Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КОРРЕКЦИИ ВЫНУЖДЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. П. Гуськов

(Москва)

Рассматривается задача синтеза оптимального дискретного управления конечным состоянием линейной стохастической системы. Задача сводится к решению функциональных уравнений Беллмана. Приводится решение уравнений Беллмана применительно к задаче наведения в заданную фазовую точку.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dy}{dt}+A(t)\,y=B(t)\,f(t), \qquad f(t)=w(t)+q(t) \tag{1.1}$$

Здесь y — n — вектор фазовых координат y_i; $A=\{a_{kj}\}$ и $B=\{b_{ir}\}$ — определенные матрицы размеров соответственно $n\times n$ и $n\times s$; w — s — вектор-функция случайных возмущений марковского типа; q — s — вектор дискретных управляющих воздействий q_k.

Дискретность управления понимается в том смысле, что величины управляющих воздействий на заранее заданных интервалах коррекции $[t_i,\ t_{i+1})$ определяются в момент начала интервала t_i $(i=1,\ldots,\nu)$.

Принадлежность переменной величины моменту t_i будем отмечать индексом i вверху.

Предполагается, что система (1.1) вполне управляема [1,2], фазовые координаты y_i доступны измерению и известно априорное распределение возмущений w_k.

Ставится задача определения на основании информации о текущих значениях вектора фазовых координат $y(t)$ такого управления $q=q(y)$, которое к заданному моменту $t_{\nu+1}$ переводит систему (1.1) из состояния $y(t_1)=y^1$ в некоторое состояние $y(t_{\nu+1})=y^{\nu+1}$ при условии минимизации математического ожидания определенной положительной функции $\omega(y^{\nu+1})$. Таким образом, ставится задача отыскания управления, минимизирующего функционал

$$I=\langle\omega(y^{\nu+1})\rangle \tag{1.2}$$

Здесь угловые скобки — символ математического ожидания.

В такой постановке рассматриваемая задача примыкает к проблеме аналитического конструирования регулятора [3]. Стохастическому аспекту этой проблемы посвящен ряд работ. Здесь отметим [4,5].

§ 2. Дискретизация процесса. На рассматриваемом интервале времени общее решение системы уравнений (1.1) имеет вид

$$y(t)=N(t,t_1)\,y^1+\int_{t_1}^{t}N(t,\tau)\,B(\tau)\,f(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

Здесь $N(t, \tau) = Y(t) Y^{-1}(\tau)$ — матричная функция веса системы (1.1); Y — фундаментальная нормированная при $t = t_1$ матрица однородного уравнения (1.1); Y^{-1} — обратная матрица.

Предположим, что известны точки $y^i = (y_1^{\,i}, \ldots, y_n^{\,i})$ и $y^{i+1} = (y_i^{i+1}, \ldots, y_n^{i+1})$, через которые проходит фазовая траектория (2.1) в одной из конкретных реализаций соответственно в моменты t_i и t_{i+1}, выделяющие i-й интервал коррекции.

Выразим на основании (2.1) вектор конечного состояния системы (1.1) в зависимости от y^i и y^{i+1}. Получаем

$$y^{\nu+1} = N(t_{\nu+1}, t_i) y^i + \int\limits_{t_i}^{t_{\nu+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) B(\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.2}$$

$$y^{\nu+1} = N(t_{\nu+1}, t_{i+1}) y^{i+1} + \int\limits_{t_{i+1}}^{t_{\nu+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) B(\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.3}$$

Вычитая (2.3) из (2.2), находим

$$N(t_{\nu+1}, t_{i+1}) y^{i+1} = N(t_{\nu+1}, t_i) y^i + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) \Big[B(\tau) w(\tau) + \sum_{k=1}^{s} B_k(\tau) q_k(\tau)\Big] d\tau \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{2.4}$$

Здесь B_k — k-ый вектор-столбец матрицы B. Введем, далее, векторы

$$m^{i+1} = N(t_{\nu+1}, t_{i+1}) y^{i+1} + \int\limits_{t_{i+1}}^{t_{\nu+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) \langle w(\tau)\rangle d\tau \qquad (i = 0, \ldots, \nu) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon^j = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) B(\tau) [w(\tau) - \langle w(\tau)\rangle] d\tau, \quad Q_k^{\,j} = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) B_k(\tau) q_k(\tau) d\tau$$
$$(j = 1, \ldots, \nu;\ k = 1, \ldots, s) \tag{2.6}$$

Здесь $\langle w\rangle = (\langle w_1\rangle, \ldots, \langle w_s\rangle)$ — математическое ожидание случайной вектор-функции w.

