

ИМПУЛЬСНЫЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОТИПНЫХ ОБЪЕКТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается задача [1] о минимаксе времени встречи двух линейных одностипных управляемых объектов, описываемых одинаковыми уравнениями при условии, что интегралы от модуля управляющего воздействия преследователя и преследуемого ограничены сверху некоторыми положительными величинами. Такое ограничение допускает «импульсные» скачки объектов на фазовой плоскости.

В статье [2] рассматривается задача преследования одностипных линейных объектов при условии, что ограничения на ресурсы управления допускают лишь непрерывные движения объектов; показано, что оптимальные управления могут быть построены на основании оптимального управления, реализующего быстроедействие в точку (0, 0) для линейной системы, совпадающей с исходной и имеющей ресурс, равный разности ресурсов преследователя и преследуемого.

Следуя этой мысли, строится оптимальное преследование и для озаглавленной задачи.

1. Рассмотрим задачу [1] о минимаксе времени T до встречи преследующего ($y_1(t)$) и преследуемого ($z_1(t)$) движений, описываемых соответственно уравнениями

$$\frac{dy_1}{dt} = Ay_1 + Bu_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = Az_1 + Bv_1 \quad (1.1)$$

Здесь y_1, z_1 — двумерные векторы фазовых координат управляемых объектов; u_1, v_1 — скаляры управления; A — квадратная матрица второго порядка; B — двумерный вектор-столбец.

Предполагается в соответствии с [2], что ресурсы управлений $u_1(t), v_1(t)$, которые могут быть использованы при $t \geq \tau$ для каждого текущего момента τ стеснены условием

$$\int_{\tau}^{\infty} |u_1| dt \leq M_1 - \int_0^{\tau} |u_1| dt = \mu_1(\tau), \quad M_1 > 0$$

$$\int_{\tau}^{\infty} |v_1| dt \leq N_1 - \int_0^{\tau} |v_1| dt = \nu_1(\tau), \quad N_1 > 0 \quad (1.2)$$

Предположим, что системы (1.1) вполне управляемы и это не уменьшит общности [3].

Тогда существует линейное преобразование [4], приводящее системы (1.1) к виду

$$y'' + by' + cy = u, \quad z'' + bz' + cz = v \quad (1.3)$$

с ограничениями

$$\int_{\tau}^{\infty} |u| dt \leq M - \int_0^{\tau} |u| dt = \mu(\tau), \quad \int_{\tau}^{\infty} |v| dt \leq N - \int_0^{\tau} |v| dt = \nu(\tau) \quad (1.4)$$

Ограничения допускают управления в виде импульсных δ функций, поэтому понятие встречи нуждается в уточнении. Пусть точки A и B при $t = \tau$ имеют равные координаты и различные скорости

$$x(\tau) = y(\tau) - z(\tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau) = \dot{y}(\tau) - \dot{z}(\tau) > 0, \quad \dot{x}(\tau) < \mu(\tau)$$

Здесь $\mu(\tau)$ — запас точки A .

Допустим, что при $t = \tau$ точка B реализовала импульсное управление ν_1 , которое привело к скачку скорости

$$-\dot{z}(\tau) - \nu_1 = \dot{z}(\tau + 0)$$

Если управление точки A при этом может быть выбрано импульсным и так, чтобы

$$\dot{x}(\tau + 0)_2 = \dot{y}(\tau) + \mu_1(\nu_1) - \dot{z}(\tau) - \nu_1 = 0$$

то будем считать, что встреча реализовалась при $t = \tau$.

Это значит, что при $t = \tau$ встреча не реализуется и только тогда, когда модуль разности скоростей удовлетворяет неравенству

$$|\dot{y}(\tau) - \dot{z}(\tau + 0)| > \mu(\tau)$$

В силу такого определения встречи при совпадении координат, точка B для избежания встречи обязана реализовать импульс ν_1 , удовлетворяющий неравенству

$$|\dot{y}(\tau) - \dot{z}(\tau) - \nu_1| > \mu(\tau)$$

При этом точка A может реализовать любое допустимое управление

$$u[y(\tau), z(\tau), \dot{y}(\tau), \dot{z}(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau), \nu_1)]$$

построенное на основании информации о положении и скоростях и запасах обеих точек, а также о «намерениях» ν_1 точки B в том случае, если эти намерения являются импульсным управлением.

Будем предполагать, что управление точки A строится на основании этой информации не только в случае совпадения координат, а при всевозможных состояниях

$$u[y(\tau), z(\tau), \dot{y}(\tau), \dot{z}(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau), \nu_1)]$$

что касается управления ν точки B , то точка B в этом смысле дискриминирована [3] и ее управление строится только на основании координат, скоростей и запасов точек A и B

$$\nu[y(\tau), z(\tau), \dot{y}(\tau), \dot{z}(\tau), \mu(\tau), \nu(\tau)]$$

Пару управлений u°, v° и время встречи $T^\circ [u^\circ, v^\circ]$ назовем оптимальными, если при любых $u \neq u^\circ, v \neq v^\circ$ выполняются неравенства

$$T [u, v^\circ] \geq T^\circ [u^\circ, v^\circ] \geq T [u^\circ, v]$$

где $T [u, v^\circ]$ и $T [u^\circ, v]$ — моменты встречи при неоптимальном u , оптимальном v° и наоборот. Вводя обозначения

$$x(\tau) = y(\tau) - z(\tau), \quad x'(\tau) = y'(\tau) - z'(\tau)$$

получим уравнение

$$x'' + bx' + cx = u - v \tag{1.5}$$

с ограничениями (1.4) на управления. Обозначим через $\xi(\tau)$ разность запасов

