Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

О ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ И ЕЕ СВЯЗИ С МОМЕНТНОЙ ТЕОРИЕЙ УПРУГОСТИ

В. А. Ломакин

(Москва)

Задача полного статистического описания состояния микронеоднородного упругого тела, находящегося под действием произвольных поверхностных сил, приведена к двум задачам: 1) задаче обобщенной моментной теории упругости и 2) задаче микронеоднородной теории упругости в условиях макроскопически однородного деформированного состояния, причем показано, что решение краевой задачи обобщенной моментной теории упругости определяет средние перемещения рассматриваемого микронеоднородного тела. Рассмотрены также некоторые варианты постановки краевых задач моментной теории упругости и установлена их связь с теорией деформирования микронеоднородных тел.

1. Рассмотрим деформацию микронеоднородного упругого тела, в котором напряжения τ_{ij} и деформации e_{ij} (перемещения w_i) связаны законом Гука

$$\tau_{ij} = c_{ijlm}e_{lm} = c_{ijlm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m} \qquad (1.1)$$

с тензором упругих модулей c_{ijlm}, являющимся статистически однородным и изотропным случайным тензорным полем [1]. Задача определения статистических характеристик поля перемещений сводится к решению стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijlm}\frac{\partial w_l}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (1.2)$$

при соответствующих детерминированных граничных условиях.

Решение задачи (1.2) в случае макроскопически однородного деформированного состояния $\varepsilon_{jk} = \text{const}$ [2] для пульсаций w_i' вектора перемещений дает

$$w_i' = \varphi_{ijk}(x_s)\,\varepsilon_{jk} \qquad (1.3)$$

Здесь

$$w_i' = w_i - u_i, \qquad u_i = \langle w_i\rangle, \qquad \varepsilon_{jk} = \langle e_{jk}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (1.4)$$

Здесь и всюду далее угловыми скобками обозначается статистическое среднее соответствующей функции, а штрихом — отклонения от среднего. Тензор φ_{ijk} определяется тензором Грина задачи однородной теории упругости и тензором c_{ijlm}' отклонений упругих модулей.

Рассматривая теперь макроскопически неоднородное деформированное состояние тела и предполагая, что характерные размеры неоднородностей малы по сравнению с расстоянием, на котором заметно изменяются макроскопические деформации ε_{jk}, примем, что соотношение (1.3) описывает пульсации перемещений w_i' макроскопического элемента объема и в случае неоднородного поля $\varepsilon_{jk}(x_s)$. Другими словами, соотношение (1.3), точное при $\varepsilon_{jk} = \text{const}$, будем применять и для слабо меняющихся (по сравнению с пульсациями w_i') полей $\varepsilon_{jk}(x_s)$.

Подсчитывая в этом предположении среднее значение W удельной потенциальной энергии деформации

$$W = {}^1/_2 \langle \tau_{ij} e_{ij} \rangle = {}^1/_2 \langle \tau_{ij} \rangle \langle e_{ij} \rangle + {}^1/_2 \langle \tau_{ij}' e_{ij}' \rangle \tag{1.5}$$

найдем

$$W = {}^1/_2\, a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + {}^1/_2\, b_{ijklmn} \varkappa_{ijk} \varkappa_{lmn} + d_{ijklmn} \varepsilon_{ij} \varkappa_{klm} \tag{1.6}$$

где $\varkappa_{ijk}$ — градиент тензора деформаций

$$\varkappa_{ijk} = \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \tag{1.7}$$

В рассматриваемом случае статистически изотропного поля c_{ijlm} тензор d_{ijklm} обращается в нуль, а тензоры a_{ijkl} и b_{ijklmn} являются изотропными тензорами. Учитывая также имеющуюся симметрию этих тензоров, соотношение (1.6) можно привести к виду

$$\begin{aligned} W = {}^1/_2 \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{kl} \varepsilon_{kl} + \eta_1 \varkappa_{iik} \varkappa_{kjj} + \eta_2 \varkappa_{ijj} \varkappa_{ikk} + \\ + \eta_3 \varkappa_{iik} \varkappa_{jjk} + \eta_4 \varkappa_{ijk} \varkappa_{ijk} + \eta_5 \varkappa_{ijk} \varkappa_{kji} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Первые два члена соотношения (1.8) включают в себя работу средних напряжений на средних деформациях (первый член (1.5)) и часть работы пульсаций напряжений на пульсациях деформаций (часть второго члена (1.5)), соответствующую энергии микродеформаций [3], возникающих в макроскопически однородном деформированном состоянии. Остальные члены соотношения (1.8) определяют вклад в среднюю энергию деформации за счет ориентирующего действия градиентов макродеформаций на распределение пульсаций напряжений и деформаций.