При помощи введенных векторов и соотношения (2.4) процесс управления конечным состоянием в силу дискретности управляющих воздействий может быть представлен в виде цепи Маркова.

Действительно, подставив (2.4) в (2.5), с учетом обозначений (2.6) получаем соотношение

$$m^{i+1} = m^i + \varepsilon^i + \sum_{k=1}^{s} Q_k^{\,i} \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{2.7}$$

определяющее (так как $y^{\nu+1} = m^{\nu+1}$) ν — шаговый процесс изменения конечного состояния в зависимости от случайных векторов ε^i и управляющих воздействий $Q_k^{\,i}(q_k)$.

В силу случайного характера векторов ε^i определенным значениям m^i и $Q_k^{\,i}$ преобразование (2.7) ставит в соответствие некоторое множество случайных реализаций вектора m^{i+1}. Закон распределения этого множества, помимо значений векторов m^i и $Q_k^{\,i}$, зависит от распределения случайного вектора ε^i.

§ 3. Уравнения Беллмана. Для определения оптимального управления системой (1.1) обратимся к методу динамического программирования [6]. При этом будем предполагать, что управляющие воздействия q_k принадлежат к классу функций, для которых выполняется соотношение

$$Q_k^i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(t_{\nu+1}, \tau) B_k(\tau) q_k(\tau) d\tau = H_k^i u_k^i \qquad (i = 1, \ldots, \nu; \quad k = 1, \ldots, s) \tag{3.1}$$

Здесь H_k^i — определенный не зависящий от q_k вектор; u_k^i — параметры управления, составляющие вектор $u^i = (u_1^i, \ldots, u_s^i)$.

С учетом (3.1) соотношение (2.7) принимает вид

$$m^{i+1} = m^i + \varepsilon^i + \sum_{k=1}^{s} H_k^i u_k^i \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{3.2}$$

Так как $y^{\nu+1} = m^{\nu+1}$, то задача синтеза оптимального управления системой (1.1) состоит в определении последовательности вектор-функций $u^i = u^i(m^i)$ $(i = 1, \ldots, \nu)$, оптимизирующей марковский процесс (3.2) в смысле минимизации критерия (1.2).

Следуя методу динамического программирования, введем обозначения

$$\Omega_k(m^j) = \min_{u^i} I = \min_{u^i} \langle \omega(y^{\nu+1}) \rangle \qquad (k = 1, \ldots, \nu; \quad j = \nu + 1 - k)$$

Здесь $\Omega_k(m^j)$ — минимальное значение критерия в процессе, состоящем из k шагов и начинающемся с состояния m^j. Минимизация производится по векторным управлениям $u^i = u^i(m^i)$, а математическое ожидание вычисляется по совокупности случайных векторов ε^i $(i = j, \ldots, \nu)$.

Тогда отыскание оптимального управления сводится к решению функциональных уравнений Беллмана [6], определяющих связь между функционалами $\Omega_k(m^j)$ и $\Omega_{k-1}(m^{j+1})$. Для рассматриваемого процесса уравнения Беллмана имеют вид

$$\Omega_1(m^\nu) = \min_{u^\nu} \langle \omega(m^{\nu+1}(m^\nu)) \rangle, \qquad \Omega_k(m^j) = \min_{u^j} \langle \Omega_{k-1}(m^{j+1}(m^j)) \rangle \tag{3.3}$$

$$(k = 2, \ldots, \nu; \quad j = \nu + 1 - k)$$

Здесь преобразование $m^{j+1} = m^{j+1}(m^j)$ определяется согласно (3.2).

§ 4. Задача наведения в начало координат. Рассмотрим решение уравнений (3.3) применительно к задаче оптимального по точности приведения системы (1.1) в начало координат. Примем в качестве меры близости конечной точки фазовой траектории движения (1.1) к началу координат функцию $\omega = (y^{\nu+1})^2$. Тогда уравнения (3.3) запишутся в виде

$$\Omega_1(m^\nu) = \min_{u^\nu} \langle (m^{\nu+1}(m^\nu))^2 \rangle, \qquad \Omega_k(m^j) = \min_{u^j} \langle \Omega_{k-1}(m^{j+1}(m^j)) \rangle \tag{4.1}$$

$$(k = 2, \ldots, \nu; \quad j = \nu + 1 - k)$$

Обратимся к первому уравнению системы (4.1). Выражая $m^{\nu+1}$ через m^ν согласно преобразованию (3.2), находим

$$\Omega_1(m^\nu) = \min_{u^\nu} \left\langle \left(m^\nu + \varepsilon^\nu + \sum_{\alpha=1}^{s} H_\alpha^\nu u_\alpha^\nu\right)^2 \right\rangle \tag{4.2}$$