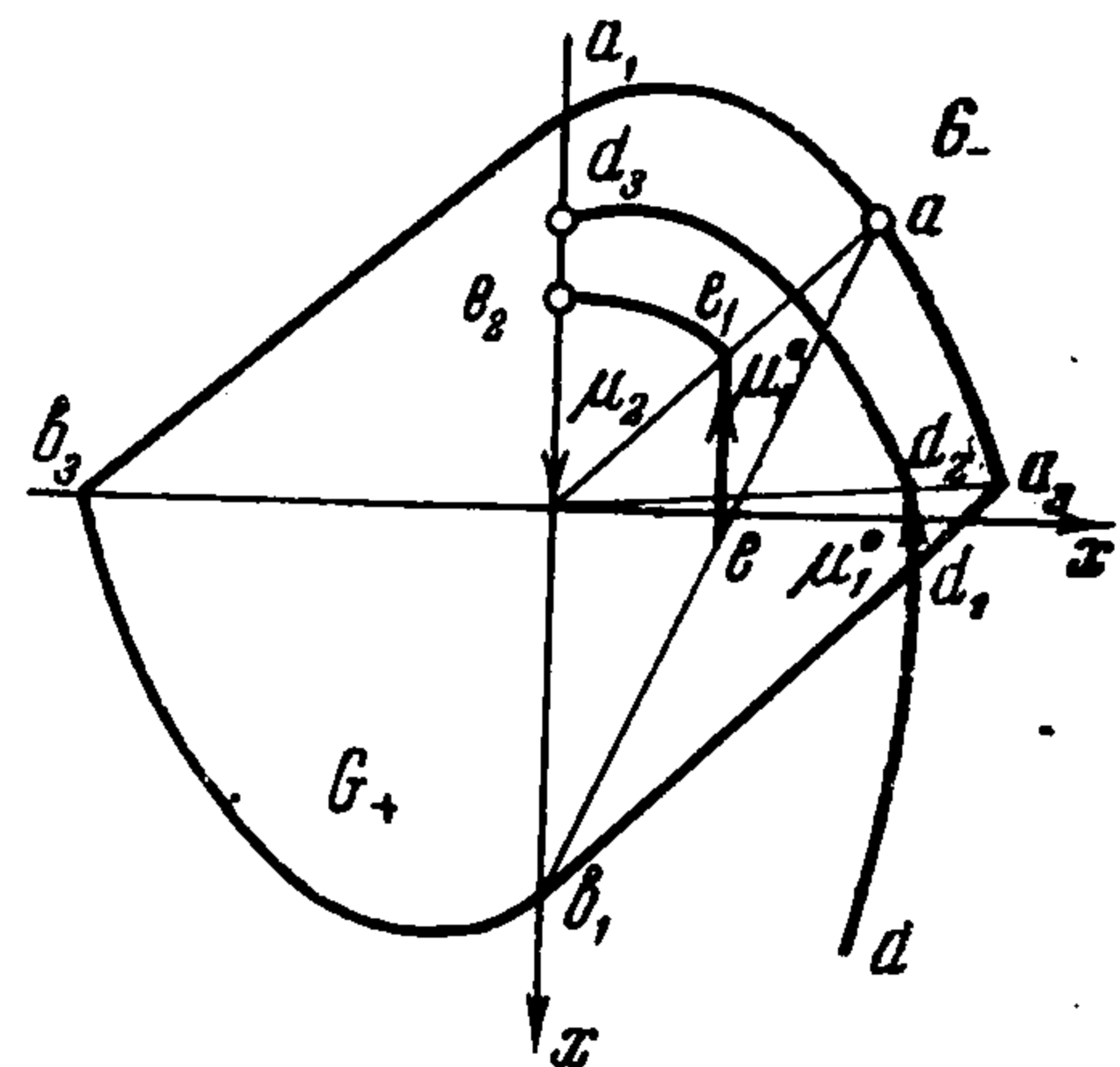
$$\xi(\tau) = \mu(\tau) - v(\tau)$$

Сопоставим, следуя Н. Н. Красовскому, задаче минимакса $T^\circ(u^\circ, v^\circ)$ в условиях (1.5), (1.4) задачу быстрогодействия из точки $[x(\tau_0), x'(\tau_0)]$ в точку $(0, 0)$ для уравнения

$$x'' + bx' + cx = w \tag{1.6}$$

с ограничением на управление w вида

$$\int_{\tau_0}^{\infty} |w| dt \leq \xi(\tau_0) \tag{1.7}$$



Фиг. 1

2. В статье [4] изучены быстрогодействия, являющиеся решением задачи (1.6), (1.7) из точки $(0,0)$ в точку (x, x') . Перефразируя эти результаты для задачи быстрогодействия из точки $[x(\tau_0), x'(\tau_0)]$ в начало координат, сформулируем их свойства для различного расположения корней характеристического уравнения $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ на комплексной плоскости.

1°. Случай $\lambda_{1,2} = \beta_{1,2} \pm i\omega, \beta_{1,2} < 0$.

Положим вначале $\xi(\tau_0) = 1$, направим ось x' вниз и на плоскости xx' изобразим область $D(t_2)$ (фиг. 1), ограниченную кривыми G_{\pm} и прямыми $[a_1, b_3], [b_1, a_3]$. Кривые G_{\pm} имеют уравнения

$$x = \pm \varphi_2(-s), \quad x' = \pm \varphi_2(-s) \quad (0 \geq -s \geq -t_2) \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$ нормальная система независимых решений уравнения $x'' + bx' + cx = 0$.

Величина t_2 есть наименьший положительный корень уравнения $\varphi_1(-t_2) = -1$.

Быстродействие $T^\circ(x_e, x'_e)$ из точки e координатами (x_e, x'_e) , лежащей внутри области $D(t_2)$, начинается импульсом $\mu_1^\circ < 0$ (если $x_e > 0$). Величины μ_1° и T определяются из уравнений

$$x'_e + \mu_1^\circ = (+\mu_1^\circ - 1)\varphi_2'(-T^\circ), \quad x_e = (+\mu_1^\circ - 1)\varphi_2(-T^\circ) \tag{2.2}$$

Для того чтобы определить μ_1° и T° графически, достаточно провести прямую b_1, e до точки a_2 пересечения с кривой G_- , а затем провести вертикаль e, e_1 до точки e_1 пересечения с прямой O, a_2 . Отрезок e, e_1 будет графически изображать импульс μ_1 . Точка a_2 фиксирует значение времени быстрогодействия $T^\circ = s^\circ \leq t_2$. Отрезок e_2, O изображает импульс μ_2 , приводящий точку в начало координат, а кривая e_1, e_2 имеет уравнения

$$x = (\mu_1^\circ + 1)\varphi_2(-t), \quad x' = (\mu_1^\circ + 1)\varphi_2'(-t) \quad (-T^\circ \leq -t \leq 0)$$

Если начальная точка d с координатами x, x' лежит снаружи области $D(t_2)$, то до пересечения с границей области $D(t_2)$ точка следует вдоль своей интегральной линии d, d_1 , затем производится импульс $-\mu_1 = (d_1, d_2)$, затем снова идет участок интегральной линии d_2, d_3 и затем импульс $\mu_2 = (d_3, 0)$ приводит точку в начало координат.

В работе [4] отмечен тот интуитивно ясный факт, что в том случае, когда запас $\xi(\tau_0) \neq 1$, то время быстрогодействия и импульс μ_1 преобразуются по формулам

$$T(x, x', \xi) = T^\circ(x/\xi, x'/\xi), \quad \mu_1(x, x', \xi) = \xi \mu_1^\circ(x/\xi, x'/\xi)$$

Здесь $T^\circ(x, x'), \mu_1^\circ(x, x')$ выражают зависимость времени быстрогодействия и первого импульса от координат начальной точки, при условии, что «запас» равен единице.

Введем новые переменные

$$\eta_1 = x/\xi, \quad \eta_2 = x'/\xi$$

и изобразим быстрогодействие на плоскости $\eta_1\eta_2$, полагая, как и раньше, что ось η_2 направлена вниз.

