamma_1 - c_1 = 0, \qquad (B\omega^2 + \lambda_2)\,\gamma_2 + b\gamma_2 - c_2 = 0 \tag{16}$$

$$(C\omega^2 + \lambda_2)\,\gamma_3 - a\gamma_3^{-n} = 0$$

Здесь

$$u_1 = - b\gamma_1 - c_1, u_2 = b\gamma_2 - c_2, \quad u_3 = - a\gamma_3^{-n}, \quad u_{11} = - b, \quad u_{22} = b, \quad u_{33} = an\gamma_3^{-n-1}$$

поэтому выражения для T_1 и S_1 после исключения из них параметра λ_2 при помощи соотношений (16) будут иметь вид

$$T_1 = - \left[(B - A)^2\, \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_3^{n+1}}\, a (n + 1) + (C - A)^2\, \frac{c_2\gamma_1^2\gamma_3^2}{\gamma_2} + (C - B)^2\, \frac{c_1\gamma_2^2\gamma_3^2}{\gamma_1}\right]$$

$$S_1 = - \left[\frac{a (n + 1)}{\gamma_3^{n+1}}\frac{c_2\gamma_1^2}{\gamma^2} + \frac{c_1\gamma_2^2}{\gamma_1} + \frac{c_1c_2\gamma_3^2}{\gamma_1\gamma_2}\right]$$

Следовательно, достаточные условия устойчивости перманентных вращений, определенных соотношениями (16), могут быть записаны так

$$(B - A)^2\, a\, (n + 1)\, \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^{-(n+1)} + (C - A)^2c_2\gamma_1^2\gamma_2^{-1}\gamma_3^2 + (C - B)^2c_1\gamma_1^{-1}\gamma_2^2\gamma_3^2 < 0$$

$$\begin{aligned} & 4\omega^2\, [(B - A)^2\, a\, (n + 1)\, \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^{-(n+1)} + (C - A)^2c_2\gamma_1^2\gamma_2^{-1}\gamma_3^2 + (C - B)^2c_1\gamma_1^{-1}\gamma_2^2\gamma_3^2] + \\ & + I\, [a\, (n + 1)\, \gamma_3^{-(n+1)}(c_1\gamma_2^2\gamma_1^{-1} + c_2\gamma_1^2\gamma_2^{-1}) + c_1c_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3^2] < 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Для случая $A = B = 2C$, рассмотренного в работе [7], последние условия несколько упростятся

$$c_1\gamma_1^{-3} + c_2\gamma_2^{-3} < 0$$

$$\begin{aligned} & A\omega^2\gamma_3^2(c_1\gamma_2^2\gamma_1^{-1} + c_2\gamma_1^2\gamma_2^{-1}) - (1 - {}^1\!/_2\, \gamma_3^2))\, [a\, (n + 1)\gamma_3^{-(n+1)}(c_1\gamma_2^2\gamma_1^{-1} + \\ & + c_2\gamma_1^2\gamma_2^{-1}) + c_1c_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3^2] < 0 \end{aligned}$$

и будут мягче условий, полученных Апыхтиным Н. Г. в этой работе.

Поступила 26 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячев Д. Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
2. Анчев А. О перманентных вращениях твердого тела с одной закрепленной точкой и их устойчивости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Кузьмин П. А. Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. конференции по прикладной теории устойчивости и аналитической механике. Казань, 1962.
4. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1. Изд-во АН СССР, 1954.
5. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных. Усп. матем. н., 1954, т. 9, № 2.
6. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера. Харьков, 1916.
7. Апыхтин Н. Г. Об устойчивости некоторых перманентных вращений твердого тела. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

М. И. Фейгин (Горький)

В работе исследуются вынужденные колебания двухмассовой динамической системы с ударными взаимодействиями. Простейшее периодическое движение рассматриваемой системы изучалось ранее в ряде работ [1-3]. Было установлено, что в довольно узкой области изменения параметров ударные взаимодействия приводят к значительному уменьшению вибраций. Однако подобным нелинейным системам свойственно многообразие различных видов вынужденных колебаний [4], могущих возникнуть в других областях значений параметров и не исключающих проявления существенно новых свойств системы. Поэтому представляет интерес исследование влияния изменения параметров на характер движения.

Данная задача решается в предлагаемой работе посредством моделирования на ЭВМ уравнений движения, сведенных к некоторым точечным отображениям четырехмерных поверхностей. Так как цифровая машина по самой своей природе, вообще говоря, хорошо приспособлена для выполнения точечных отображений независимо от характера нелинейностей, то использованный прием оказался значительно эффективней моделирования исследуемой системы на аналоговой машине [5].

В результате изучения поведения фазовых траекторий (сколь угодно сложной структуры на достаточно большом интервале времени) выделена область значений параметров, при которых в системе имеют место ярко выраженные резонансные явления. Следовательно, применение ударного виброгасителя может приводить в некоторых режимах к резкому увеличению вибраций системы.

§ 1. Уравнения движения системы. Принимаемая для исследования модель приведена на фиг. 1. Она состоит из упруго закрепленной массы M, на которую воздействует сила $F\cos\Omega t$. Движение второй массы m ограничено двумя преградами. Взаимодействие масс происходит лишь в моменты удара и в процессе их совместного (как единой массы) движения. При обычных для рассматриваемого типа задач предположениях, уравнения движения записываются следующим образом.

Независимое движение масс в промежутках времени между ударами

$$M\xi^{\cdot\cdot} + k\xi = F\cos\Omega t, \qquad m\eta^{\cdot\cdot} = 0, \qquad |\eta - \xi| < D \tag{1.1}$$

Соотношение доударных и послеударных скоростей масс

$$(M + m)\,\xi^{\cdot\prime} = (M - mR)\,\xi^{\cdot} + m(1 + R)\,\eta^{\cdot} \tag{1.2}$$

$$(M + m)\,\eta^{\cdot\prime} = M(1 + R)\,\xi^{\cdot} + (m - MR)\,\eta^{\cdot}, \quad |\eta - \xi| = D$$