Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

А. Н. Гузь, Г. Н. Савин

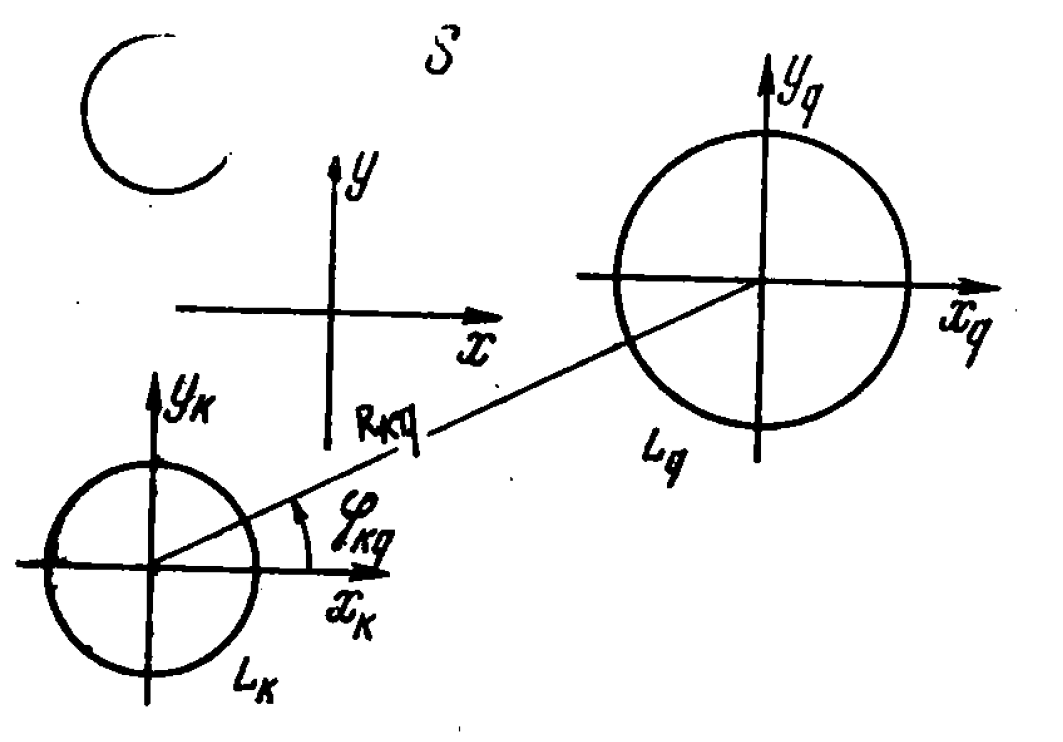
(Киев)

Для плоской задачи моментной теории упругости исследованы лишь задачи о концентрации напряжений около одного кругового отверстия [1-3].

В данной заметке предлагается метод решения плоских задач моментной теории упругости для плоскости, ослабленной конечным числом произвольно расположенных круговых несоприкасающихся отверстий. Показано, как задачи сводятся к бесконечным системам алгебраических уравнений. Получены основные неравенства и соотношения, необходимые для доказательства квазирегулярности бесконечных систем и единственности решения.

Подробно рассмотрена задача для двух равных круговых отверстий. При условии, что: 1) к контурам приложена самоуравновешенная нагрузка; 2) нормальная и касательная составляющие являются непрерывными функциями, первые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле и 3) распределенные моменты являются вместе с первыми производными непрерывными функциями, а вторая производная удовлетворяет условию Дирихле, доказана квазирегулярность и единственность решения полученной бесконечной системы алгебраических уравнений.

Запишем, следуя [1], основные уравнения плоской деформации моментной теории упругости в полярной системе координат [1].