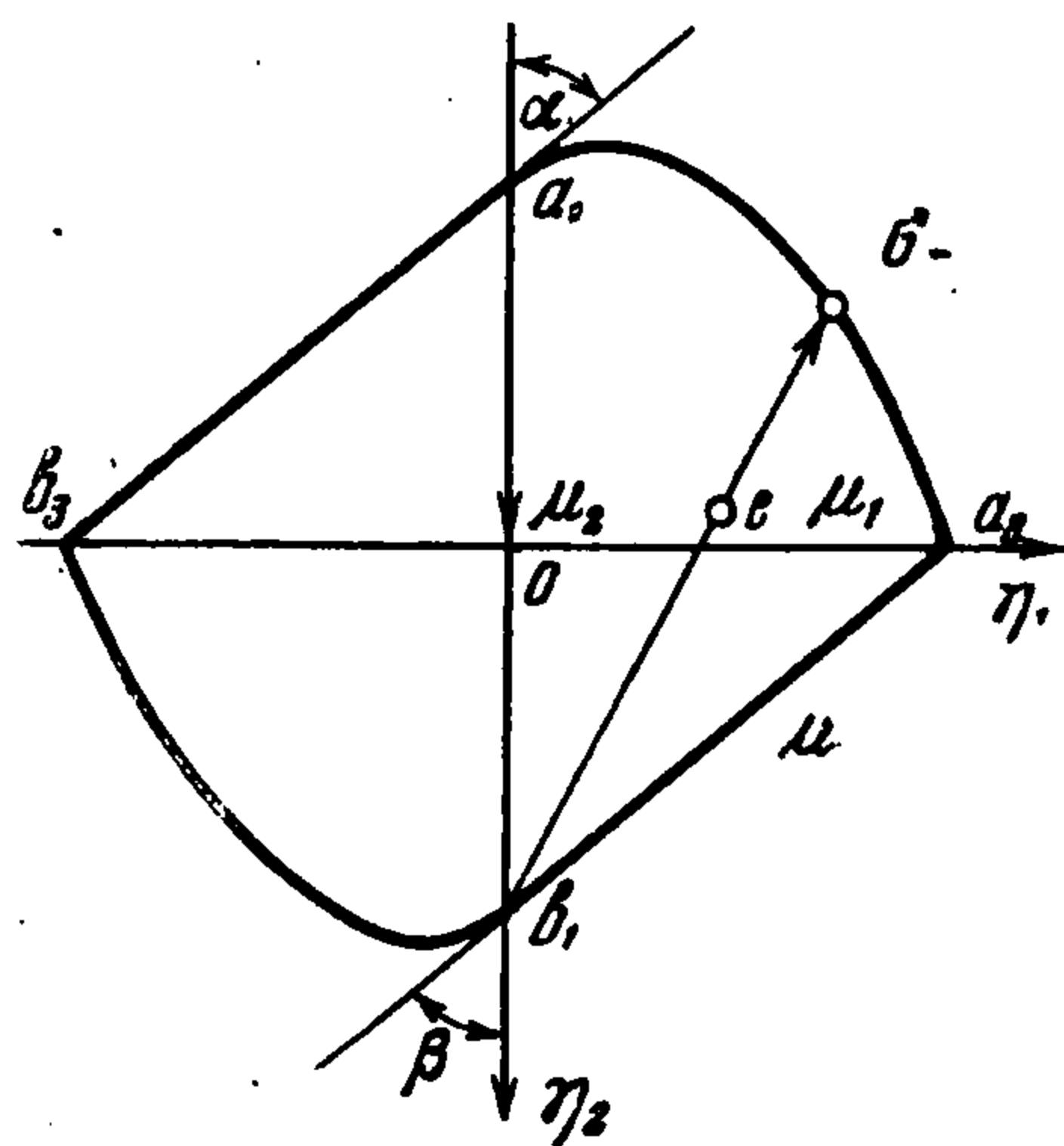
Импульс $\mu_1^\circ < 0$ переводит изображающую точку из точки $\eta_1(\tau_0), \eta_2(\tau_0)$ в точку

$$\eta_1(\tau_0 + 0) = \frac{x(\tau_0)}{\xi(\tau_0) - |\mu_1|}, \quad \eta_2(\tau_0 + 0) = \frac{x'(\tau_0) + \mu_1}{\xi(\tau_0) - |\mu_1|}$$

Учитывая (2.2), получаем

$$\eta_1(\tau_0 + 0) = \varphi_2(-T), \quad \eta_2(\tau_0 + 0) = \varphi_2'(-T)$$

Следовательно, на плоскости $\eta_1\eta_2$ быстрогодействия будет изображаться ломаной e, a_2, a_1, O (фиг. 2).



Фиг. 2

Быстродействие e, a_2, a_1, O из внутренней точки области $D(t_2)$ начинается скачком e, a_1 , затем следует участок интегральной линии a_2, a_1 и завершается скачком μ_2 , который осуществляет попадание в начало координат (если при $\xi = x' = x = 0$ положить $\eta_1 = \eta_2 = 0$).

Если точка d лежит за пределами области $D(t_2)$, то dd_1 — интегральная линия, затем следует скачок μ_1 , приводящий на кривую G_- , а после движения по этой кривой в течение времени t_2 осуществляется скачок в начало координат.

Проведем касательные $[b_1, b_4]$ и $[a_1, a_4]$. Они совместно с $[b_1, b_5]$ и $[a_1, a_5]$ — продолжениями оси η_2 — составят два угла α и β , которые найдут применение в дальнейшем (фиг. 3).

Продолжим теперь графическое построение быстрогодействия, ограничиваясь констатацией фактов и отсылая читателя за доказательствами к статье [4].

2°. Случай, когда $\lambda_{1,2} = \beta_{1,2} \pm i\omega$, $\beta_{1,2} > 0$. Тогда быстродействие e, a_2, a_1, O возможно только из замкнутой области достижимости $D(t_2)$ (фиг. 3).

Кривые G_{\pm} даются уравнениями (2.1), где t_2 наименьший положительный корень уравнения $\varphi_1(t_2) = -1$.

Если начальная точка лежит снаружи $D(t_2)$, то начало координат вообще недостижимо.

3°. Случай, когда $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ являются чисто мнимыми. Тогда $t_2 = \pi/\omega$, а область достижимости $D(t_2)$ представляет собой эллипс с единичной вертикальной полуосью и отношением полуосей, равным ω (фиг. 4). Быстродействие e, a_2, a_1, O возможно только из точек этого замкнутого эллипса, а из наружной точки начало координат вообще недостижимо.

