Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р. З. Хасьминский

(Москва)

Устойчивость систем при случайных возмущениях параметров исследовалась в ряде работ. Наибольшие успехи достигнуты в изучении устойчивости по отношению к возмущениям типа «белого шума», так как при этом предположении удается воспользоваться аппаратом теории марковских процессов (см., например,[1-4] и др.). Намного труднее задача изучения устойчивости при случайных возмущениях других типов. Поэтому большинство авторов ограничивалось либо линейными [5-7], либо нелинейными системами весьма частного типа [7]. В работе [8] дан критерий устойчивости произвольной нелинейной системы при возмущениях любой природы, однако этот критерий эффективен лишь в тех случаях, когда решение — марковский процесс.

Применение метода функции Ляпунова к вопросам устойчивости при случайных возмущениях было начато работами [8,9]. Однако тот аспект применения метода функций Ляпунова, который рассматривается в настоящей статье, по-видимому, впервые был использован для подобных целей в [10,7].

1. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением в векторной форме

$$dx / dt = G(x, t, \xi(t)) \qquad (1.1)$$

Здесь x, G — векторы из l-мерного эвклидова пространства E_l, $\xi(t)$ — случайный процесс со значениями из эвклидова пространства E_k.

Не нарушая общности, можно считать, что $G(0, t, \xi(t)) \equiv 0$ и изучать задачу устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$.

Следуя [9,3,11], введем некоторые определения.

Тривиальное решение уравнения (1.1) назовем:

1°. Устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется r такое, что

$$P\{|x(t, x_0, t_0)| > \varepsilon\} < \delta \quad \text{при } t \geqslant t_0,\ |x_0| < r \qquad (1.2)$$

2°. Асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, при любом $\varepsilon > 0$ найдется $r = r(\varepsilon)$ такое, что

$$P\{|x(t, x_0, t_0)| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty,\ |x_0| < r$$

3°. p-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r > 0$ такое, что

$$\langle |x(t, x_0, t_0)|^p \rangle < \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant t_0,\ |x_0| < r \quad (p > 0)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается вероятностное усреднение (математическое ожидание).

4°. Асимптотически p-устойчивым, если оно p-устойчиво и, кроме того,

$$\langle |x(t, x_0, t_0)|^p \rangle \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

5°. Устойчивым по вероятности в целом, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, для любых x_0, ε, δ можно указать $T = T(x_0, \varepsilon, \delta)$ такое, что при $t > T$ справедливо соотношение (1.2). Аналогично определяется асимптотическая и p-устойчивость в целом.

6°. Экспоненциально p-устойчивым, если оно p-устойчиво и, кроме того, существуют постоянные $A > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\langle |x(t, x_0, t_0)|^p \rangle \leqslant A\, |x_0|^p \exp\{-\alpha(t - t_0)\}$$

7°. Устойчивым с вероятностью единица в том или ином смысле, если все траектории, кроме, быть может, множества траекторий вероятности нуль, устойчивы в соответствующем смысле.

Замечание. В работе [7] используется другое определение: система асимптотически устойчива с вероятностью единица, если для всех начальных условий $x(t_0) = x_0$

$$P\{\lim_{t\to\infty} x(t, x_0, t_0) = 0\} = 1 \tag{1.3}$$

Для линейных автономных систем и стационарных процессов $\xi(t)$ это определение, по-видимому, эквивалентно определению [7]. Однако в общем случае оно неприемлемо, так как, во-первых, существуют примеры нелинейных детерминированных систем, для которых выполнено условие (1.3) и которые тем не менее не являются устойчивыми по Ляпунову в классическом смысле, и, во-вторых, легко привести примеры линейных систем, возмущенных нестационарным случайным процессом, для которых выполнено условие (1.3) и для которых, тем не менее, каждая траектория неустойчива с вероятностью единица.

Не делая никаких ограничивающих предположений о системе, трудно рассчитывать на получение нетривиальных и эффективных условий устойчивости. В этой статье будут исследоваться условия устойчивости систем вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) + \sigma(x, t)\,\xi(t), \qquad (F(0, t) \equiv 0; \quad \sigma(0, t) \equiv 0) \tag{1.4}$$

Здесь σ — матрица $k \times l$, $x, F \in E_l$, $\xi(t) \in E_k$. Так же, как и в работах [7,10] достаточные условия устойчивости будут даны в терминах существования функции Ляпунова укороченной системы

$$dx \,/\, dt = F(x, t) \tag{1.5}$$

Относительно всех рассматриваемых в дальнейшем функций Ляпунова $V(x, t)$ предполагается, что они удовлетворяют условию Липшица по x

$$|V(x_2, t) - V(x_1, t)| < L\,|x_2 - x_1| \tag{1.6}$$

в каждой ограниченной области. Если L не зависит от области, т. е.