Фиг. 1

Основные уравнения

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\left(\Delta - \frac{r_0^2}{l^2}\right)\psi = 0 \tag{1}$$

Уравнения совместности

$$\frac{\partial}{\partial r}(r_0^2 - l^2\Delta)\psi = -2(1-\nu)\, l^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta\varphi$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(r_0^2 - l^2\Delta)\psi = 2(1-\nu)\, l^2 \frac{\partial}{\partial r}\Delta\varphi \tag{2}$$

Напряжения определяются из следующих соотношений

$$\sigma_r = \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\varphi - \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\frac{1}{r}\psi, \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi + \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\frac{1}{r}\psi$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\frac{1}{r}\varphi - \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\psi$$
$$\tau_{\theta r} = -\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\frac{1}{r}\varphi + \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi \tag{3}$$
$$\mu_r = \frac{1}{r_0}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \mu_\theta = \frac{1}{r_0^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

Рассмотрим напряженное состояние бесконечной плоскости, ослабленной m-круговыми отверстиями (фиг. 1) радиуса r_0R_k ($k = 1, \ldots, m$).

[1] Все координаты и линейные размеры безразмерные, отнесенные к r_0.

С каждым из отверстий свяжем систему координат (x_k, y_k).

$$x+iy=z,\quad x_k+iy_k=z_k,\quad z_k=r_ke^{i\theta_k},\quad z=re^{i\theta}$$
$$z=z_k+l_k,\quad z_k=z_q+R_{kq}e^{i\varphi_{kq}}\qquad (k,q=1,\ldots,m) \tag{4}$$

Тогда решение задачи сводится к решению для m-связной области S, ограниченной контуром $L=L_1+\ldots+L_2$, уравнения (1), учитывая (2), когда на L заданы определенные величины. Следует заметить, что это решение должно удовлетворять условиям однозначности перемещений и условиям «на бесконечности», сводящимся к затуханию компонентов напряженного и деформированного состояния.

Решение уравнений (1) при условии (2) для m-связной области представим в виде:

$$\varphi=\sum_{q=1}^{m}A_0^{(q)}\ln r_q+\sum_{q=1}^{m}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\begin{matrix}A_p^{(q)}\\B_p^{(q)}\end{matrix}r_q^{-p}+\begin{matrix}C_p^{(q)}\\D_p^{(q)}\end{matrix}r_q^{-p+2}\right]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}p\theta_q \tag{5}$$

$$\psi=\sum_{q=1}^{m}F_0^{(q)}K\left(r_q\frac{r_0}{l}\right)+\sum_{q=1}^{m}\sum_{p=1}^{\infty}\begin{matrix}F_p^{(q)}\\B_p^{(q)}\end{matrix}K_p\left(r_q\frac{r_0}{l}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}p\theta_q\mp 8(1-\nu)l^2\times$$
$$\times\sum_{q=1}^{m}\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)\begin{matrix}D_p^{(q)}\\C_p^{(q)}\end{matrix}r_q^{-p}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}p\theta_q \tag{6}$$

Когда главный вектор и главный момент усилий, приложенных к каждому контуру, равен нулю, то условия однозначности перемещений и условия «на бесконечности» будут выполнены, если положить:

$$C_1^{(q)}\equiv D_1^{(q)}=0\qquad (q=1,\ldots,m) \tag{7}$$

Представим решение (5)—(6) в k-ой системе координат. Вначале займемся пересчетом гармонических и бигармонических функций. С этой целью рассмотрим функцию, аналитическую при $|z|<|\alpha|$ и разложим ее в ряд Тейлора при $|z|<|\alpha|$.

$$f(z,p,\alpha)=(\alpha-z)^{-p},\ (\alpha-z)^{-p}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!}\frac{1}{\alpha^{p+n}} \tag{8}$$

Положив здесь $\alpha=R_{kq}e^{i\varphi_{kq}}$ и $z=z_k$ (4), можно получить:

$$r_q^{-p}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}p\theta_q=\pm\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!}\frac{r_k^{\,n}}{R_{kq}^{p+n}}\left[\cos n\theta_k\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+p)\varphi_{kq}+\right.$$
$$\left.+\sin n\theta_k\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+p)\varphi_{kq}\right] \tag{9}$$

$$r_p^{-p+2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}p\theta_q=\pm\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-2)!}\frac{1}{R^{p+n-2}}\left[\frac{r_k^{\,n}}{p+n-1}-\frac{1}{R_{kq}^{\,2}}\frac{r_k^{\,n+2}}{n+1}\right]\times$$
$$\times\left[\cos n\theta_k\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+p)\varphi_{kq}+\sin n\theta_k\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+p)\varphi_{kq}\right]\pm(-1)^{p+1}\frac{r_k}{R_{kq}^{p-1}}\times$$
$$\times\left[\cos\theta_k\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(p-1)\varphi_{kq}+\sin\theta_k\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(p-1)\varphi_{kq}\right]\qquad (r_k<R_{kq}) \tag{10}$$