4°. Случай, когда $\lambda_2 > 0, \lambda_1 < 0$ — действительные корни имеют разные знаки (фиг. 5). Быстродействие и достижение начала координат возможно только из внутренних точек полосы

$$|\eta_2 \pm 1| > |\lambda_1 \eta_1|$$

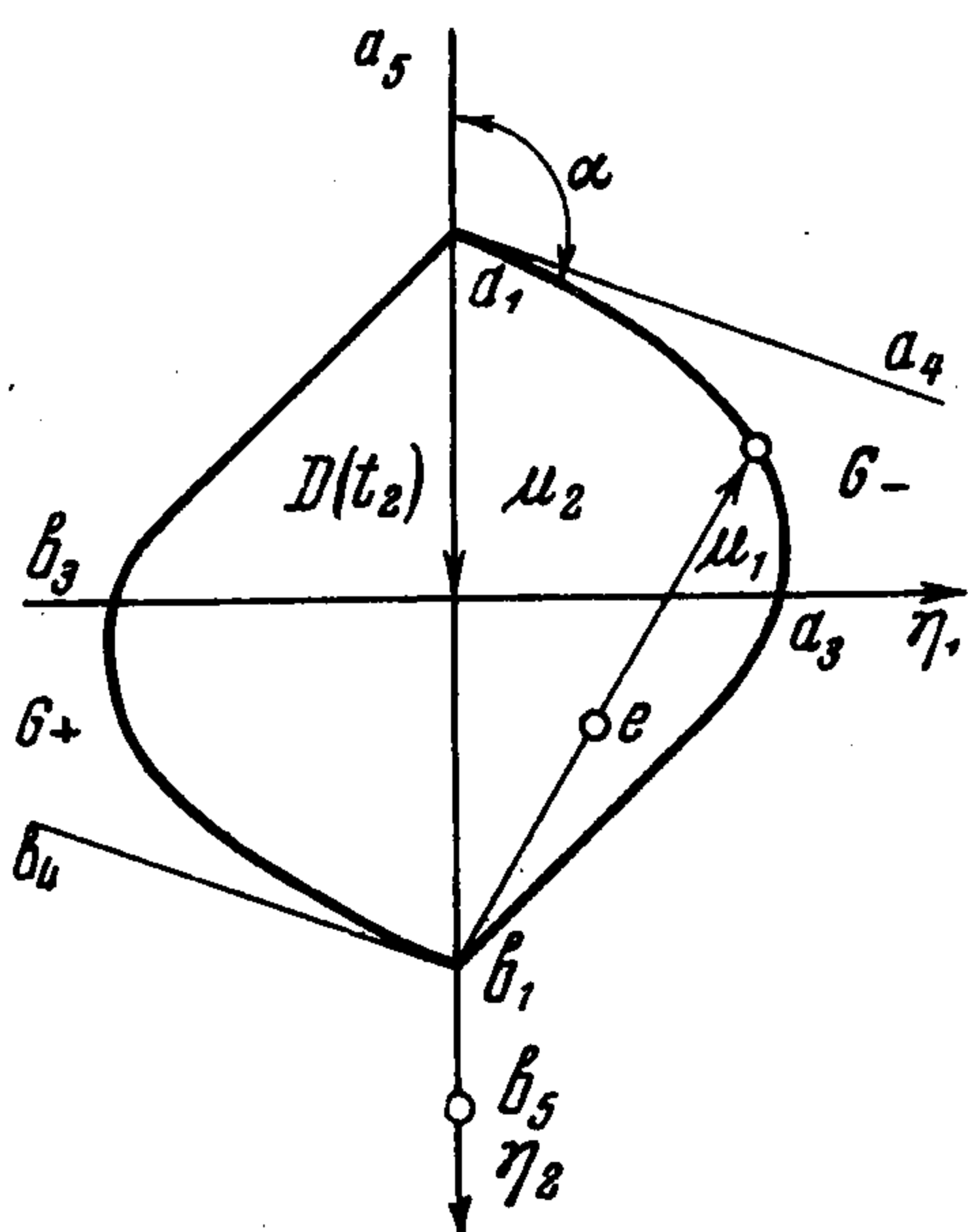
Поскольку с удалением от начала координат внутри полосы время быстродействия $T(\eta_1, \eta_2) \rightarrow \infty$, будем называть эту область $D(\infty)$.

Кривая a_1, a_2, f имеет уравнение

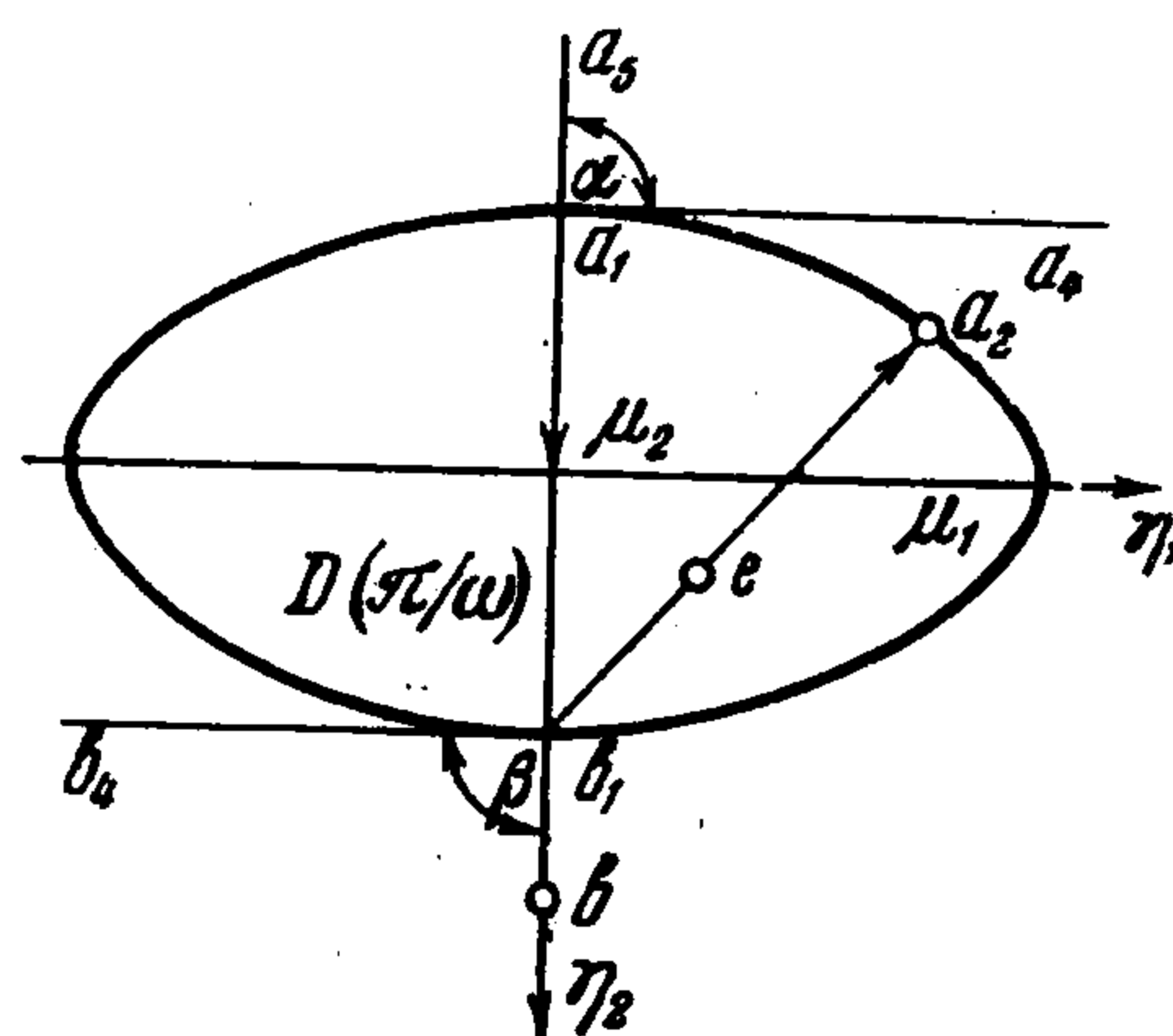
$$\eta_1 = -\varphi_2(-t), \quad \eta_2 = -\varphi_2^*(-t) \quad (0 < t < \infty) \quad (2.4)$$

Быстродействие из точки e , лежащей под этой кривой, начинается скачком e, a_2 вдоль прямой b_1, e , а затем следует по a_2, a_1 и кончается скачком в начало координат.

