Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская

(Ленинград)

В работе рассматривается техника решения краевых задач теории потенциала и теории упругости для однополостных гиперболоидов вращения, основанная на применении интегрального представления, родственного известному разложению Мелера—Фока.

Введение. Краевые гармонические задачи для гиперболоидов вращения и приводящиеся к ним задачи теории упругости относятся к классу задач с разделяющимися переменными, и решение их не представляет принципиальных трудностей.

Несмотря на это, в литературе детально исследован лишь случай двухполостных гиперболоидов [1-4], а соответствующие задачи, относящиеся к областям, ограниченным поверхностью однополостного гиперболоида, фактически не рассматривались. Причина этого обстоятельства заключается, по-видимому, в недостаточной разработке математического аппарата, связанного с решением задач данного типа. Существенную часть этого аппарата составляет теорема о разложении произвольной функции $f(x)$, определенной на промежутке $(-\infty, \infty)$, в интеграл по сферическим функциям

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\left\{\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)+P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)+P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2}\,dy+\right.$$
$$\left.+\frac{P_{-1/2+i\tau}(ix)-P_{-1/2+i\tau}(-ix)}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{P_{-1/2+i\tau}(iy)-P_{-1/2+i\tau}(-iy)}{2i}\,dy\right\}d\tau \qquad (0.1)$$
$$(-\infty<x<\infty)$$

недавно доказанная авторами [5][1].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы, основываясь на этой теореме, получить решение некоторых задач математической физики и теории упругости.

Результаты работы могут быть использованы при рассмотрении широкого класса краевых задач для однополостных гиперболоидов.

§ 1. Задача Дирихле для однополостного гиперболоида вращения.

Пусть (α, β, φ) — система криволинейных координат, связанных с системой цилиндрических координат (r, z, φ) соотношениями

$$r = c \operatorname{ch}\alpha \sin\beta, \qquad z = c \operatorname{sh}\alpha \cos\beta \qquad (-\infty<\alpha<\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1/2\pi) \qquad (1.1)$$

---

[1] Теорема справедлива для функций, удовлетворяющих условиям:

1) Функция $f(x)$ — непрерывна и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке $(-\infty, \infty)$ (за исключением, быть может, произвольно малой окрестности конечного числа точек).

2) $f(x)\,|x|^{-1/2}\ln(1+|x|)\in L(-\infty, -a), \qquad f(x)\in L(-a, a)$
$f(x)\,x^{-1/2}\ln(1+x)\in L(a, \infty), \qquad a>0$

Уравнение Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{ch}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}+\left(\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (1.2)$$

и допускает бесконечное множество частных решений[1]

$$u=u_\tau(\alpha,\beta)=[A(\tau)P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+B(\tau)P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)]\times$$
$$\times[C(\tau)P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)+D(\tau)P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta)] \qquad (0\leqslant\tau<\infty) \qquad (1.3)$$

где $P_\nu(z)$ — сферическая функция Лежандра первого рода.

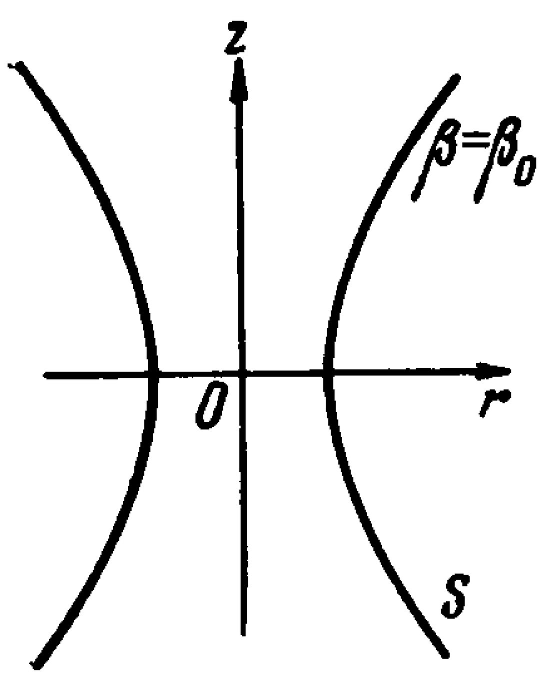
При рассмотрении внутренней задачи Дирихле необходимо выбрать решения, ограниченные на оси симметрии $r=0$. Эти решения будут