Для $\ln r_q$ имеем следующий ряд [4]. (11)

$$\ln r_q = \ln R_{kq} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_k}{R_{kq}}\right)^n (\cos n\theta_k \cos n\varphi_{kq} + \sin n\theta_k \sin n\varphi_{kq}) \qquad (r_k < R_{kq})$$

Из теоремы сложения для цилиндрических функций [5] можно получить: (12)

$$K_p(cr_q) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p\theta_q = (-1)^p \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(cr_k) \left\{\left[K_{p+n}(cR_{kq}) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} \pm \right.\right.$$

$$\left. \pm K_{p-n}(cR_{kq}) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n-p)\varphi_{kq}\right] \cos n\theta_k \pm \left[K_{p+n}(cR_{kq}) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+p)\varphi_{kq} \pm \right.$$

$$\left.\left. \pm K_{p-n}(cR_{kq}) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \varphi_{kq}\right] \sin n\theta_k\right\}, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases}0.5 & n=0\\ 1 & n>0\end{cases}; \ c = \mathrm{const}; \ r_k < R_{kq}$$

Подставляя (9)—(12) в (5) и (7), получим решение в k-ой системе координат в виде рядов Фурье, при помощи которых можно удовлетворить граничным условиям на k-ом контуре ($k = 1, \ldots, m$).

Введем в (5) и (6) новые постоянные, необходимость введения которых станет ясной ниже

$$\begin{matrix} A_p^{(q)} = x_{p,1}^{(q)}, & C_p^{(q)} = x_{p,2}^{(q)}, & E_p^{(q)} = I_p\left(R_q \dfrac{r_0}{l}\right) x_{p,3}^{(q)} \\ B_p^{(q)} = x_{p,4}^{(q)}, & D_p^{(q)} = x_{p,5}^{(q)}, & F_p^{(q)} = I_p\left(R_q \dfrac{r_0}{l}\right) x_{p,6}^{(q)} \end{matrix} \qquad (13)$$

Подставляя (5)—(6) в граничные условия на k-ом контуре и учитывая (13), (9)—(13), получаем бесконечную систему в виде:

$$B_n^{(k)*} X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^{m}{}' \sum_{p=0}^{\infty} B_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = B_n^{(k)**} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m \\ n = 0, \ldots \infty \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Здесь и ниже штрих возле суммы обозначает, что в сумме член при $q = k$ опущен. $X_n^{(k)}$, $B_n^{(k)**}$ — шестимерные вектор-столбцы; $B_n^{(k)*}$ и $B_{n,p}^{(k,q)}$ — шестимерные матрицы

$$X_n^{(k)} = \{x_{n,j}^{(k)}\}, \quad B_n^{(k)**} = \{b_j^{**}(n,k)\}, \quad B_n^{(k)*} = \| b_{ij}^{*}(n,k) \|$$
$$B_{n,p}^{(k,q)} = \| b_{ij}(n,p,k,q) \| \qquad (i, j = 1, \ldots, 6) \qquad (15)$$

Умножив (14) на $1 / B_n^{(k)*}$ (можно показать, что $B_n^{(k)*}$ — невырожденная матрица), получим бесконечную систему в канонической форме [6].