Быстродействие из точки e_1 , лежащей над кривой (2.4), начинается скачком e_1, a_2 вдоль прямой a_1, e_1 , а затем совпадает с предыдущим быстродействием.



Фиг. 3

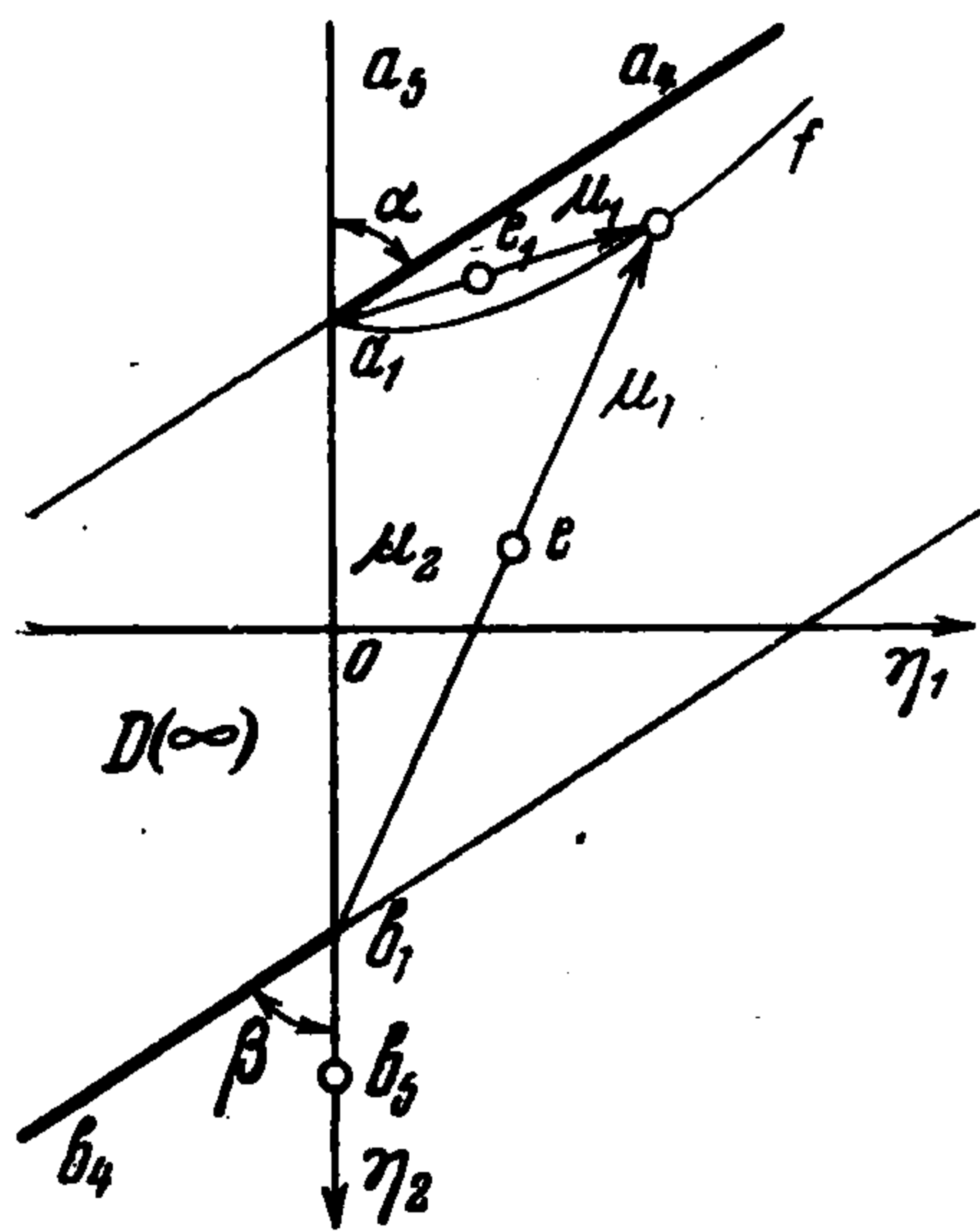


Фиг. 4

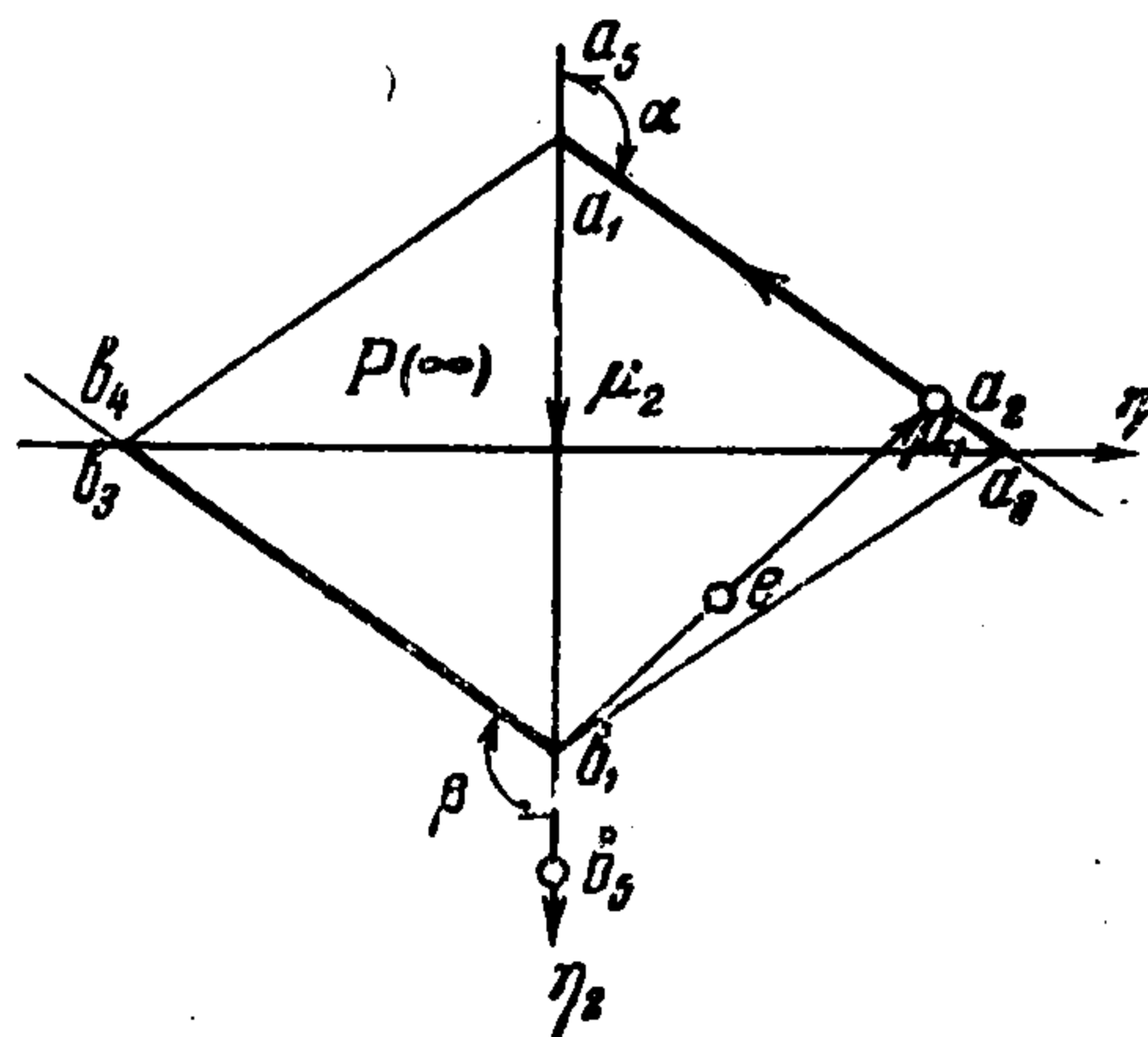
5°. В случае, когда $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$ кривая (2.4) совпадает с прямой $\eta_2 - 1 = -\lambda_1 \eta_1$. В остальном отличий нет.

6°. В случае, когда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$, то область $D(\infty)$ представляет собой параллелограмм a_1, a_3, b_1, b_3 (фиг. 6).

Всем точкам параллелограмма за исключением сторон $[b_3, a_1]$ и $[a_3, b_1]$ отвечает конечное время быстродействия. Из внешности параллелограмма или из точек этих сторон начало координат вообще] недостижимо. Быстродействие из внутренней точки изображается ломаной e, a_2, a_1, O .



Фиг. 5



Фиг. 6

7°. В случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то параллелограмм $D(\infty)$ превратится в полосу $\eta_2 \leq 1$. Попадание в начало координат возможно из любой точки полосы за исключением полупрямых

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 < 0; \quad \eta_2 = -1, \quad \eta_2 > 0$$

3. Приступим теперь к построению оптимальных управлений.

3.1. Выбор управления u° . Пусть некоторое состояние системы

$$\eta_1(\tau) = x(\tau) / \xi(\tau), \quad \eta_2(\tau) = \dot{x}(\tau) / \xi(\tau), \quad \xi(\tau) > 0$$

лежит внутри или на границе областей $D(t_2)$ в случаях $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ или внутри или на границе областей достижимости в случаях $4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 7^\circ$.

В качестве управления u° примем быстродействие w° , построенное с учетом «намерений» точки B

$$u^\circ = w^\circ \left[\frac{x(\tau)}{\xi(\tau) + |v_1|}, \quad \frac{\dot{x}(\tau) + v_1}{\xi(\tau) + |v_1|} \right], \quad v_1 = \int_{\tau}^{\tau+0} v dt$$

Для всех остальных возможных ситуаций $\eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \xi(\tau)$ положим управление u° тождественным нулем.

3.2. Выбор управления v° .

3.2.1. Если $\xi(\tau) > 0$ и точка находится вне внутренности углов α, β и сторон $[a_1, a_5), [b_1, b_5)$, то $v^\circ \equiv 0$.