$$u=u_\tau(\alpha,\beta)=[M(\tau)P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+N(\tau)P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)]\,P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)$$
$$(-\infty<\alpha<\infty,\ 0\leqslant\beta<{}^1/_2\pi,\ 0\leqslant\tau<\infty) \qquad (1.4)$$

В случае внешней задачи Дирихле подходящие решения выбираются из условия ограниченности $\operatorname{grad} u$ на линии $r=c,\ z=0$ и имеют вид

$$u=u_\tau(\alpha,\beta)=$$
$$=M(\tau)[P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)][P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)+P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta)]+$$
$$+N(\tau)[P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)-P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)][P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)-P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta)]$$
$$(-\infty<\alpha<\infty,\ 0<\beta\leqslant{}^1/_2\pi,\ 0\leqslant\tau<\infty) \qquad (1.5)$$

Внутренняя задача Дирихле для гиперболоида вращения $\beta=\beta_0$ (фигура) формулируется следующим образом.



Найти функцию u, гармоническую в области $0\leqslant\beta<\beta_0$, непрерывную в замкнутой области $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$, удовлетворяющую граничному условию

$$u=f(\operatorname{sh}\alpha) \qquad \text{при } \beta=\beta_0 \qquad (1.6)$$

и условию на бесконечности

$$u\to 0 \qquad \text{при } |\alpha|\to\infty \qquad (1.7)$$

равномерно относительно β.

Предполагается, что заданная функция $f(\operatorname{sh}\alpha)$ непрерывна в открытом интервале $(-\infty,\infty)$, и стремится к нулю при $|\alpha|\to\infty$.

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда $f(\operatorname{sh}\alpha)$ — четная функция[2] α, и будем искать решение в форме

$$u=2\int_0^\infty\frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}F(\tau)\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)}\frac{P_{-1/2-i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}d\tau$$
$$(-\infty<\alpha<\infty,\ 0\leqslant\beta<\beta_0) \qquad (1.8)$$

где $F(\tau)$ — коэффициент, подлежащий определению.

---

[1] В дальнейшем рассматривается случай, когда функция u не зависит от координаты φ.

[2] Случай, когда $f(\operatorname{sh}\alpha)$—нечетная функция α, может быть рассмотрен аналогичным образом. Исследование общего случая производится путем разложения задачи на симметричную и антисимметричную.

Подставляя (1.8) в граничное условие (1.6), находим

$$f(\operatorname{sh}\alpha)=2\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}F(\tau)\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}d\tau \qquad (-\infty<\alpha<\infty) \qquad (1.9)$$

откуда по формуле обращения, следующей из (0.1), получаем

$$F(\tau)=\int_0^\infty f(\operatorname{sh}\alpha)\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}\operatorname{ch}\alpha\, d\alpha \qquad (1.10)$$

Равенства (1.8) и (1.10) дают формальное решение поставленной задачи.

Для строгого обоснования полученного результата предположим, что заданная функция $f(\operatorname{sh}\alpha)$ допускает представление в виде интеграла (1.9) с $F(\tau)$, определяемой равенством (1.10), причем

$$\sqrt{\tau}\, e^{-1/2\pi\tau}F(\tau)\in L(0,\infty) \qquad (1.11)$$

Тогда из оценок

$$\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)}\leqslant 1 \qquad (0\leqslant\beta\leqslant\beta_0) \qquad (1.12)$$

$$\left|\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}\right|\leqslant\left(\frac{\operatorname{sh}\pi\tau}{\pi\tau}\right)^{1/2}\frac{P_{-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}$$

$$(-\infty<\alpha<\infty) \qquad (1.13)$$

следующих из определения сферических функций, вытекает, что

$$2\int_0^\infty\left|\frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}F(\tau)\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)}\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{P_{-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}\int_0^\infty\sqrt{\tau}\,e^{-1/2\pi\tau}|F(\tau)|\,d\tau \qquad (1.14)$$

т. е. интеграл (1.8) сходится абсолютно.