Имея в виду, что ε^ν — вектор случайных центрированных величин, после преобразования правой части (4.2) получаем

$$\Omega_1(m^\nu) = \min_{u^\nu}\left(m^\nu + \sum_{\alpha=1}^{s} H_\alpha{}^\nu u_\alpha{}^\nu\right)^2 + \langle(\varepsilon^\nu)^2\rangle \tag{4.3}$$

Задача отыскания минимума по $u^\nu = (u_1{}^\nu, \ldots, u_s{}^\nu)$ в (4.3) сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&(H_1{}^\nu \cdot H_1{}^\nu)\, u_1{}^\nu + (H_1{}^\nu \cdot H_2{}^\nu)\, u_2{}^\nu + \cdots + (H_1{}^\nu \cdot H_s{}^\nu)\, u_s{}^\nu = -m^\nu \cdot H_1{}^\nu \\
&(H_2{}^\nu \cdot H_1{}^\nu)\, u_1{}^\nu + (H_2{}^\nu \cdot H_2{}^\nu)\, u_2{}^\nu + \cdots + (H_2{}^\nu \cdot H_s{}^\nu)\, u_s{}^\nu = -m^\nu \cdot H_2{}^\nu \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(H_s{}^\nu \cdot H_1{}^\nu)\, u_1{}^\nu + (H_s{}^\nu \cdot H_2{}^\nu)\, u_2{}^\nu + \cdots + (H_s{}^\nu \cdot H_s{}^\nu)\, u_s{}^\nu = -m^\nu \cdot H_s{}^\nu
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь и в дальнейшем точкой обозначается скалярное произведение векторов.

Решение системы (4.4) определяет оптимальное управление $u^{\circ\nu}$ на последнем шаге коррекции

$$u_\alpha{}^{\circ\nu} = -\sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\alpha}^\nu}{\Delta^\nu}(m^\nu \cdot H_\beta{}^\nu) \qquad (\alpha = 1, \ldots, s) \tag{4.5}$$

Здесь $A_{\beta\alpha}{}^\nu$ — алгебраическое дополнение элемента $(H_\beta{}^\nu \cdot H_\alpha{}^\nu)$ определителя $\Delta^\nu \neq 0$ системы (4.4).

Подставляя (4.5) в (4.3), находим минимальное значение критерия оптимальности в одношаговом процессе

$$\Omega_1(m^\nu) = \left(m^\nu - \sum_{\alpha=1}^{s} H_\alpha{}^\nu \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\alpha}^\nu}{\Delta^\nu}(m^\nu \cdot H_\beta{}^\nu)\right)^2 + \langle(\varepsilon^\nu)^2\rangle \tag{4.6}$$

Покажем при помощи индукции, что последовательность оптимальных управлений $u^{\circ j}$ в ν-шаговом процессе, определяемая решением уравнений (4.1), образуется по закону

$$u_\alpha{}^j = -\sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\alpha}^j}{\Delta^j}(m^j \cdot R_\beta{}^j) \qquad (j = 1, \ldots, \nu;\quad \alpha = 1, \ldots, s) \tag{4.7}$$

а минимальное значение критерия равно

$$\Omega_\nu(m^1) = \left(m^1 - \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{\alpha=1}^{s} R_\alpha{}^i \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\alpha}^i}{\Delta^i}(m^1 \cdot R_\beta{}^i)\right)^2 + \left\langle \sum_{r=1}^{\nu} (\psi^r)^2 \right\rangle \tag{4.8}$$

$$\Delta^i = \det|r_{\beta\alpha}^i| \neq 0, \qquad r_{\beta\alpha}^i = R_\beta{}^i \cdot R_\alpha{}^i \qquad (i = 1, \ldots, \nu;\quad \alpha, \beta = 1, \ldots, s)$$