3.2.2. Если $\xi(\tau) > 0$ и точка находится внутри углов α или β или на сторонах $[a_1, a_5), [b_1, b_5)$, то управление v° — импульсное и реализует весь запас $v(\tau)$.

Из предыдущего ясно, что скачок изображающей точки из положения e подбором знака импульса v_1 может быть направлен по одному из двух направлений ea_1 или eb_1 . В соответствии с этим скачок из угла α или стороны $[a_1, a_5)$ направим к точке a_1 , а скачок из угла β или стороны $[b_1, b_5)$ направим к точке b_1 .

3.2.3. Если $\xi(\tau) = 0$, то будем считать, что изображающая точка находится в бесконечности на луче

$$\eta_1(r) = sx(\tau), \quad \eta_2(\tau) = s\dot{x}(\tau), \quad 0 \leq s \leq \infty$$

Если этот луч не пересекает границы углов α или β , то положим, согласно 3.2.1, $v^\circ \equiv 0$, если же он пересекает границу одного из углов, то управление выберем, согласно 3.2.2.

3.2.4. Если $\xi(\tau) < 0$, то положим $v^\circ \equiv 0$ во всех точках, кроме внутренности углов α_1 и β_1 , вертикальных по отношению к углам α, β .

Из внутренности этих углов положим уравнение v° импульсным, реализующим весь запас. Направление скачка выберем к точке a_1 из угла α_1 и к точке b_1 из угла β_1 .

После того как построение управлений u°, v° для всевозможных ситуаций, могущих возникнуть в процессе преследования, закончено, доказательство их оптимальности начнем с леммы.

Лемма 3.3. Если при $t = \tau$ реализуется какое-либо состояние

$$x(\tau), \quad \dot{x}(\tau), \quad \xi(\tau)$$

лежащее внутри углов α, β или на сторонах $(a_1, a_5) (b_1, b_5)$ (за исключением точек a_1, b_1), либо если при $t = \tau$ реализуется состояние $\xi(\tau) < 0$ внутри углов α_1, β_1 , то в результате импульсного управления v° , давае-

мого правилами п.п. 3.2.2, 3.2.3, в момент $\tau + 0$ реализуется состояние

$$x(\tau + 0), \quad x'(\tau + 0), \quad \xi(\tau_0 + 0)$$

такое, что ни при каком управлении $u[x(\tau), x'(\tau) + v(\tau), \xi(\tau) + |v(\tau)|]$ при $t \geq \tau$ преследование в случае 1° не может быть закончено ранее чем к моменту $\tau + t_2$ и не может быть закончено вообще во всех остальных случаях 2°—7°.