В последней оценке множитель, зависящий от α, ограничен при любом α, поэтому сходимость интеграла (1.8) равномерна во всякой замкнутой области D $(-A\leqslant\alpha\leqslant A,\ 0\leqslant\beta\leqslant\beta_0)$, A — произвольно большое фиксированное число.

Принимая во внимание, что подынтегральное выражение является гармонической функцией в D, и воспользовавшись теоремой Гарнака, заключаем, что u — гармоническая в D, и, следовательно, ввиду произвольности A,— гармоническая функция внутри гиперболоида $\beta=\beta_0$.

Из равномерной сходимости вытекает также возможность осуществить предельный переход $\beta\to\beta_0$ под знаком интеграла (1.8). Поэтому

$$u|_{\beta=\beta_0}=2\int_0^\infty\frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}F(\tau)\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}d\tau=f(\operatorname{sh}\alpha)$$

на основании равенства (1.9).

Наконец, из неравенства (1.14) следует, что

$$u=O(1)\frac{P_{-1/2}(i\operatorname{sh}\alpha)+P_{-1/2}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}\to 0, \qquad |\alpha|\to\infty$$

равномерно относительно β.

Таким образом, функция u, определенная равенством (1.8), удовлетворяет всем поставленным условиям и является решением задачи Дирихле.

§ 2. Электростатическая задача о распределении зарядов, индуцированных на поверхности проводящего гиперболоида. В качестве второго примера вычислим поле точечного заряда q, помещенного в точке $r = z = 0$ на оси полого проводящего гиперболоида. Если представить потенциал u в виде

$$u = \frac{q}{\sqrt{r^2 + z^2}} - u_1 \tag{2.1}$$

то определение u_1 сводится к решению рассмотренной выше задачи Дирихле с граничным условием

$$u_1 \mid_{\beta=\beta_0} = f(\operatorname{sh}\alpha) = \frac{q}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0}} \tag{2.2}$$

Функция $f(\operatorname{sh}\alpha)$ удовлетворяет условиям теоремы разложения (0.1) и, следовательно, допускает представление в виде интеграла (1.9). Выполнив необходимые вычисления, находим

$$F(\tau) = \frac{q}{c}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0}} \frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2}\operatorname{ch}\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{\pi q}{c}\frac{P_{-1/2+i\tau}(0)}{\operatorname{ch}\pi\tau}\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0) + P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta_0)}{2} \tag{2.3}$$

Отсюда[1]

$$\frac{q}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0}} = \frac{\pi q}{c}\int_0^\infty \frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(0) \times$$

$$\times [P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0) + P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta_0)]\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau \tag{2.4}$$

$$(-\infty < \alpha < \infty)$$

Из асимптотического поведения сферических функций при $\tau \to \infty$ следует, что

$$\sqrt{\tau}\, e^{-1/2\pi\tau} F(\tau) = O(\tau^{-1/2} e^{-\beta_0\tau})$$

поэтому условие (1.11) в данном случае оказывается выполненным.

Воспользовавшись (1.8), находим

$$u_1 = \frac{\pi q}{c}\int_0^\infty \frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(0)[P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0) + P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta_0)] \times$$

$$\times \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)}\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i\operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau \qquad \left(\begin{matrix}-\infty < \alpha < \infty \\ 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0\end{matrix}\right) \tag{2.5}$$

Если представить потенциал первичного поля в виде интеграла (1.8), где β_0 заменено на произвольное β $(0 < \beta \leqslant 1/2\pi)$, то разложение, аналогичное (2.5), полу-

[1] Вывод формулы (2.3) довольно сложен, поэтому приводим лишь окончательный результат вычислений.