$$\sup_{x,\,t} \frac{|V(x_2, t) - V(x_1, t)|}{|x_2 - x_1|} = L < \infty$$

то будем пользоваться обозначением $V \in \mathrm{C}(L)$. Примем также обозначение

$$\|\sigma\| = \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \sigma_{ij}^2\right)^{1/2}$$

2. Как известно, процесс $\xi(t)$ удовлетворяет закону больших чисел, если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ можно указать $T > 0$ такое, что

$$P\left\{\left|\frac{1}{t}\int_0^t \xi(s)\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t \langle \xi(s) \rangle\,ds\right| > \delta\right\} < \varepsilon \quad \text{при } t > T$$

Если же

$$P\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \xi(s)\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t \langle \xi(s) \rangle\,ds \to 0 \quad \text{при } t\to\infty\right\} = 1$$

то процесс $\xi(t)$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел. Достаточно широкие условия справедливости закона больших чисел для случайных процессов имеются в [12].

Тот факт, что усиленный закон больших чисел может быть использован для установления устойчивости системы с вероятностью единица, был впервые отмечен в [5]. Развитие этой идеи см. в [7]. Покажем, что закон больших чисел в слабой форме приводит при дополнительных условиях к устойчивости по вероятности.

Теорема 2.1. Предположим, что для системы (1.5) существует функция Ляпунова $V \in \mathbf{C}(L)$, удовлетворяющая условиям ($c_i > 0$ — постоянные):

$$\inf_{t>0,\ |x|>r} V(x, t) = V_r > 0 \quad \text{при } r > 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d^\circ V}{dt} \leqslant -c_1 V, \qquad \|\sigma(x, t)\| \leqslant c_2 V \tag{2.2}$$

Здесь и далее

$$\frac{d^\circ V(x, t)}{dt} = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}[V(x(t+h, x, t), t+h) - V(x, t)]$$

— производная от V в силу системы (1.5).

Тогда тривиальное решение системы (1.4) асимптотически устойчиво по вероятности в целом для любого процесса $\xi(t)$, для которого

$$\sup_{t>0} \langle |\xi(t)| \rangle < \frac{c_1}{Lc_2} \tag{2.3}$$

и процесс $|\xi(t)|$ удовлетворяет закону больших чисел. Если же процесс $|\xi(t)|$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, то те же условия обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом решения $x = 0$ с вероятностью единица.

Доказательство. Пусть $x^\circ(t)$ — решение уравнения (1.4), удовлетворяющее начальному условию $x^\circ(0) = x_0$. Тогда, учитывая условия теоремы, без труда получим

$$\frac{dV(x^\circ(t), t)}{dt} \leqslant \frac{d^\circ V(x^\circ(t), t)}{dt} + Lc_2|\xi(t)|V \leqslant V(-c_1 + Lc_2|\xi(t)|)$$

Отсюда следует неравенство

$$V(x^\circ(t), t) \leqslant V(x_0, 0)\exp\left\{Lc_2 t\left(\frac{1}{t}\int_0^t |\xi(s)|\,ds - \frac{c_1}{Lc_2}\right)\right\} \tag{2.4}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ произвольны. Используя (2.3) и тот факт, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет закону больших чисел, выберем число $T > 0$ так, чтобы при $t \geqslant T$ было выполнено неравенство

$$P\left\{\frac{1}{t}\int_0^t |\xi(s)|\,ds > \frac{c_1}{Lc_2}\right\} < \varepsilon \tag{2.5}$$

После этого выберем число $M > 1$ настолько большим, что

$$P\left\{Lc_2\int_0^T |\xi(s)|\,ds > \ln M\right\} < \varepsilon \tag{2.6}$$

Наконец, выберем r настолько малым, что

$$V(x_0, 0)\, M < V_\delta \quad \text{при } |x_0| < r \tag{2.7}$$

Из (2.4)—(2.7) получим, рассматривая отдельно случаи $t < T$ и $t \geqslant T$, что при $|x_0| < r$ и всех $t > 0$

$$P\{|x(t)| > \delta\} \leqslant P\{V(x(t), t) > V_\delta\} \leqslant \varepsilon$$