Основная гипотеза о справедливости соотношения (1.3) в неоднородном поле $\varepsilon_{jk}(x_s)$ сводит задачу определения средних перемещений $\langle w_i \rangle$ рассматриваемого микронеоднородного тела (для определенности будем считать, что w_i есть решение краевой задачи для уравнений (1.2) при заданных на поверхности тела детерминированных силах q_i) к задаче определения перемещений u_i однородного упругого тела той же формы, плотность потенциальной энергии деформации которого определяется соотношением (1.8), под действием заданных на поверхности s тела силах $q_i(x_s)$. Так, определенные перемещения u_i лишь приближенно равны $\langle w_i \rangle$, причем это приближение будет тем лучше, чем точнее выполняется соотношение (1.3).

2. Краевую задачу для определения вектора u_i получим из вариационного принципа Лагранжа

$$\int\limits_{(v)} \delta W(\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ijk})\, dv = \int\limits_{(s)} q_i \delta u_i\, ds \tag{2.1}$$

Введя тензоры σ_{ij} и μ_{ijk} как обобщенные силы для соответствующих обобщенных перемещений ε_{ij} и $\varkappa_{ijk}$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \mu_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \varkappa_{ijk}} \tag{2.2}$$

имеем

$$\delta W = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \mu_{ijk}\delta\varkappa_{ijk}$$

Выразив ε_{ij} и $\varkappa_{ijk}$ через перемещения u_i, можно привести δW к виду

$$\delta W = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\sigma_{jk} - \frac{\partial\mu_{ijk}}{\partial x_i}\right)\delta u_j\right] - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{jk} - \frac{\partial\mu_{ijk}}{\partial x_i}\right)\delta u_j + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_{ijk}\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_k}\right)$$

Отсюда

$$\int\limits_{(v)} \delta W\, dv = \int\limits_{(s)} \left(\sigma_{jk} - \frac{\partial\mu_{ijk}}{\partial x_i}\right) n_k \delta u_j\, ds -$$
$$- \int\limits_{(v)} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{jk} - \frac{\partial\mu_{ijk}}{\partial x_i}\right)\delta u_j\, dv + \int\limits_{(s)} \mu_{ijk} n_i \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_k}\, ds \tag{2.3}$$

Вариации $\partial\delta u_j / \partial x_k$ представим в виде

$$\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_k} = n_k \delta v_j + \varepsilon_{skl}\varepsilon_{mrl} n_s n_m \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_r} \qquad \left(\delta v_j = \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_s} n_s\right) \tag{2.4}$$

Здесь δv_j — независимая от δu_j часть вариации, ε_{ijk} — единичный антисимметричный псевдотензор; его компоненты равны $+1$ (-1), если i, j, k образуют четную (нечетную) перестановку чисел 1, 2, 3 и равны нулю, если любые два индекса одинаковы. Используя (2.4), найдем

$$\mu_{ijk} n_i \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_k} = \mu_{ijk} n_i n_k \delta v_j + \varepsilon_{mrl} n_m \frac{\partial}{\partial x_r}(\varepsilon_{skl}\mu_{ijk} n_i n_s \delta u_j) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_r}(\mu_{ijr} n_i n_r - \mu_{ijk} n_i n_r) n_k \delta u_j \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3) и (2.5) в (2.1), получим

$$\int\limits_{(s)} \left\{\left[\sigma_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_{ijk} + \mu_{lij} n_l n_k - \mu_{ljk} n_l n_i)\right] n_k - q_j\right\} \delta u_j\, ds -$$
$$- \int\limits_{(v)} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{jk} - \frac{\partial\mu_{ijk}}{\partial x_i}\right)\delta u_j\, dv + \int\limits_{(s)} \mu_{ijk} n_i n_k \delta v_j\, ds +$$
$$+ \int\limits_{(s)} \varepsilon_{mrl} n_m \frac{\partial}{\partial x_r}(\varepsilon_{skl}\mu_{ijk} n_i n_s \delta u_j)\, ds = 0 \tag{2.6}$$

Для гладкой поверхности s согласно теореме Стокса последний интеграл в (2.6) равен нулю и поэтому, используя независимость вариаций, из (2.6) найдем уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sigma_{jk} - \frac{\partial\mu_{ijk}}{\partial x_i}\right) = 0 \tag{2.7}$$

