ОБ УПРАВЛЕНИИ ОБЪЕКТОМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Н. Н. Красовский (Свердловск)

Рассмотрим задачу об успокоении линейной системы с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Gx(t-\tau) + bu \tag{1}$$

которую требуется управлением $u = u(t)$ перевести из заданного начального состояния $x(t) = x^\circ(t)$ $(-\tau \leqslant t \leqslant 0)$ в состояние равновесия $x(t) \equiv 0$ $(T-\tau \leqslant t \leqslant T)$. Ограничимся простейшим случаем, когда x — двумерный вектор, u — скаляр, A и G — постоянные матрицы, b — постоянный вектор, кроме того, примем $T = 3\tau$ $(\tau = \mathrm{const})$. В этом случае задача решается элементарно. Наиболее содержательна ситуация, когда матрица G — неособая и вектор b не является ее собственным вектором, т. е. выполнено условие общего положения [1]. Разберем этот случай.

Пусть вектор c разрешает уравнение $Gc = b$. По условию векторы c и b не коллинеарны. Поэтому их можно считать базисными векторами на плоскости $\{x_1, x_2\}$, причем $c = \{1, 0\}$, $b = \{0, 1\}$. В таких координатах матрица G имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} \\ 1 & g_{22} \end{pmatrix}, \qquad g_{12} \neq 0$$

Чтобы функция $u(t)$ разрешала задачу, необходимо и достаточно, чтобы

$$bu(t) + Gx(t-\tau) = 0 \qquad (T-\tau \leqslant t \leqslant T) \tag{2}$$

т. е.

$$x_2(t) = 0 \qquad (T-2\tau \leqslant t \leqslant T-\tau) \tag{3}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21}x_1(t) + x_1(t-\tau) + g_{22}x_2(t-\tau) + u(t) = 0 \quad (T-2\tau \leqslant t \leqslant T-\tau) \tag{4}$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}x_1(t) + g_{12}x_2(t-\tau), \qquad x_1(T-\tau) = 0 \qquad (T-2\tau \leqslant t \leqslant T-\tau) \tag{5}$$

Условие (4) и условие (2), которое при выполнении условия (3) означает, что $u(t) = -x_1(t-\tau)$ $(T-\tau \leqslant t \leqslant T)$, вполне определяют $u(t)$ при $t \geqslant \tau$. Для определения $u(t)$ при $0 \leqslant t < \tau$ из условий (3) и (5) имеем два уравнения

$$\int_0^\tau x_{22}(\tau, \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta = \gamma_1$$

$$e^{a_{11}\tau} \int_0^\tau x_{12}(\tau, \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta + \int_0^\tau g_{12} e^{a_{11}(\tau-\zeta)} \left[\int_0^\zeta x_{22}(\zeta, \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta \right] d\zeta = \gamma_2 \tag{6}$$

Здесь $x_{ij}(t, t_0)$ — элементы фундаментальной матрицы $X[t, t_0]$ системы $dx/dt = Ax$, а числа γ_1 и γ_2 определяются известным образом по начальной функции $x^\circ(t)$.

После преобразования второго уравнения (6) получим систему

$$\int_0^\tau h_i(\vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta = \gamma_i \qquad (i = 1, 2) \tag{7}$$

$$h_1(\vartheta) = x_{22}(\tau, \vartheta), \qquad h_2(\vartheta) = g_{12} \int_\vartheta^\tau e^{a_{11}(\tau-\zeta)} x_{22}(\zeta, \vartheta)\, d\zeta + e^{a_{11}\tau} x_{12}(\tau, \vartheta)$$

Для того чтобы уравнения (7) имели решение $u(\vartheta)$ при любых γ_1 и γ_2, достаточно и необходимо, чтобы функции $h_1(\vartheta)$ и $h_2(\vartheta)$ были линейно независимыми [2]. Последнее условие во всяком случае выполняется, если для A и b выполнено условие общего положения [1], т. е. если вектор b не является собственным вектором матрицы A. Само определение $u(t)$ из (7) производится известным образом (см., например, [2]).

Поступила 27 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.