Отсюда и из соотношения

$$P\left\{\frac{1}{t}\int_0^t |\xi(s)|\, ds > \frac{c_1}{Lc_2}\right\} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема 2.2. Пусть для системы (1.4) существует функция Ляпунова $V(x, t) \in \mathrm{C}(L)$, для которой выполнены соотношения (2.1), (2.2) и при некотором $c > 0$ неравенство

$$V(x, t) > c\,|x| \tag{2.8}$$

а процесс $\xi(t)$ таков, что для некоторых положительных постоянных k_1, k_2 и всех $t > t_0$

$$\left\langle \exp\left\{k_1 \int_{t_0}^t |\xi(s)|\, ds\right\}\right\rangle \leqslant \exp\{k_2(t - t_0)\} \tag{2.9}$$

причем постоянные k_i, c_i и L связаны неравенством

$$Lk_2c_2 \leqslant k_1c_1 \tag{2.10}$$

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ системы (1.4) p-устойчиво при $p \leqslant k_1 / (Lc_2)$. Если же выполнено строгое неравенство

$$Lk_2c_2 < k_1c_1 \tag{2.11}$$

то при тех же p решение экспоненциально p-устойчиво.

Доказательство теоремы опирается на полученное ранее неравенство (2.4). Возведя обе его части в степень k_1 / Lc_2 и вычисляя затем математические ожидания от обеих частей, получим с учетом (2.8)

$$c^{k_1/Lc_2} \langle |x(t)|^{k_1/Lc_2} \rangle \leqslant \langle V(x, t), t)]^{k_1/Lc_2} \rangle \leqslant$$

$$\leqslant [V(x_0, t_0)]^{k_1/Lc_2} \left\langle \exp\left\{k_1 \int_{t_0}^t |\xi(s)|\, ds - \frac{c_1k_1}{Lc_2}(t - t_0)\right\}\right\rangle$$

Из этого неравенства и соотношений (2.9)—(2.11) следует утверждение теоремы.

3. Так как в реальных системах случайные возмущения являются результатом воздействия большого числа факторов, действие каждого из которых мало, то естественно предположить, что процесс $\xi(t)$ в уравнении (1.4) гауссовский. Как известно [12], такой процесс однозначно характеризуется своим вектором математического ожидания $m(t) = \langle \xi(t) \rangle$ и матрицей ковариаций

$$K(s, t) = \operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = ((\langle [\xi_i(s) - m_i(s)]\, [\xi_j(t) - m_j(t)] \rangle))$$

Устойчивость линейных систем при гауссовских возмущениях параметров изучалась, например, в работах [13,6]. Анализ в [6] основан на установлении для гауссовских стационарных процессов, удовлетворяющих условию «перемешивания» в достаточно сильной форме, оценки типа (2.9). Оказалось, что можно ослабить и упростить условия, при которых справедлива эта оценка. Точнее, при выполнении для гауссовского процесса при любых t, t_0, t_1 условий

$$|\langle \xi(t)\rangle| \leqslant a_0, \qquad \langle|\xi(t)-m(t)|^2\rangle \leqslant a_1, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \|K(s, u)\| ds \leqslant a_2 \tag{3.1}$$

справедливо неравенство

$$\left\langle \exp\left\{k_1 \int_{t_0}^{t_1} |\xi(s)| ds\right\}\right\rangle \leqslant \exp\left\{k_1\left(a_0+\sqrt{a_1}+\frac{k_1 a_2}{2}\right)(t_1-t_0)\right\} \tag{3.2}$$

Из этой оценки и теоремы 2.2 вытекает, что система (1.4) экспоненциально p-устойчива при достаточно малых p, если для нее существует функция Ляпунова $V(x, t) \in \mathrm{C}(L)$, удовлетворяющая условиям (2.1), (2.2), (2.8), а $\xi(t)$ — гауссовский процесс, для которого выполнены условия (3.1) с достаточно малыми постоянными a_0, a_1.

Применим теперь доказанные в п. 2 теоремы к линейным системам вида

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \eta(t))\, x \tag{3.3}$$

где элементы квадратной матрицы $\eta(t)$ — случайные процессы, а детерминированная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x \tag{3.4}$$

экспоненциально устойчива.