Доказательство. Положим вначале $\xi(\tau) > 0$ и положим, не уменьшая общности, что $\eta_2(\tau) < 0$ и точка $e[\eta_1(\tau), \eta_2(\tau)]$ лежит в угле α . Скачок $v(\tau)$ приведет к изменению координат (фиг. 7)

$$\Delta\eta_1 = \frac{\eta_1(\tau)|v(\tau)|}{\xi(\tau) + |v(\tau)|}, \quad \Delta\eta_2 = \frac{1 - \eta_2(\tau)\text{sign}|v(\tau)|}{\xi(\tau) + |v(\tau)|}$$

полагая $v(\tau) > 0$, получим смещение из точки $e[\eta_1(\tau), \eta_2(\tau)]$ вдоль прямой

$$\frac{|\eta_2 - 1|}{\eta_2(\tau) - 1} = \frac{|\eta_2|}{\eta_2(\tau)}$$

по направлению к точке a_1 в точку e' на величину

$$[\Delta\eta_1^2 + \Delta\eta_2^2]^{1/2} = \frac{|v(\tau)|}{\xi(\tau) + |v(\tau)|} (ea_1) < (ea_1)$$

т. е. после скачка, точка останется внутри угла α . Попадание в $(0, 0)$ из угла α требует времени, заведомо большего, чем t_2 в случае 1°, а в остальных случаях вообще невозможно. Если $\xi(\tau) = 0$, то будем считать изображающую точку находящейся внутри угла α , если точка с координатами

$$\eta_1(\varepsilon) = x(\tau)/\varepsilon; \quad \eta_2 = x'(\tau)/\varepsilon$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет находиться внутри угла α . Разбивая импульс $v(\tau)$ на два: $v(\tau) = \varepsilon + (v(\tau) - \varepsilon)$, получим вначале реализацию положения точки внутри угла α , а затем ее скачок во внутреннюю точку угла. Если точка лежит в угле β_1 и $\xi(\tau) < 0$, то, полагая $v_1 = -v(\tau) < 0$, получим скачок из точки $e[\eta_1(\tau), \eta_2(\tau)]$

$$\Delta\eta_1 = \frac{\eta_1(\tau)|v(\tau)|}{\xi(\tau) + |v(\tau)|}, \quad \Delta\eta_2 = \frac{1 + \eta_2(\tau)}{\xi(\tau) + |v(\tau)|}$$

вдоль прямой

$$\frac{|\eta_0 + 1|}{\eta_2(\tau) + 1} = \frac{|\eta_2|}{\eta_2(\tau)}$$

по направлению e, b_1 в точку e'' , причем величина скачка удовлетворяет неравенству

$$(\Delta\eta_1^2 + \Delta\eta_2^2)^{1/2} = \frac{|v(\tau)|}{|\xi(\tau) + |v(\tau)||} (eb_1) > (eb_1)$$

и, следовательно, изображающая точка попадет внутрь угла β . Отсюда достижение начала координат возможно только через время, большее t_2 в случае 1° и невозможно в остальных случаях. Доказательство закончено.

Приступим к доказательству основной теоремы.

Теорема 3.4. В теореме содержатся четыре утверждения.

3.4.1. Если изображающая точка помещена в начальные условия $x(\tau_0), x'(\tau_0), \xi(\tau_0) > 0$ такие, что ее положение на плоскости $\eta_1 \eta_2$ находится внутри области $D(t_2)$ в случае 1° или внутри областей достижимости в случаях 2°—7° и если преследователь придерживается оптимального управления

$$u^\circ(\tau) = w^\circ \left[\frac{x(\tau)}{\xi(\tau) + |v_1|}, \quad \frac{x'(\tau) + v_1}{\xi(\tau) + |v_1|} \right] \quad (3.1)$$

то при любом управлении v , таком, что u° совпадает по знаку с v и в том числе при $v = v^\circ = 0$ (во всех точках, кроме a_1, b_1) встреча реализуется в одно и то же время

$$\tau_0 + T(u^\circ, v^\circ) = \tau_0 + T(u^\circ, v^\circ) = \tau_0 + T^\circ[\eta_1(\tau_0), \eta_2(\tau_0)] \quad (3.3)$$

где $T^\circ[\eta_1(\tau_0), \eta_2(\tau_0)]$ — время быстрогодействия в начало координат в задаче

$$x'' + bx' + cx = w, \quad \int_{\tau_0}^{\infty} |w| dt \leq \xi(\tau_0)$$

3.4.2. Если преследователь придерживается оптимального управления u° , а преследуемый реализует какое-либо управление v , противоположное по знаку управлению u° , и если при этом v и $u = 0$ реализовалась бы, некоторая траектория при $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + \varepsilon$ и на этом участке траектории реализовалась бы расход

$$\int_{\tau_1}^{\tau_1 + \varepsilon} |v| dt = v_\varepsilon$$

а в конце траектории реализовались бы значения

$$\eta_1(\tau_1 + \varepsilon) = \frac{x(\tau_1 + \varepsilon)}{\xi(\tau_1) + |v_\varepsilon|}, \quad \eta_2(\tau_1 + \varepsilon) = \frac{x'(\tau_1 + \varepsilon) + v_\varepsilon}{\xi(\tau_1) + |v_\varepsilon|}$$

то встреча произойдет заведомо не позже, чем при $\tau_0 + T[\eta_1(\tau_0), \eta_2(\tau_0)]$ и момент встречи будет удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} \tau_0 + T[u^\circ, v] &\leq \tau_1 + \varepsilon + T\left[\frac{x(\tau_1 + \varepsilon)}{\xi(\tau_1) + |v_1|}, \frac{x'(\tau_1 + \varepsilon) + v_1}{\xi(\tau_1) + |v_1|}\right] < \\ &< \tau_0 + T^\circ[\eta_1(\tau), \eta_2(\tau_0)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.4.3. Если преследуемый придерживается оптимального управления v° , а преследователь отклоняется от оптимального и реализует $u \neq u^\circ$, но так, чтобы изображающая точка все время оставалась внутри области $D(t_2)$ в случае 1° и в областях достижимости в случаях $2^\circ - 7^\circ$, то время преследования заведомо больше оптимального

$$\tau_0 + T(u, v^\circ) > \tau_0 + T^\circ[\eta_1(\tau_0), \eta_2(\tau_0)] \quad (3.4)$$

и будет равно оптимальному только в том случае, если управление u отклоняется от оптимального на множестве меры нуль на оптимальной траектории.

3.4.4. Если неоптимальное управление u выводит изображающую точку за пределы области $D(t_2)$ в случае 1° , либо реализует неравенство $\xi(\tau_1) < 0$, а преследуемый придерживается оптимального управления v° , то встреча произойдет заведомо позднее, чем при $\tau_0 + t_2$

$$\tau_0 + T(u, v^\circ) > \tau_0 + t_2 \quad (3.5)$$

3.4.5. Если в случаях $2^\circ - 7^\circ$ неоптимальное управление « u » выводит изображающую точку за пределы области достижимости, либо реализует неравенство $\xi(\tau_1) < 0$, то при оптимальном $v = v^\circ$, $\tau \geq \tau_1$ встреча объектов вообще невозможна.

Приступим к доказательству утверждений теоремы.