и граничные условия на s

$$\left[\sigma_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_{ijk} + \mu_{lij} n_l n_k - \mu_{ljk} n_l n_i)\right] n_k = q_j$$
$$\mu_{ijk} n_i n_k = 0 \tag{2.8}$$

Если поверхность s является кусочно-гладкой, за счет последнего интеграла в (2.6) получим также условия на ребрах

$$[[\mu_{ijk} n_i \nu_k]] = 0 \tag{2.9}$$

где $\nu_k = \varepsilon_{kls} t_l n_s$, а t_l — компоненты единичного вектора, касательного к ребру. Символ $[[\ldots]]$ обозначает разность значений стоящей в скобках величины с разных сторон ребра.

В соотношениях (2.7)—(2.9) величины σ_{ij}, μ_{ijk} (в соответствии с принципом Лагранжа) следует считать выраженными через перемещения согласно (2.2).

3. Краевая задача (2.7)—(2.9) для определения u_i является обобщением моментной теории упругости при специальном виде граничных условий (на границе отличны от нуля лишь поверхностные силы q_j). Под моментной теорией упругости обычно понимается [4-6] теория, в которой энергия деформации W определяется тензором деформации и градиентом вектора вращения ω_i, определяющего поворот элементарного объема тела. Можно показать, что эта теория эквивалентна теории, в которой W является функцией тензора деформации и антисимметричной части $\varkappa_{[ij]k}$ тензора $\varkappa_{ijk}$, т. е. в которой W имеет вид

$$W = W(\varepsilon_{ij},\ \varkappa_{[ij]k}) \tag{3.1}$$

Краевая задача (2.7)—(2.9) соответствует энергии

$$W = W(\varepsilon_{ij},\ \varkappa_{ijk}) \tag{3.2}$$

учитывающей все компоненты градиента тензора деформаций. Некоторые вопросы теории с энергией (3.2) рассматривались в работах [7,8].

Таким образом, задача определения средних перемещений $u_j(x_s)$ микронеоднородной среды (1.1) в макроскопически неоднородном деформированном состоянии сводится к задаче обобщенной моментной (однородной) теории упругости (2.7)—(2.9). Предположим, что эта задача решена и функции $u_j(x_s)$, а следовательно, и $\varepsilon_{jk}(x_s)$ найдены. Пульсации w_i' перемещений рассматриваемой микронеоднородной среды найдутся тогда из соотношений (1.3), причем они будут полностью определены, если известны функции $\varphi_{ijk}(x_s)$, входящие в (1.3), т. е. если решена задача о распределении пульсаций при макроскопически однородном деформированном состоянии тела. По средним значениям $u_j(x_s)$ и пульсациям $w_i'(x_s)$ перемещений могут быть построены [2] моменты любого порядка вектора перемещений и тензоров деформаций и напряжений, т. е. может быть дано полное статистическое описание деформируемой среды [1]. Следовательно, для полного статистического описания состояния микронеоднородного тела (1.1), находящегося под действием произвольных поверхностных сил $q_j(x_s)$, требуется последовательное решение двух задач: 1) задачи обобщенной моментной теории упругости для однородного тела, решение которой определяет средние перемещения и 2) задачи неоднородной теории упругости при специальных граничных условиях, обеспечивающих макроскопически однородное деформированное состояние; решение этой задачи (совместно с решением предыдущей) определяет пульсации перемещений.

4. Покажем, что, если не учитывать вклад в энергию (1.8), вносимый симметричной частью градиента тензора деформаций, то задача определения вектора перемещений u_i совпадает с краевой задачей моментной теории упругости в обычной форме.

Если в (1.8) учесть лишь антисимметричную часть $\varkappa_{[ij]k}$ тензора $\varkappa_{ijk}$, то W приводится к виду

$$W = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{kk} + \mu\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} + 2\mu l^2(\varkappa_{ij}\varkappa_{ij} + \eta\varkappa_{ij}\varkappa_{ji}) \tag{4.1}$$

$$\left(l^2 = \frac{1}{8\mu}(\eta_2 + 2\eta_4 - \eta_5),\ \eta = -\frac{\eta_2}{8\mu l^2}\right)$$