По теореме Малкина ([14], стр. 313) из экспоненциальной устойчивости (3.4) следует, что для этой системы существует положительно определенная квадратичная форма $(C(t), x, x) = W(t, x)$, для которой

$$\frac{d^\circ W}{dt} \leqslant -\lambda |x|^2 \qquad (\lambda > 0)$$

Для того чтобы применить к системе (3.3) теорему 2.1, нужно записать ее в виде (1.4). Это легко сделать, если положить $\sigma(x, t)$ равной следующей матрице $l^2 \times l$:

$$\sigma(x, t) = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_l & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & x_l & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_l \end{matrix} \right\|$$

а $$\eta_{ik}(t) = \xi_{(i-1)l+k}(t) \qquad (\xi(t) \text{ — вектор из } E_{l^2})$$

Рассматривая функцию Ляпунова $V(x, t) = (W(x, t))^{1/2}$ и применяя теорему 2.1, получим следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть система (3.4) экспоненциально устойчива. Тогда система (3.3) асимптотически устойчива по вероятности для любого (матричного) случайного процесса $\eta(t)$ такого, что процесс $\|\eta(t)\|$ удовлетворяет закону больших чисел и $\langle\|\eta(t)\|\rangle < c$, где c — достаточно малая постоянная. Если же процесс $\|\eta(t)\|$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, то те же условия обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом системы (3.3) с вероятностью единица.

Переходя к условиям p-устойчивости линейной системы (3.3), ограничимся для простоты случаем, когда A — постоянная устойчивая матрица (т. е. $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, где λ_i — собственные значения матрицы A), а $\eta(t)$ — гауссовский случайный процесс. Рассмотрим сначала пример уравнения в E_1.

Пример. Пусть дано уравнение в E_1

$$\frac{dx}{dt} = (a + \eta(t))\,x, \qquad x(0) = x_0 \tag{3.5}$$

где $\eta(t)$ — гауссовский стационарный процесс с $\langle\eta(t)\rangle = 0$ и корреляционной функцией $K(t-s) = \langle\eta(s)\eta(t)\rangle$. Из того факта, что интеграл от гауссовского процесса также имеет гауссовское распределение вероятностей, вытекает, что (3.6)

$$\langle|x(t)|^p\rangle = |x_0|^p\left\langle\exp\left\{apt + p\int_0^t \eta(s)\,ds\right\}\right\rangle = |x_0|^p\exp\left\{apt + \frac{p^2}{2}\int_0^t\int_0^t K(u-s)\,du\,ds\right\}$$

Если функция $K(u)$ абсолютно интегрируема, то, как известно [12], процесс $\xi(t)$ имеет ограниченную спектральную плотность $f(\lambda)$, причем

$$\int_0^t\int_0^t K(u-s)\,du\,ds = f(0)\,t + o(t) \tag{3.7}$$

Отсюда и из (3.6) вытекает, что решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (3.5) асимптотически p-устойчиво при $p < -2a\,/\,f(0)$, если $a < 0$. При $a > 0$ из явного вида решения вытекает, что оно неустойчиво. Если же $a = 0$, то решение $x(t) \equiv 0$ будет неустойчивым, если, например, $f(0) \neq 0$. В самом деле, если $f(0) \neq 0$, то из (3.7) вытекает, что

$$D(t) = \int_0^t\int_0^t K(u-s)\,du\,ds = \left\langle\left[\int_0^t \xi(s)\,ds\right]^2\right\rangle \to \infty \quad \text{при } t\to\infty \tag{3.8}$$

Кроме того,

$$P\left\{\int_0^t \xi(s)\,ds > \sqrt{D(t)}\right\} = 1 - \Phi(1) \tag{3.9}$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона с параметрами 0, 1. Из (3.8) и (3.9) вытекает неустойчивость тривиального решения в этом случае.

Рассмотрим теперь случай $x \in E_l$. Если A — устойчивая матрица, то, как известно [14], найдется положительно определенная симметричная матрица C такая, что матрица $CA + A^*C$ отрицательно определена. Обозначим λ наибольшее из положительных чисел, для которых при всех $x \in E_l$

$$\frac{d^\circ(Cx,\, x)}{dt} = ((CA + A^*C)\,x,\, x) \leqslant -\lambda\,(Cx,\, x) \tag{3.10}$$

Для числа λ легко получить оценку: $\lambda > -\lambda_{\max}^d\,/\,\lambda_{\max}^c > 0$, где $\lambda_{\max}^c$ и $\lambda_{\max}^d$ — наибольшие собственные значения матрицы C и $D = CA + A^*C$ соответственно.