Здесь $A_{\beta\alpha}{}^i$ — алгебраическое дополнение члена $r_{\beta\alpha}{}^i$ в определителе Δ^i. Векторы $R_\alpha{}^i$ определяются рекуррентным соотношением

$$R_\alpha{}^\nu = H_\alpha{}^\nu,\ R_\alpha{}^{\nu-j} = H_\alpha{}^{\nu-j} - \sum_{\varkappa=0}^{j-1}\sum_{\gamma=1}^{s} R_\gamma{}^{\nu-\varkappa} \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\gamma}^{\nu-\varkappa}}{\Delta^{\nu-\varkappa}}(H_\alpha{}^{\nu-j} \cdot R_\beta{}^{\nu-\varkappa}) \tag{4.9}$$

$$\begin{pmatrix} j = 1, \ldots, \nu - 1 \\ \alpha = 1, \ldots, s \end{pmatrix}$$

Случайные векторы ψ^r образуются при помощи соотношения, аналогичного по структуре (4.9)

$$\psi^\nu=\varepsilon^\nu,\qquad \psi^{\nu-j}=\varepsilon^{\nu-j}-\sum_{\varkappa=0}^{j-1}\sum_{\gamma=1}^{s}R_\gamma^{\nu-\varkappa}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{A_{\beta\gamma}^{\nu-\varkappa}}{\Delta^{\nu-\varkappa}}(\varepsilon^{\nu-j}\cdot R_\beta^{\nu-\varkappa})\qquad(4.10)$$
$$(j=1,\ldots,\nu-1)$$

Лемма 4.1. Рекуррентное соотношение (4.9), где H_α^i — произвольные векторы n-мерного эвклидова пространства, порождает совокупность векторов R_α^i ($i=1,\ldots,\nu$; $\alpha=1,\ldots,s$), в которой все векторы с неодинаковыми верхними индексами попарно ортогональны.

Доказательство. Нужно показать, что

$$R_\alpha^{\nu-x}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y}=0\qquad(x=1,\ldots,\nu-1;\ y=0,\ldots,x-1;\ \alpha,\varepsilon=1,\ldots,s)\qquad(4.11)$$

В справедливости (4.11) для $x=1$ легко убедиться непосредственной проверкой. Доказательство тождеств (4.11) при любом x проведем методом индукции. Покажем, что, если равенства (4.11) справедливы для $x=1,\ldots,k$, то они справедливы и для $x=k+1$.

В соответствии с (4.9) для скалярного произведения векторов $R_\alpha^{\nu-(k+1)}$ и $R_\varepsilon^{\nu-y}$ ($y=1,\ldots,k$) имеем

$$R_\alpha^{\nu-(k+1)}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y}=H_\alpha^{\nu-(k+1)}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y}-\sum_{\varkappa=0}^{k}\sum_{\gamma=1}^{s}(R_\gamma^{\nu-\varkappa}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y})\sum_{\beta=1}^{s}\frac{A_{\beta\gamma}^{\nu-\varkappa}}{\Delta^{\nu-\varkappa}}(H_\alpha^{\nu-(k+1)}\cdot R_\beta^{\nu-\varkappa})\ (4.12)$$

При принятом предположении о справедливости (4.11) для $x=1,\ldots,k$ соотношение (4.12) преобразуется к виду

$$R_\alpha^{\nu-(k+1)}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y}=H_\alpha^{\nu-(k+1)}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y}-\Big(\sum_{\beta=1}^{s}R_\beta^{\nu-y}\sum_{\gamma=1}^{s}\frac{r_{\varepsilon\gamma}^{\nu-y}A_{\beta\gamma}^{\nu-y}}{\Delta^{\nu-y}}\Big)\cdot H_\alpha^{\nu-(k+1)}\qquad(4.13)$$

Так как в соответствии со свойствами алгебраических дополнений определителя

$$\sum_{\gamma=1}^{s}\frac{r_{\varepsilon\gamma}^{\nu-y}A_{\beta\gamma}^{\nu-y}}{\Delta^{\nu-y}}=\begin{cases}1 & (\beta=\varepsilon)\\ 0 & (\beta\neq\varepsilon)\end{cases}$$

то на основании (4.13) получаем требуемое

$$R_\alpha^{\nu-(k+1)}\cdot R_\varepsilon^{\nu-y}=0$$

Индукция завершена. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству справедливости закономерностей (4.7) и (4.8) для любого ν.

Покажем, что если соотношение вида (4.8) справедливо для k-шагового оптимального процесса, начинающегося с состояния m^j, то оно справедливо и для оптимального процесса, состоящего из $k+1$-шага. При этом управление $u^{\circ j-1}$, переводящее систему из состояния m^{j-1} в состояние m^j, должно формироваться по закону (4.7).