Тензоры $\varkappa_{ij}$ и $\varkappa_{[ij]k}$ связаны соотношениями

$$\varkappa_{ij} = \varepsilon_{jlm}\varkappa_{lmi} = \varepsilon_{jlm}\varkappa_{[lm]\,i},\quad \varkappa_{[lm]\,i} = {}^1/_2\,\varepsilon_{jlm}\varkappa_{ij} \qquad (\varkappa_{ii} = 0) \tag{4.2}$$

Для тензоров

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}, \qquad \mu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial\varkappa_{ij}}$$

являющихся обобщенными силами для обобщенных перемещений ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$, из (4.1) имеем

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad \mu_{ij} = 4\mu l^2(\varkappa_{ij} + \eta\varkappa_{ji})$$

Вариацию энергии

$$\delta W = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \mu_{ij}\delta\varkappa_{ij}$$

можно привести к виду

$$\delta W = \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_i}\right)\delta u_k\right] - $$
$$-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_i}\right)\delta u_k + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_{ij}\delta\omega_j) \tag{4.3}$$

где ω_j — вектор вращения

$$\omega_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \tag{4.4}$$

Из (4.3), далее, имеем

$$\int\limits_{(v)}\delta W\,dv = \int\limits_{(s)}\left(\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_i}\right)n_l\delta u_k\,ds -$$
$$-\int\limits_{(v)}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_i}\right)\delta u_k\,dv + \int\limits_{(s)}\mu_{ij}n_i\delta\omega_j\,ds \tag{4.5}$$

Выделяя независимые от δu_k вариации $\delta\psi_j = \delta\,(\omega_j - \omega_s n_s n_j)$, подынтегральное выражение в последнем интеграле (4.5) представим в виде

$$\mu_{ij}n_i\delta\omega_j = (\mu_{ij}n_i - \mu_{(n)}n_j)\,\delta\psi_j - \frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\frac{\partial\mu_{(n)}}{\partial x_j}n_l\delta u_k +$$
$$+\varepsilon_{ljk}n_l\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\mu_{(n)}\,\delta u_k\right), \qquad \mu_{(n)} = \mu_{ij}n_i n_j \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5), (4.6) в (2.1), считая поверхность s кусочно-гладкой и используя формулу Стокса, найдем уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sigma_{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_i}\right) = 0 \tag{4.7}$$

граничные условия

$$\left[\sigma_{kl}+\frac{1}{2}\varepsilon_{klj}\left(\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_i}-\frac{\partial\mu_{(n)}}{\partial x_j}\right)\right]n_l=q_k,\quad (\mu_{ij}n_i-\mu_{(n)}n_j)=0 \tag{4.8}$$

и условия на ребрах

$$[[\mu_{(n)}]]=0 \tag{4.9}$$

Соотношения (4.7)—(4.9) совпадают (при соответствующем выборе граничных условий) с уравнениями краевой задачи моментной теории упругости в обычной форме [5].

5. Тензор $\varkappa_{ijk}$ можно разложить на тензоры, имеющие определенный геометрический смысл и самостоятельное значение. Разные, выделенные из $\varkappa_{ijk}$, тензоры могут играть различную роль в процессах деформирования микронеоднородных тел, поэтому представляется целесообразным провести такое выделение. В частности, любой симметричный по индексам j, k тензор $\varkappa_{ijk}$ можно представить в виде разложения

$$\varkappa_{ijk}=\gamma_{ijk}+{}^1/_3\,\varepsilon_{ijl}\varkappa_{kl}+{}^1/_3\,\varepsilon_{ikl}\varkappa_{jl},\qquad \gamma_{ijk}={}^1/_3\,(\varkappa_{ijk}+\varkappa_{jki}+\varkappa_{kij})$$

Здесь $\varkappa_{ij}$ определяется соотношениями (4.2). Вводя далее тензоры

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}},\qquad \mu_{ij}=\frac{\partial W}{\partial\varkappa_{ij}},\qquad m_{ijk}=\frac{\partial W}{\partial\gamma_{ijk}}$$

вариацию энергии

$$\delta W=\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\mu_{ij}\delta\varkappa_{ij}+m_{ijk}\delta\gamma_{ijk}$$

приведем к виду

$$\delta W=\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left[\sigma_{ij}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{jil}\mu_{kl}+m_{jik}\right)\right]\delta u_i\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{jil}\mu_{kl}+m_{jik}\right)\right]\delta u_i+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu_{kl}\delta\omega_l+m_{jik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\right)$$