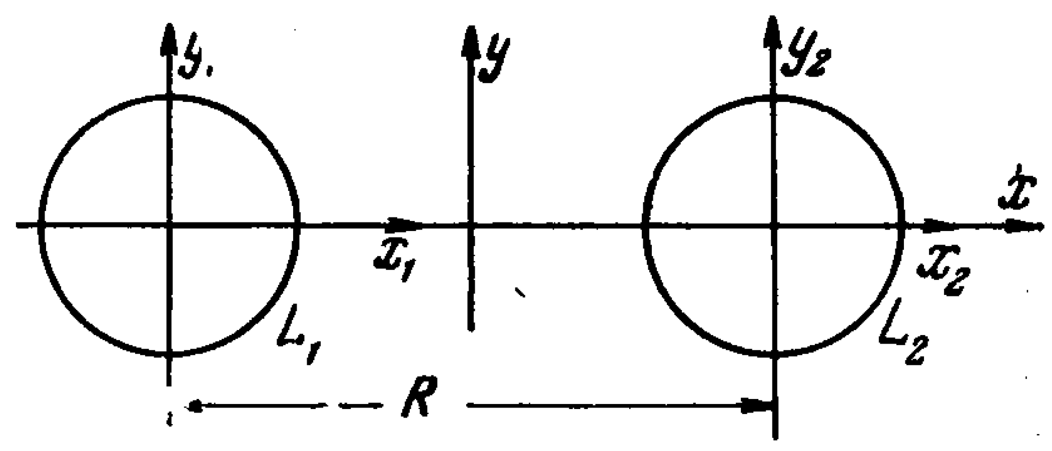
$$X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^{m}{}' \sum_{p=0}^{\infty} A_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = b_n^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m \\ n = 0, \ldots, \infty \end{pmatrix}$$
$$A_{n,p}^{(k,q)} = \| a_{ij}(n,p,k,q) \|, \qquad b_n^{(k)} = \{b_j(n,k)\} \qquad (i, j = 1, \ldots, 6) \qquad (16)$$

Приведем некоторые соотношения, которые необходимы для доказательства квазирегулярности и единственности решения бесконечных систем вида (16). Из [7] и формулы Стирлинга при $|n| \gg |z|$ можно получить:

$$K_n(z) \sim \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \qquad I_n(z) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \tag{17}$$

Кроме того, при любом n можно получить [5] оценку:

$$|I_n(z)| < K_1 \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \; K_1, \; K_2, \ldots = \mathrm{const} \tag{18}$$



Фиг. 2

Из (17) и (18) при большом n можно получить следующую оценку:

$$\left| I_p\left(R_q \frac{r_0}{l}\right) \frac{K_{p+n}(R_{kq} r_0/l)\cos(n+p)\varphi_{kq} \pm K_{p-n}(R_{kq} r_0/l)\cos(n-p)\varphi_{kq}}{K_n(R_q r_0/l)} \right| <$$

$$< K_2 \frac{(p+n)!}{n!\,p!}\left(\frac{R_q}{R_{kq}}\right)^{p+n} \tag{19}$$

Соотношений (17)—(19) и различных следствий из разложения (8) достаточно для доказательства квазирегулярности и единственности решения бесконечных систем при граничных условиях довольно общего вида в случае конечного числа произвольно расположенных несоприкасающихся отверстий. Для краткости изложения рассмотрим два равных отверстия.

Рассмотрим напряженное состояние бесконечной пластинки, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями (фиг. 2) радиуса r_0, расстояние между центрами которых равно Rr_0

$$R_k = 1, \quad R_{kq} = R, \quad \varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{21} = \pi \qquad (k = 1, 2) \tag{20}$$

Будем предполагать, что к контурам отверстий приложена нагрузка, симметричная относительно осей x и y, тогда граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{r_1}|_{r_1=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_r^{(n)} \cos n\theta_1, \qquad \tau_{r_1\theta_1}|_{r_2=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\theta}^{(n)} \sin n\theta_1$$

$$\mu_{r_1}|_{r_1=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_r^{(n)} \sin n\,\theta_1, \qquad \sigma_{r_2}|_{r_2=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sigma_r^{(n)} \cos n\theta_2 \tag{21}$$

$$\tau_{r_2\theta_2}|_{r_2=1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tau_{r\theta}^{(n)} \cos n\theta_2, \qquad \mu_{r_2}|_{r_2=1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mu_r^{(n)} \sin n\theta_2$$