Пусть для k-шагового оптимального процесса имеем

$$\Omega_k(m^j)=\Big(m^j-\sum_{i=j}^{\nu}\sum_{\alpha=1}^{s}R_\alpha^i\sum_{\beta=1}^{s}\frac{A_{\beta\alpha}^i}{\Delta^i}(m^j\cdot R_\beta^i)\Big)^2+\Big\langle\sum_{r=j}^{\nu}(\psi^r)^2\Big\rangle\qquad(4.14)$$
$$(j=\nu+1-k)$$

Подставив в (4.14) вместо m^j его выражение согласно (3.2), получаем с учетом (4.9), (4.10)

$$\Omega_k (m^{j-1}) = \Big(m^{j-1} - \sum_{i=j}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{s} R_\alpha{}^i \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A^i_{\beta\alpha}}{\Delta^i} (m^{j-1} \cdot R_\beta{}^i) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{s} R_\gamma{}^{j-1} u_\gamma{}^{j-1} + \psi^{j-1}\Big)^2 + \Big\langle \sum_{r=j}^{\nu} (\psi^r)^2 \Big\rangle \tag{4.15}$$

В соответствии с (4.1) при оптимальном управлении имеем

$$\Omega_{k+1} (m^{j-1}) = \min_{u^{j-1}} \langle \Omega_k (m^{j-1}) \rangle \tag{4.16}$$

Так как математическое ожидание вектора ψ^{j-1} равно нулю, то после подстановки (4.15) в (4.16) находим

$$\Omega_{k+1} (m^{j-1}) = \min_{u^{j-1}} \Big(m^{j-1} - \sum_{i=j}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{s} R_\alpha{}^i \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A^i_{\beta\alpha}}{\Delta^i} (m^{j-1} \cdot R_\beta{}^i) +$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{s} R_\gamma{}^{j-1} u_\gamma{}^{j-1}\Big)^2 + \Big\langle \sum_{r=j-1}^{\nu} (\psi^r)^2 \Big\rangle \tag{4.17}$$

Векторное управление $u^{\circ j-1}$, минимизирующее правую часть (4.17), определяется решением системы уравнений

$$\Big(m^{j-1} + \sum_{\gamma=1}^{s} R_\gamma{}^{j-1} u_\gamma{}^{j-1}\Big) \cdot R_\varepsilon{}^{j-1} - \sum_{i=j}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{s} (R_\alpha{}^i \cdot R_\varepsilon{}^{j-1}) \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A^i_{\beta\alpha}}{\Delta^i} (m^{j-1} \cdot R_\beta{}^i) = 0$$

$$(\varepsilon = 1, \ldots, s)$$

которая с учетом ортогональности вектора $R_\varepsilon{}^{j-1}$ векторам $R_\alpha{}^i$, имеющей место в силу леммы (4.1), принимает вид

$$\begin{aligned}
&r_{11}{}^{j-1} u_1{}^{j-1} + r_{12}{}^{j-1} u_2{}^{j-1} + \cdots + r_{1s}{}^{j-1} u_s{}^{j-1} = - m^{j-1} \cdot R_1{}^{j-1} \\
&r_{21}{}^{j-1} u_1{}^{j-1} + r_{22}{}^{j-1} u_2{}^{j-1} + \cdots + r_{2s}{}^{j-1} u_s{}^{j-1} = - m^{j-1} \cdot R_2{}^{j-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&r_{s1}{}^{j-1} u_1{}^{j-1} + r_{s2}{}^{j-1} u_2{}^{j-1} + \cdots + r_{ss}{}^{j-1} u_s{}^{j-1} = - m^{j-1} \cdot R_s{}^{j-1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Полагая $\Delta^{j-1} \neq 0$, в результате решения системы (4.18) находим

$$u_\gamma{}^{\circ j-1} = - \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A^{j-1}_{\beta\gamma}}{\Delta^{j-1}} (m^{j-1} \cdot R_\beta{}^{j-1}) \qquad (\gamma = 1, \ldots, s) \tag{4.19}$$

Сравнением (4.19) с (4.7) убеждаемся, что управление (4.19) является элементом последовательности (4.7).

Подстановкой (4.19) в (4.17) определяем выражение для минимального значения критерия в $(k + 1)$ — шаговом оптимальном процессе

$$\Omega_{k+1} (m^{j-1}) = \Big(m^{j-1} - \sum_{i=j-1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{s} R_\alpha{}^i \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A^i_{\beta\alpha}}{\Delta^i} (m^{j-1} \cdot R_\beta{}^i)\Big)^2 + \Big\langle \sum_{r=j-1}^{\nu} (\psi^r)^2 \Big\rangle$$

аналогичное по форме (4.14).