чается также для полного потенциала u

$$u=\frac{\pi q}{c}\int\limits_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}^2\,\pi\tau}\,P_{-1/2+i\tau}(0)\times$$
$$\times\frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)\,P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta)-P_{-1/2+i\tau}(-\cos\beta_0)\,P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)}\times$$
$$\times\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2}\,d\tau\qquad\begin{pmatrix}-\infty<\alpha<\infty\\ 0<\beta\leqslant\beta_0\end{pmatrix}\tag{2.6}$$

Формулы (2.5), (2.6) дают решение поставленной задачи.

Плотность индуцированных зарядов, распределенных на внутренней поверхности гиперболоида, может быть вычислена по формуле

$$\sigma=\frac{1}{4\pi c}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,\alpha-\sin^2\beta_0}}\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=\beta_0}\tag{2.7}$$

Подставляя (2.6), имеем

$$\sigma=-\frac{q}{2\pi c^2\sin\beta_0}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,\alpha-\sin^2\beta_0}}\int\limits_0^\infty\frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\times$$
$$\times\frac{P_{-1/2+i\tau}(0)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)}\,\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2}\,d\tau\tag{2.8}$$
$$(-\infty<\alpha<\infty)$$

В частном случае $\beta_0={}^1/_2\,\pi$, когда гиперболоид вырождается в плоскость $z=0$ с круговым отверстием радиуса c, интеграл (2.8) может быть выражен через элементарные функции. После некоторых вычислений получаем

$$\sigma=-\frac{q}{2\pi^2c^2\,|\,\mathrm{sh}\,\alpha\,|\,\mathrm{ch}^2\,\alpha}=-\frac{qc}{2\pi^2r^2\sqrt{r^2-c^2}}\tag{2.9}$$

§ 3. **Задача о кручении вала, имеющего форму гиперболоида вращения.** Рассмотрим задачу о кручении вала, имеющего форму гиперболоида вращения, на поверхности S которого приложены внешние силы, распределенные с плотностью

$$\mathbf{p}=p\,(N)\cdot\mathbf{i}_\varphi,\qquad N\in S\tag{3.1}$$

В рассматриваемом случае составляющие вектора смещения будут

$$u=0,\qquad v=v\,(r,\,z),\qquad w=0$$

где v удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,r\,\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\,v=0\tag{3.2}$$

и граничному условию

$$r\,\frac{d}{dn}\,\frac{1}{r}\,v\,\bigg|_S=\frac{p}{G}\tag{3.3}$$

$\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, G — модуль сдвига[1].

Функция $p=p\,(N)$ должна быть подчинена условию

$$\iint\limits_S r\,p\,(N)\,ds=0\tag{3.4}$$

физическое значение которого заключается в равенстве нулю полного момента сил, действующих на вал.

[1] См., например, [6].

После определения функции v составляющие тензора напряжений находятся по формулам

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{r\varphi} = Gr \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} v, \quad \tau_{\varphi z} = G \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{zr} = 0 \tag{3.5}$$

Вводя криволинейные координаты (α, β, φ) при помощи равенств (1.1), получаем

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha} \frac{\partial}{\partial\alpha} \operatorname{ch}\alpha \frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial\beta} \sin\beta \frac{\partial v}{\partial\beta} - \left(\frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right) v = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} \frac{1}{\sin\beta} v \Big|_{\beta=\beta_0} = \frac{c\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha - \sin^2\beta_0}}{\sin\beta_0} \frac{p(\alpha)}{G} \tag{3.7}$$

В дальнейшем примем, что $p(\alpha)$ — нечетная функция α, достаточно быстро убывающая на бесконечности.

Равенство (3.4) оказывается тогда выполненным, и задача о кручении сводится к отысканию решения уравнения (3.6), регулярного в области $0 \leqslant \beta < \beta_0$, удовлетворяющего граничному условию (3.7) и исчезающего на бесконечности.