Согласно (5)—(6) решение, удовлетворяющее условиям силовой и геометрической симметрии, возьмем в виде:

$$\varphi = A(\ln r_1 + \ln r_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left[\frac{\cos n\theta_1}{r_1^n} + \frac{(-1)^n \cos n\theta_2}{r_2^n}\right] + \right.$$

$$\left. + C_n \left[\frac{\cos n\theta_1}{r_1^{n-2}} + \frac{(-1)^n \cos n\theta_2}{r_2^{n-2}}\right]\right\} \tag{22}$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[K_n\left(r_1 \frac{r_0}{l}\right)\sin n\theta_1 + (-1)^n K_n\left(r_2 \frac{r_0}{l}\right)\sin n\theta_2\right] + 8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(n-1) \times$$

$$\times \left[\frac{\sin n\theta_1}{r_1^n} + \frac{(-1)^n \sin n\,\theta_2}{r_2^n}\right] \tag{23}$$

$$A_n = A_n^{(1)}, \quad C_n = C_n^{(1)}, \quad E_n = E_n^{(1)} \tag{24}$$

и, кроме того, учтены соотношения:

$$A_n^{(2)} = (-1)^n A_n^{(1)}, \qquad C_n^{(2)} = (-1)^n C_n^{(1)}, \qquad E_n^{(2)} = (-1)^n E_n^{(1)} \tag{25}$$

которые имеют место в силу геометрической и силовой симметрии задачи. Решение в форме (22)—(23) позволяет удовлетворить граничным условиям только на контуре левого отверстия, на контуре же правого отверстия при этом граничные условия будут удовлетворяться автоматически. Из условий равенства нулю главного вектора и главного момента на каждом контуре и условий «на бесконечности» получаем:

$$\sigma_r^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(1)}, \qquad c_1 = 0 \tag{26}$$

В (22) и (23), согласно (13), введем новые постоянные:

$$A_n = x_{n,1}, \qquad C_n = x_{n,2}, \qquad E_n = I_n\left(\frac{r_0}{l}\right) x_{n,3} \tag{27}$$

Подставляя (22), (23) в граничные условия на левом отверстии (21) и учитывая (3), (9)—(12) и (27), получаем бесконечную систему. Рассмотрим ее при $n = 0$ и определим

$$A = r_0^2 \left[\sigma_r^{(0)} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} x_{p,1} \frac{p-1}{r_0^2 R^{p-2}}\right] \tag{28}$$

Учитывая (28), получаем бесконечную систему в виде:

$$B_n^* X_n + \sum_{p=1}^{\infty} B_{n,p} X_p = B_n^{**} \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{29}$$

$$X_n = \{x_{n,j}\}, \quad B_n^{**} = \{b_j^{**}(n)\}, \quad B_n^* = \| b_{ij}^*(n) \|, \quad B_{n,p} = \| b_{ij}(n, p) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Здесь при $n = 1$ первое и второе уравнения совпадают и $x_{1,2} = 0$ в силу (27). Приводим значения: $b_{ij}^*(n)$; $b_{ij}(n, p)$ и $b_j^{**}(n)$ при $i, j = 1, 2, 3$.

$$b_{11}^*(n) = -\frac{n(n+1)}{r_0^2}, \quad b_{12}^*(n) = -\frac{n^2+n-2}{r_0^2} + 8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^4} n(n^2-1)$$

$$b_{13}^*(n) = -\frac{n}{r_0^2} I_n\left(\frac{r_0}{l}\right)\left[\frac{r_0}{l} K_n'\left(\frac{r_0}{l}\right) - K_n\left(\frac{r_0}{l}\right)\right], \quad b_{21}^*(n) = -\frac{n(n+1)}{r_0^2}$$

$$b_{22}^*(n) = -\frac{n(n-1)}{r_0^2} + 8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^4} n(n^2-1)$$

$$b_{23}^*(n) = -\frac{1}{r_0^2} I_n\left(\frac{r_0}{l}\right)\left[\frac{r_0}{l} K_n'\left(\frac{r_0}{l}\right) - n^2 K_n\left(\frac{r_0}{l}\right)\right] \tag{30}$$

$$b_{31}^*(n) = 0, \quad b_{32}^*(n) = -8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^4} n(n-1), \quad b_{33}^*(n) = \frac{1}{l} K_n'\left(\frac{r_0}{l}\right) I_n\left(\frac{r_0}{l}\right)$$

$$b_{11}(n, p) = -\frac{(p+n-1)!}{(n-2)!\,(p-1)!} \frac{1}{r_0^2 R^{p+n}},$$

$$b_{12}(n, p) = \frac{1}{r_0^2 R^{p+n-2}} \frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-2)!}\left[\frac{n^2-n-2}{R^2} - \frac{n(n-1)}{p+n-1}\right] +$$