Так как справедливость формул (4.14) и (4.19) при $k = 1$ показана (см. (4.5) и (4.6)), то в силу индукции они справедливы для любого k, в том числе и для $k = \nu$. Таким образом, справедливость закономерностей (4.7) и (4.8) доказана.

§ 5. Один частный случай. Для механических систем размерность n пространства фазовых координат в два раза больше размерности s пространства векторов сил. В этом важном частном случае справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Если $n = 2s$ и векторы $H_1^{\nu-1}, \ldots, H_s^{\nu-1}, H_1^{\nu}, \ldots, H_s^{\nu}$, соответствующие двум последним интервалам коррекции $[t_{\nu-1}, t_\nu)$ и $[t_\nu, t_{\nu+1})$, линейно независимы, то минимальное значение критерия $I = \langle (y^{\nu+1})^2 \rangle$ не зависит от протекания процесса на интервале $[t_1, t_{\nu-1})$.

Доказательство. При $H_1^{\nu-1}, \ldots, H_s^{\nu-1}, H_1^{\nu}, \ldots, H_s^{\nu}$ линейно независимых рекурентное соотношение (4.9) порождает n линейно независимых векторов $R_1^{\nu-1}, \ldots, R_s^{\nu-1}$, $R_1^{\nu}, \ldots, R_s^{\nu}$, составляющих базис n-мерного пространства векторов R_β^{j}. Так как векторы R_α^{i} $(\alpha = 1, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, \nu - 2)$ по лемме 4.1 ортогональны базисным векторам, то они могут быть только нулевыми. В связи с этим для моментов $t_1, \ldots, t_{\nu-2}$ система (4.18), определяющая оптимальное управление, вырождается в векторное равенство

$$0u^i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \nu - 2)$$

выполняющееся при любом u^i.

Следовательно, минимальное значение критерия I не зависит от протекания процесса на интервале $[t_1, t_{\nu-1})$. Теорема доказана.

Найдем выражение для минимального значения критерия оптимальности в рассматриваемом случае.

Так как $R_\alpha^i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, \nu - 2)$, то соотношение (4.8) с учетом (4.10) принимает вид

$$\Omega_\nu(m^1) = \min_u I = \Big[m^1 - \sum_{\alpha=1}^{s} R_\alpha^{\nu-1} \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\alpha}^{\nu-1}}{\Delta^{\nu-1}} (m^1 \cdot R_\beta^{\nu-1}) - \tag{5.1}$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{s} R_\alpha^{\nu} \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\alpha}^{\nu}}{\Delta^{\nu}} (m^1 \cdot R_\beta^{\nu}) \Big]^2 + \Big\langle (\varepsilon^\nu)^2 + \Big(\varepsilon^{\nu-1} - \sum_{\gamma=1}^{s} R_\gamma^{\nu} \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\gamma}^{\nu}}{\Delta^{\nu}} (\varepsilon^{\nu-1} \cdot R_\beta^{\nu}) \Big)^2 \Big\rangle$$

Нетрудно показать, что коэффициенты при базисных векторах $R_1^{\nu-1}, \ldots, R_s^{\nu-1}, R_1^{\nu}, \ldots, R_s^{\nu}$ в квадратной скобке правой части (5.1) представляют собой координаты n-вектора m^1 относительно указанного базиса

Поэтому для минимального значения критерия получаем

$$\min_u I = \Big\langle (\varepsilon^\nu)^2 + \Big(\varepsilon^{\nu-1} - \sum_{\gamma=1}^{s} R_\gamma^{\nu} \sum_{\beta=1}^{s} \frac{A_{\beta\gamma}^{\nu}}{\Delta^{\nu}} (\varepsilon^{\nu-1} \cdot R_\beta^{\nu}) \Big)^2 \Big\rangle$$

В заключение автор благодарит А. М. Летова за обсуждение статьи.

Поступила 28 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. 1-го конгресса ИФАК, Изд-во АН СССР, 1961, т. 1.
2. Красовский Н. Н. Об общей задаче преследования. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Ч. I—V. Автоматика и телемеханика. 1960, т. 21, № 4—6; 1961, т. 22, № 4; 1962, т. 23, № 11.
4. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
5. Пономарев В. М. О синтезе оптимальной системы управления. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1963, № 5.
6. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. Изд-во «Наука», 1964.