Теорема 3.2. Пусть A — устойчивая матрица $l\times l$, C — положительно определенная матрица, удовлетворяющая условию (3.8), а $\eta(t) = ((\eta_{ij}(t)),\ i, j = 1, \ldots, l$ — гауссовский случайный процесс. Предположим, что для процесса $\eta^\circ(t) = C^{1/2}\eta(t)\,C^{-1/2}$ выполнены условия

$$|\langle\eta^\circ(t)\rangle| \leqslant a_0; \qquad \langle|\eta^\circ(t) - \langle\eta^\circ(t)\rangle|^2\rangle \leqslant a_1, \qquad \int_{t_0}^{t_1}\|K(s, u)\|\,ds \leqslant a_2$$

Здесь $K(s, t) = \operatorname{cov}(\eta^\circ(s),\ \eta^\circ(t))$ — матрица $l^2\times l^2$.

Тогда тривиальное решение системы (3.3) асимптотически p-устойчиво при $p < [\lambda - 2(a_0 + \sqrt{a_1})] / 2$, если $\lambda > 2(a_0 + \sqrt{a_1})$.

Доказательство. Для функции Ляпунова $V(x) = (Cx, x)$ при помощи (3.8) имеем

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leqslant -\lambda V + ((C\eta + \eta^* C)x, x) \leqslant V(-\lambda + 2\|\eta^\circ(t)\|) \tag{3.11}$$

Здесь использовалась оценка

$$(C\eta x, x) = (C^{1/2}\eta C^{-1/2}C^{1/2}x,\ C^{1/2}x) \leqslant \|C^{1/2}\eta C^{-1/2}\| \|C^{1/2}x\|^2 \leqslant \|\eta^\circ\| (Cx, x)$$

Поэтому

$$[V(x(t))]^p \leqslant [V(x_0)]^p \exp\left\{-p\lambda t + 2p\int_0^t \|\eta^\circ(s)\| ds\right\}$$

Отсюда, вычисляя математическое ожидание и используя оценку (3.2), получим

$$\langle [V(x(t))]^p \rangle \leqslant [V(x_0)]^p \exp\{pt(-\lambda + 2a_0 + 2\sqrt{a_1} + pa_2)\} \tag{3.12}$$

Из (3.12) сразу вытекает утверждение теоремы.

Замечание 3.1. Как видно из примера, в одномерном случае выполнение условия (3.10) гарантирует устойчивость системы при любой величине $a_1 = \sup \langle |\eta(t)|^2 \rangle$, если $a_0 = 0$. Нетрудно привести примеры, показывающие, что в многомерном случае это, вообще говоря, не так: «шум» достаточно большой интенсивности может «сбивать» устойчивость.

3.2. Из приведенного примера видно, что неустойчивая одномерная система переходит в неустойчивую при наложении гауссовского шума с нулевым средним. Можно показать, что это свойство также не переносится на многомерный случай, т. е. многомерные неустойчивые системы могут быть «стабилизированы» введением гауссовского шума. (Это утверждение содержится в работе [13], однако, как отмечено в [4], доказательство в [13] некорректно.)

Поступила 12 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Caughey T. K., Dienes J. K. The behaviour of linear systems with random parametric exication. J. Math. and Phys., 1962, v. 41, N 4.
2. Хасьминский Р. З. Об устойчивости траектории марковских процессов, ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
3. Leibowitz M. A. Statistical behaviour of linear systems with randomly varying parameters, J. Math. Phys., 1963, v. 4, N 6.
4. Bogdanoff J. L., Kozin F. Monents of the output of linear random systems, J. Acoust. Soc. America, 1962, v. 34, N 8.
5. Kozin F. On almost sure stability of linear systems with random coefficients, J. Math. and Phys., 1963, v. 42, N 1.
6. Шур М. Г. О линейных дифференциальных уравнениях со случайно возмущенными параметрами, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, т. 29, № 4.
7. Caughey T. K., Gray A. H. Jr. On the almost sure stability of linear dinamic systems with stochastic coefficients, J. Appl. Mech., vol. 32, 1965, N 2.
8. Bertram I. E., Serachik P. E. Stability of circuits with randomly time—varying parameters, Proc. of the Intern. Sympos. on Circuits and Inform. Theory, Los Angeles, Calif., 1959; IRE trans., CT-6, 1959.
9. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
10. Хасьминский Р. З. О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями. Проблемы передачи информации, 1965, т. 1, вып. 1.
11. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Проблемы передачи информации, 1966, т. 2, вып. 3.
12. Дуб Дж. Вероятностные процессы, М., Изд-во иностр. лит., 1956 г.
13. Samuels J. C. Theory of stochastic linear sistems with Gaussian parameter variations, J. Acoustic Soc. Amer., 1961, vol. 32, N 12.
14. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1952.