$$+ 8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^4} \frac{(p+n-1)!}{(n-2)!\,(p-2)!} \frac{1}{R^{p+n}} + 2\frac{(p-1)(n-1)}{r_0^2 R^{p+n-2}}$$

$$b_{13}(n, p) = \frac{n}{r_0^2} I_p\left(\frac{r_0}{l}\right)\left[K_{p+n}\left(R\frac{r_0}{l}\right) - K_{p-n}\left(R\frac{r_0}{l}\right)\right]\left[\frac{r_0}{l} I_n'\left(\frac{r_0}{l}\right) - I_n\left(\frac{r_0}{l}\right)\right]$$

$$b_{21}(n, p) = \frac{1}{r_0^2} \frac{(p+n-1)!}{(n-2)!\,(p-1)!} \frac{1}{R^{p+n}}$$

$$b_{22}(n,\ p)=\frac{1}{r_0^2}\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!\,(p-2)!}\frac{1}{R^{p+n-2}}\left(\frac{n-1}{p+n-1}-\frac{1}{R^2}\right)+$$

$$+2\frac{(n-1)(p-1)}{r_0^2R^{p+n-2}}-8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^4}\frac{(p+n-1)!}{(n-2)!\,(p-1)!}\frac{1}{R^{p+n}}$$

$$b_{23}(n,\ p)=\frac{1}{r_0^2}I_p\left(\frac{r_0}{l}\right)\left[K_{p+n}\left(R\frac{r_0}{l}\right)-K_{p-n}\left(R\frac{r_0}{l}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{r_0}{l}I_n'\left(\frac{r_0}{l}\right)-n^2I_n\left(\frac{r_0}{l}\right)\right]$$

$$b_{31}(n,\ p)=0,\quad b_{32}(n,\ p)=-8(1-\nu)\frac{l^2}{r_0^3}\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!\,(p-2)!}\frac{1}{R^{p+n}}$$

$$b_{33}(n,\ p)=-\frac{1}{l}I_p\left(\frac{r_0}{l}\right)\left[K_{p+n}\left(R\frac{r_0}{l}\right)-K_{p-n}\left(R\frac{r_0}{l}\right)\right]I_n'\left(\frac{r_0}{l}\right)$$

$$b_1^{**}(n)=\sigma_r^{(n)}-\sigma_r^{(0)}\frac{n-1}{R^n},\qquad b_2^{**}(n)=\tau_{r\theta}^{(n)}+\sigma_r^{(0)}\frac{n-1}{R^n},\qquad b_3^{**}(n)=\mu_r^{(n)}$$

Рассмотрим определитель $|B_n^*|$. Воспользовавшись более точными асимптотиками по сравнению (17), при больших n получаем:

$$|B_n^*|\sim 2\frac{3-2\nu}{r_0^5}n^3 \tag{31}$$

Из (31) следует, что матрица B_n^* является невырожденной. Умножив (29) на $1/B_n^*$, получаем бесконечную систему в каноническом виде:

$$X_n+\sum_{p=1}^{\infty}A_{n,\,p}X_p=B_n \qquad (n=1,\ldots,\infty) \tag{32}$$

В (32) при $n=1$ первое и второе уравнения совпадают, а $x_{1,2}=0$;

$$A_{n,p}=\frac{B_{n,p}}{B_n^*},\quad B_n=\frac{B_n^{**}}{B_n^*},\quad A_{n,p}=\|a_{ij}(n,\ p)\|,\quad B_n=\{b_j(n)\}\qquad (i,j=1,\ 2,\ 3)$$

Из (17)—(19), (30), (31) и (33) можно получить оценку: (33)

$$|a_{ij}(n,\ p)|<K_3\frac{(p+n)!}{(n-3)!\,(p-1)!}\frac{1}{R^{p+n}} \tag{34}$$

Будем считать, что $\sigma_{r_1}|_{r_1=1}$ и $\tau_{r_1\theta_1}|_{r_1=1}$ — непрерывные функции, первые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле; $\mu_{r_1}|_{r_1=1}$ — непрерывная вместе с первой производной функция, вторая производная от которой удовлетворяет условию Дирихле. В этом случае из (17), (18), (30), (31), (33) и 8 получаем:

$$|b_j(n)|<\frac{K_3}{n} \tag{35}$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{ij}(n,\ p)| \tag{36}$$