Применяя метод Фурье, будем искать это решение в форме

$$v = \int_0^\infty M(\tau) P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\beta) \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau \tag{3.8}$$

где $P_\nu^m(z)$ — присоединенная функция Лежандра[1].

Подставляя (3.8) в условие (3.7), получаем

$$c\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha - \sin^2\beta_0} \frac{p(\alpha)}{G} = \int_0^\infty M(\tau) P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0) \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau$$

$$(-\infty < \alpha < \infty) \tag{3.9}$$

Последнее равенство может быть записано в виде

$$\frac{c}{G} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\alpha} \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha' - \sin^2\beta_0}\, p(\alpha')\, d\alpha' =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty M(\tau) P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0) \frac{P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau \tag{3.10}$$

и, очевидно, удовлетворится, если выбрать $M(\tau)$ из условия

$$f(\operatorname{sh}\alpha) = \frac{c}{G} \int_{-\infty}^{\alpha} \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha' - \sin^2\beta_0}\, p(\alpha')\, d\alpha' =$$

$$= \int_0^\infty M(\tau) P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0) \frac{P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau \tag{3.11}$$

$$(-\infty < \alpha < \infty)$$

Воспользовавшись теоремой (0.1), находим (3.12)

$$M(\tau) = \frac{2\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} \frac{1}{P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)} \int_0^\infty f(\operatorname{sh}\alpha) \frac{P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} \operatorname{ch}\alpha\, d\alpha$$

Применим выведенные общие формулы к решению задачи о кручении вала двумя сосредоточенными моментами $\pm M_0$, приложенными вдоль окружностей $\alpha = \pm\alpha_0$, $\beta = \beta_0$.

---

[1] Легко видеть, что подынтегральное выражение в (3.8) является частным решением уравнения (3.6), регулярным в области $0 \leqslant \beta < \beta_0$ и нечетным относительно α.

В рассматриваемом случае

$$p(\alpha) = \pm p_0 \delta(\alpha \mp \alpha_0) \qquad (\alpha \gtrless 0) \tag{3.13}$$

$$p_0 = \frac{M_0}{2\pi c^3 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 \sin^2 \beta_0 \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha_0 - \sin^2 \beta_0}}$$

где $\delta(x)$ — дельта функция.

Соответствующее выражение функции $f(\operatorname{sh}\alpha)$ будет

$$f(\operatorname{sh}\alpha) = -\frac{M_0}{2\pi G c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_0 \sin^2 \beta_0} \qquad (-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0) \tag{3.14}$$

вне указанного интервала функции $f(\operatorname{sh}\alpha) = 0$.

Подставляя (3.14) в (3.12) и принимая во внимание равенство

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{P_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} \operatorname{ch}\alpha \, d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{1/4 + \tau^2} \operatorname{ch}\alpha_0 \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha_0) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha_0)}{2} \tag{3.15}$$

получаем

$$M(\tau) = \frac{M_0}{\pi G c^2 \operatorname{ch}\alpha_0 \sin^2 \beta_0} \frac{\tau}{1/4 + \tau^2} \frac{\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} \times$$

$$\times \frac{1}{P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)} \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha_0) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha_0)}{2} \tag{3.16}$$

Отсюда следует

$$v = \frac{M_0}{\pi G c^2 \operatorname{ch}\alpha_0 \sin^2 \beta_0} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{(1/4 + \tau^2)\operatorname{ch}\pi\tau} \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)} \times$$

$$\times \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha_0) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha_0)}{2} \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha)}{2} d\tau$$

$$(-\infty < \alpha < \infty, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0) \tag{3.17}$$

Легко проверить, что полученное формальное решение (3.17) удовлетворяет всем условиям задачи.