3.4.4. *Доказательство.* Пусть в случае 1° реализовалось условие $\xi(\tau_1) < 0$ и изображающая точка находится внутри угла b_3, a_1, a_5 (фиг. 8), дополняющего угол α до π . Можно как и в лемме 3.3 показать, что любой допустимый скачок μ_1 , направленный к точке a_1 , оставит изображающую точку внутри этого угла. Любой непрерывный участок кривой, находящийся в третьем квадранте внутри угла b_3, a_1, a_5 , не может привести к реализации равенства $\eta_1 = 0$, потому что знаки x и x' в этом квадранте совпадают. Непрерывный участок внутри угла θ , очевидно, также не реализует равенство $\eta_1 = 0$. Следовательно, либо встреча вообще не реализуется, либо точка переходит внутрь угла α_1 . Из угла α_1 импульсное управление v° переносит точку согласно лемме внутрь угла α и после этого встреча не может состояться ранее, чем через t_2 .

Пусть реализовалось состояние $\xi(\tau_1) > 0$ и точка $e_1[\eta_1(\tau_1), \eta_2(\tau_2)]$ находится внутри угла b_1, a_1, a_4 и вне области $D(t_2)$. Как и в предыдущем случае легко показать, что если точка все время остается внутри угла b_5, b_1, a_3 , то встреча не может реализоваться. Если точка перейдет внутрь полосы a_4, a_1, b_1, a_3 , то любое управление u может только увеличить расстояние $a_1 m$ от точки a_1 до точки m пересечения кривой e, m с прямой a_1, a_4 .

Кривая e, m — это интегральная линия, которая реализуется при $t > \tau_1$, если при $\tau > \tau_1$, положить $u(\tau) = 0$. На (фиг. 8) изображена также кривая $e_1' m$, которая реализуется, если при $\tau = \tau_1$ реализовать малый импульс μ_1 управления u , а затем выключать его. Это значит, что при любом управлении u , оставляющем $\xi(\tau) > 0$, встреча либо вообще не осуществится, либо изображающая точка еще до встречи попадет внутрь угла α и импульсное управление v° приведет к ситуации, после которой встреча возможна только по истечении времени большего, чем t_2 . Если же из точки внутри угла b_5, a_1, a_4 преследователь реализует импульс μ_1 , приводящий к состоянию $\xi(\tau_1) - |\mu_1| < 0$, то изображающая точка скачком перейдет в левую полуплоскость. Последствия этого скачка приведут к ситуации $\xi(\tau_1 + 0) < 0$, которая обследована выше.

3.4.5. *Доказательство.* В случаях $2^\circ - 7^\circ$ при $\xi(\tau_1) < 0$ доказательство полностью повторяет 3.4.4. Разница заключается только в том, что импульс $v(\tau_1)$, приводящий точку внутрь угла α исключает возможность встречи в дальнейшем. Если $\xi(\tau_1) > 0$ и точка $e[\eta_1(\tau_1), \eta_2(\tau_1)]$ лежит снаружи областей достижимости в случаях $2^\circ, 3^\circ$, то доказательство повторяет 3.4.4, с той же разницей в смысле конечного вывода.

В случае 4° точка при $\eta_1(\tau_1) > 0$, помещенная во внешность области достижимости и вне угла α , обязательно попадет внутрь угла b_5, b_1, a_3 , и его она вообще не покинет при любом управлении u , оставляющем $\xi(\tau) \geq 0$. Аналогичным свойством обладают внешности областей достижимости в случаях $5^\circ - 7^\circ$ при $\xi(\tau) \geq 0$.

На этом заканчивается доказательство теоремы 3.4.

Не следует, однако, думать, что управление v° , заданное правилами 3.2.2, 3.2.3, является единственным в смысле своих конечных результатов, т. е. максимально возможного затягивания времени встречи.

В случаях ($2^\circ - 7^\circ$) лучшего управления, очевидно, не существует. В случае 1° оно не является наилучшим, так как дает затяжку встречи на величину t_2 , которая явно не является максимальной из всех возможных.

Действительно пусть в начальный момент реализовались условия

$$\mu(\tau_0) > v(\tau_0), \quad x(\tau_0) = 0, \quad x'(\tau_0) > \mu(\tau_0)$$

т. е.

$$\eta_1(\tau_0) = 0, \quad \xi(\tau_0) > 0, \quad \eta_2(\tau_0) > 1, \quad \eta_2'(\tau_0) = x'(\tau_0) / \mu(\tau_0)$$

Так как $\eta_2(\tau_0) < \eta_2'(\tau_0)$, то время быстрогодействия с запасом $\mu(\tau_0)$ будет меньше времени быстрогодействия с запасом $\xi(\tau_0)$, но больше t_2 ,

так как точка $(0, \eta_2')$ лежит снаружи области $D(t_2)$

$$t_2 < T^\circ [0, \eta_2'] < T^\circ [0, \eta_2(\tau_0)]$$

Если, придерживаясь рекомендации 3.2.2, осуществить импульс $v(\tau_0) > 0$, то при $\tau = \tau_0 + 0$ реализуются условия

$$\eta_1(\tau_0 + 0) = 0, \quad \eta_2(\tau_0 + 0) = \eta_2'(\tau_0)$$

и время быстрогодействия делается равным $T^\circ [0, \eta_2'(\tau_0)]$. Откажемся от правила 3.2.2 и изберем другую тактику, а именно, при $\xi(\tau) \geq 0$ положим $v \equiv 0$, а при $\xi(\tau) < 0$ положим $v = 0$ всюду, кроме отрезка оси $\eta_1 = 0$, $0 < |\eta_2| \leq 1$. Внутри этого отрезка можно положить v импульсным и направленным к точке b_1 . При $\xi(\tau) \geq 0$ встреча не сможет осуществиться ранее, чем к моменту

$$\tau_0 + T^\circ [0, \eta_2(\tau_0)]$$

Если же $\xi(\tau)$ делается меньше нуля, то изображающая точка сможет попасть внутрь или на границу отрезка $\eta_1 = 0$, $0 < |\eta_2| \leq 1$ за время не меньшее, чем $T^\circ [0, \eta_2(\tau_0)]$.

Однако импульсное управление $v(\tau)$ в этом случае «выбросит» изображающую точку на ось $\eta_1 = 0$, причем обязательно за точку b_1 , т. е. во внешность области $D(t_2)$ и, следовательно, встреча произойдет не ранее, чем через время t_2 после этого «броска». В итоге, если точка B следует предложенному управлению v , то встреча состоится во всяком случае не раньше, чем в момент

$$\tau_0 + \max [T^\circ [0, \eta_2(\tau_0)], t_2 + T^\circ [0, \eta_2'(\tau_0)]]$$

Это управление также не является, вообще говоря, оптимальным. Построение оптимальных управлений u° и v° в случае 1° во внешности области $D(t_2)$ выходит за рамки настоящей статьи.

Поступила 10 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 4.
2. Красовский Н. Н. К задачам преследования в случае линейных однотипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
4. Мархашов Л. М., Плотникова Г. В., Пожарицкий Г. К. Импульсные быстрогодействия в линейных системах второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.