Легко заметить, что при любом n эти суммы ограничены. Исследуем эту сумму при больших n, из (34), получаем:

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{ij}(n,\ p)|<K_3\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n-3)!\,(p-1)!}\frac{1}{R^{p+n}} \tag{37}$$

Для суммирования ряда, стоящего в правой части (37), рассмотрим функцию

$$\frac{d}{dz}\alpha n(n-1)(n-2)f(z,\ n+1,\ \alpha) \tag{38}$$

Подставляя (8) в (38) и выполнив почленно дифференцирование, получаем:

$$\frac{\alpha n(n^2-1)(n-2)}{(\alpha-z)^{n+2}}=\sum_{p=1}^{\infty}z^{p-1}\frac{(p+n)!}{(n-3)!\,(p-1)!}\frac{1}{\alpha^{p+n}}\qquad (|z|<|\alpha|) \tag{39}$$

Положив в (38) $z = 1$ и $\alpha = R$, из (37) и (39) следует:

$$\sum_{p=1}^{\infty} | a_{i,j}(n, p) | < K_4 \frac{n(n^2-1)(n-2)}{(R-1)^{n+2}} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{40}$$

В случае несоприкасающихся отверстий $R > 2$, отсюда следует, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} | a_{ij}(n, p) | \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{41}$$

т. е., что найдется такое $n°$, что:

$$\sum_{p=1}^{\infty} | a_{ij}(n, p) | < 1 \qquad (n = n° + 1, \ldots, \infty) \tag{42}$$

Из (35) и (42) следует, что найдется такое $K > 0$, что:

$$| b_j(n) | \leqslant K \left(1 - \sum_{p=n°+1}^{\infty} | a_{ij}(n, p) |\right) \qquad \begin{pmatrix} n = n° + 1, \ldots, \infty \\ i, j = 1, 2, 3. \end{pmatrix} \tag{43}$$

Неравенства (42) и (43) показывают, что бесконечная система (32) является квазирегулярной и ее решение, следовательно, может быть определено методом редукции.

Исследуем единственность решения бесконечной системы (32); рассмотрим ряд:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{ij}^2 (n, p) \tag{44}$$

Сходимость ряда (44) следует из (40), сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k_1} \alpha^{-n+k_2} \qquad (k_1, k_2, \alpha = \mathrm{const};\ \alpha > 1)$$

и сходимости двойного ряда при сходимости повторного ряда в случае положительных членов. Правые части (32) принадлежат пространству l_2 в силу (35). Таким образом выполняются условия применения теоремы Гильберта [6], из которой следует, что либо 1) бесконечная система (32) имеет единственное решение, принадлежащее l_2, либо, 2) однородная система (32) имеет решение, отличное от нуля. Второй случай теоремы Гильберта не может иметь места, либо в противном случае нарушилась бы теорема единственности решения краевых задач моментной теории упругости. Таким образом имеет место первый случай.

В случае двух равных круговых несоприкасающихся отверстий бесконечная система является квазирегулярной и имеет единственное решение, которое может быть определено методом редукции, если 1) $\sigma_{r_1}|_{r_1=1}$ и $\tau_{r_1\theta_1}|_{r_1=1}$ — непрерывные функции, первые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле, а 2) $\mu_{r_1|r_1=1}$ — непрерывная вместе с первой производной функция, вторая производная от которой удовлетворяет условию Дирихле.

Заметим, что предложенный подход можно применять при решении ряда других плоских задач моментной теории упругости.

Поступила 20 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Mindlin K. D. Influence of couple—stresses on stress concetrations. Experimental Mechanics, 1963, 3. (Русск. перев. Сб. пер., Механика, 1964, № 4.)
2. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной упругости. ПММ, т. 28, вып. 4.
3. Немиш Ю. Г. Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием. Прикладная механика; 1965, т. 1, вып. 5.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
5. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. Изд. иностр. лит., 1963.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1952.
7. Beckmann R., Franz W. Asymptotisches Verhalten der Zylinderfunktionen in Abhängigkeit vom komplexen Jndex. ZAMM, 1957, Bd. 37, H. 1/2.
8. Смирнов В. Н. Курс высшей математики. т. 2. Физматгиз, 1958.