Здесь ω_l — вектор вращения (4.4). Отсюда имеем

$$\int_{(v)}\delta W\,dv=-\int_{(v)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\frac{\partial\mu_{kl}}{\partial x_k}-\frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k}\right)\delta u_i\,dv+$$

$$+\int_{(s)}\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\frac{\partial\mu_{kl}}{\partial x_k}-\frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k}\right)n_j\delta u_i\,ds+\int_{(s)}\mu_{kl}n_k\delta\omega_l ds+\int_{(s)}m_{ijk}n_k\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}ds \tag{5.1}$$

На поверхности s независимыми вариациями являются: вариации перемещений δu_i, вариации касательной составляющей вектора вращения $\delta\psi_l=\delta\,(\omega_l-\omega_s n_s n_l)$ и вариация нормального к границе относительного удлинения $\delta\,(\varepsilon_{ls}n_l n_s)$. Выделяя независимые вариации, подынтегральное выражение в предпоследнем интеграле представим в виде (4.6), а в последнем — в виде

$$m_{ijk}n_k\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}=2\varepsilon_{kil}n_k m_{ijp}n_j n_p\delta\psi_l+m_{ijk}n_i n_j n_k\delta\,(\varepsilon_{ls}n_l n_s)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[n_j n_p\,(m_{ipk}+m_{spk}n_s n_i)-n_k n_p\,(m_{ijp}+m_{sjp}n_s n_i)\right]n_j\delta u_i+$$

$$+\varepsilon_{mrl}n_m\frac{\partial}{\partial x_r}\left[\varepsilon_{jlp}n_p n_k\,(m_{ijk}+m_{sjk}n_s n_i)\,\delta u_i\right] \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1), (5.2), (4.6) в (2.1) и используя независимость вариаций δu_i в объеме v, вариаций δu_i, $\delta\psi_l$, $\delta(\varepsilon_{ls}n_l n_s)$ на поверхности s и вариаций $\delta(t_l u_l)$, $\delta(u_i - u_l t_l t_i)$ на ребрах, найдем уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\frac{\partial \mu_{kl}}{\partial x_k} - \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k}\right) = 0 \tag{5.3}$$

граничные условия

$$\left\{\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\left(\frac{\partial \mu_{kl}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mu_{(n)}}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[m_{ijk} + n_j n_p (m_{ipk} + m_{spk}n_s n_i) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - n_k n_p (m_{ijp} + m_{sjp}n_s n_i)\right]\right\} n_j = q_i$$

$$(\mu_{kl}n_k - \mu_{(n)}n_l + 2\varepsilon_{kil}n_k m_{ijp}n_j n_p) = 0, \quad m_{ijk}n_i n_j n_k = 0 \tag{5.4}$$

и условия на ребрах

$$\left[\left[\frac{1}{2}\mu_{(n)} + t_r \nu_j n_k (m_{rjk} + m_{sjk}n_s n_r)\right]\right] = 0 \tag{5.5}$$

$$[[\nu_j n_k \{(m_{ijk} + m_{sjk}n_s n_i) - t_r t_i (m_{rjk} + m_{sjk}n_s n_r)\}]] = 0$$

В (5.5) использованы те же обозначения, что и в (2.9).

Соотношения (5.3)—(5.5) содержат уравнения моментной теории упругости (4.7)—(4.9) как частный случай, переходя в них при $m_{ijk} = 0$.

Таким образом, перемещения u_i, являющиеся решением моментной теории упругости (4.7)—(4.9), определяют средние перемещения микронеоднородного тела, если учитывается лишь часть энергии (1.5), соответствующая тензору деформации и антисимметричной части $\varkappa_{[ij]k}$ градиента тензора деформаций (3.1). Перемещения u_i, являющиеся решением краевой задачи (2.7)—(2.9) или (5.3)—(5.5), определяют средние перемещения микронеоднородного тела (1.1) с учетом всей энергии (1.5). Поэтому с рассматриваемой точки зрения моментная теория упругости (4.7)—(4.9) имеет ограниченный интерес и предпочтительнее оказывается обобщенная моментная теория упругости (2.7)—(2.9) или (5.3)—(5.5).

Поступила 18 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В. А. Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
2. Ломакин В. А. О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
3. Новожилов В. В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
4. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of Couple—stresses in Linear Elasticity.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 11, No 5.
5. Koiter W. T. Couple—stresses in the theory elasticity. Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1964, vol. B67, No 1.
6. Троupin R. A. Theories of elasticity with couple—stress. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, No 2.
7. Toupin R. A. elastic materials with couple—stresses. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, v. 11, No 5.
8. Mindlin R. D. Micro—structure in linear elasticity Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 16, No 1.