Вычислим еще распределение касательных напряжений в сечении $z = 0$. Воспользовавшись (3.5) и (3.17), имеем

$$\tau_{\varphi z}|_{z=0} = -\frac{M_0}{\pi c^3 \operatorname{ch}\alpha_0 \sin^2\beta_0 \cos\beta} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{-1/2+i\tau}(0) \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)}{P^2_{-1/2+i\tau}(\cos\beta_0)} \times$$

$$\times \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha_0) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha_0)}{2} d\tau \qquad (0 \leqslant \beta < \beta_0) \tag{3.18}$$

В предельном случае $\beta_0 = 1/2\,\pi$ (задача о кручении пространства с внешним круговым надрезом, по сторонам которого приложены моменты $\pm M_0$) интеграл (3.18) может быть вычислен в замкнутой форме. В этом случае

$$\tau_{\varphi z}|_{z=0} = -\frac{M_0}{\pi c^3 \operatorname{ch}\alpha_0 \cos\beta} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{(1/4 + \tau^2)\operatorname{ch}\pi\tau} P^1_{-1/2+i\tau}(\cos\beta) \times$$

$$\times \frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i \operatorname{sh}\alpha_0) + P^1_{-1/2+i\tau}(-i \operatorname{sh}\alpha_0)}{2} d\tau \qquad (0 \leqslant \beta < 1/2\,\pi) \tag{3.19}$$

Если воспользоваться формулами

$$\frac{P^1_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+P^1_{-1/2+i\tau}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2}\,\mathrm{ch}\,\alpha=$$

$$=-\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)P_{-1/2+i\tau}(0)\int_0^\alpha\frac{P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,t)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\alpha-\mathrm{sh}^2 t}}\,\mathrm{ch} t\,\mathrm{sh} t\,dt \qquad (3.20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 t+\cos^2\beta}}=\pi\int_0^\infty\frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}P_{-1/2+i\tau}(0)\,P_{-1/2+i\tau}(\cos\beta)\,P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch} t)\,d\tau \qquad (3.21)$$

то из (3.19) после некоторых преобразований следует

$$\tau_{\varphi z}\,|_{z=0}=\frac{M_0\,\mathrm{sh}\,\alpha_0\sin\beta}{\pi^2c^3\,\mathrm{ch}^2\alpha_0\cos\beta}\,\frac{1}{\mathrm{sh}^2\alpha_0+\cos^2\beta}=\frac{M_0\sqrt{r_0^2-c^2}}{\pi^2r_0^2}\,\frac{r}{(r_0^2-r^2)\sqrt{c^2-r^2}} \qquad (3.22)$$

где $r_0=c\,\mathrm{ch}\,\alpha_0$ — радиус окружности, вдоль которой приложены скручивающие моменты.

Возможность получить при помощи описанной техники решение большого числа задач математической физики делает весьма актуальным табулирование функций

$$\mathrm{Re}\,P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)+P_{-1/2+i\tau}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2}$$

$$\mathrm{Im}\,P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)-P_{-1/2+i\tau}(-i\,\mathrm{sh}\,\alpha)}{2i} \qquad \left(\begin{matrix}-\infty<\alpha<\infty\\ 0\leqslant\tau<\infty\end{matrix}\right)$$

Решение последней задачи представляет собой естественное продолжение работы по табулированию сферических функций комплексного индекса $\nu=-1/2+i\tau$, выполненной Вычислительным центром АН СССР [7,8].

Поступила 7 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е, переработ. и доп. М., Физматгиз, 1963.
2. Лебедев Н. Н. Решение проблемы Дирихле для гиперболоидов вращения. ПММ, 1947, т. 11, вып. 2.
3. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М., Гостехиздат, 1955.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
6. Солянник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. М.— Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1949.
7. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы функций Лежандра $P_{-1/2+i\tau}(x)$, т. 1, 2. М., Изд-во АН СССР, 1960—1962.
8. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы и формулы для сферических функций $P^m_{-1/2+i\tau}(z)$. М., Изд-во АН СССР, 1962.