

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ. ОДНОМЕРНАЯ СЛОЖНАЯ СТРУКТУРА

И. А. К у н и н

(Новосибирск)

В [1] рассматривалась упругая среда простой структуры с пространственной дисперсией. В данной работе строится более общая модель макроскопически однородной среды сложной структуры, для описания которой недостаточно одной кинематической переменной. В качестве исходной микромоделю принята известная модель сложной цепочки, каждая элементарная ячейка которой имеет  $N$  степеней свободы [2,3]. В § 1 эта модель обобщается на случай непрерывного распределения масс. Вводятся новые кинематические переменные: смещение центров масс ячеек и микродеформации разных порядков. Соответственно в качестве силовых переменных вводятся силовые микромоменты. При помощи алгоритма, введенного в [1], осуществляется переход к уравнениям упругой среды с пространственной дисперсией, причем соответствующие операторы явно выражаются через исходные микропараметры.

При феноменологическом подходе полученные уравнения описывают наиболее общую одномерную модель макроскопически однородной линейно-упругой среды сложной структуры с пространственной дисперсией. Одновременно рассматриваются общие уравнения неоднородной среды периодической структуры с одной кинематической переменной. Устанавливается, что при некоторых условиях обе эти модели можно рассматривать как представления одной и той же физической модели, но с различными областями применимости. Приводятся формулы перехода от одного представления к другому.

В § 2 рассматриваются некоторые частные модели, находятся необходимые и достаточные условия, при которых уравнения среды со сложной структурой допускают точное преобразование в уравнения среды простой структуры. Показывается, что в случае слабой дисперсии уравнения среды со сложной структурой при некоторых дополнительных ограничениях совпадают с одномерными уравнениями моментной теории упругости [4-6]. Однако этим ограничениям трудно дать физическое обоснование.

Основной интерес для теории упругости представляет область акустических частот. В § 3 показывается, что в акустической области всегда можно преобразовать систему уравнений, описывающую сложную структуру, в уравнение с одной кинематической переменной — смещением центров масс ячеек — и в уравнения, явно разрешенные относительно других переменных. При этом имеет место как пространственная, так и временная дисперсия, однако последняя не связана с диссипацией энергии.

Важно отметить, что именно операторы, входящие в уравнение относительно центров масс, непосредственно связаны с макроэкспериментом. В частности, в нулевом приближении осуществляется переход к обычному уравнению теории упругости с упругой константой, которая измеряется на опыте. В связи с этим данное представление, по мнению автора, более адекватно макроскопическому описанию среды со сложной структурой, чем представления, рассмотренные в § 1.

1. Будем отталкиваться от Борновской модели неограниченной одномерной сложной цепочки в гармоническом приближении [2,3]. В каждой элементарной ячейке с номером  $n$  содержатся  $N$  частиц с массами  $m_j$ , причем каждая частица упруго взаимодействует как с частицами данной

ячейки, так и с частицами других ячеек. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$2L = \sum_{nj} m_j \dot{w}(n, j) \dot{w}(n, j) - \\ - \sum_{nn'jj'} w(n, j) \Phi(n - n', j, j') w(n', j') + 2 \sum_{nj} w(n, j) f(n, j) \quad (1.1) \\ (j, j' = 1, \dots, N)$$

Здесь  $w(n, j)$  — смещение  $j$ -й частицы в  $n$ -й ячейке,  $f(n, j)$  — действующая на нее внешняя сила и  $\Phi(n - n', j, j') = \Phi(n' - n, j', j)$  — силовые константы (при механическом истолковании — характеристики соответствующих пружин). Зависимость силовых констант от разности  $n - n'$  является следствием того, что структура элементарной ячейки периодически повторяется в цепочке. Требование инвариантности энергии относительно трансляции накладывает на силовые константы известные условия [2]. Отметим, что по соображениям, аналогичным приведенным в [1], в лагранжиане опущен линейный по смещению член, т. е. предполагается отсутствие начальных сил.

Обобщим данную модель на случай произвольного (как дискретного, так и непрерывного) периодического распределения масс. Введем локальную ячейечную координату  $\xi$  с началом в центре масс ячейки и обозначим  $\rho(\xi)$  плотность масс в ячейке. Тогда лагранжиан запишется в виде

$$2L = \sum_n \int \rho(\xi) \dot{w}(n, \xi) \dot{w}(n, \xi) d\xi - \\ - \sum_{nn'} \iint w(n, \xi) \Phi(n - n', \xi, \xi') w(n', \xi') d\xi d\xi' + 2 \sum_n \int w(n, \xi) f(n, \xi) d\xi \quad (1.2)$$

Для перехода к дискретному распределению масс достаточно положить

$$\rho(\xi) = \sum_j m_j \delta(\xi - \xi_j), \quad \Phi(n, \xi, \xi') = \sum_{jj'} \Phi(n, j, j') \delta(\xi - \xi_j) \delta(\xi' - \xi_{j'}) \quad (1.3)$$

где  $\xi_j$  — координата частицы в ячейке.

Чтобы в дальнейшем не заниматься вопросом сходимости соответствующих сумм в (1.2), будем для простоты предполагать, что дальное действие ограничено, т. е.  $\Phi(n, \xi, \xi')$  отличны от нуля лишь для конечного числа значений  $n$ . Относительно  $w(n, \xi)$  предполагается достаточная гладкость по  $\xi$  и рост не быстрее степени  $n$  при  $|n| \rightarrow \infty$ .

Рассматривая в (1.2) координату  $\xi$  как параметр и используя алгоритм, приведенный в [1], перейдем от функций дискретного аргумента  $n$  к функциям непрерывной переменной  $x$ . Тогда лагранжиан  $L$  в  $(k, \omega)$ -представлении<sup>1</sup> принимает вид ( $a$  — размер ячейки)

$$4\pi a L = \omega^2 \iint \rho(\xi) \overline{w(k, \xi)} w(k, \xi) dk d\xi - \\ - \iint \overline{w(k, \xi)} \Phi(k, \xi, \xi') w(k, \xi') dk d\xi d\xi' + 2 \iint \overline{w(k, \xi)} f(k, \xi) dk d\xi \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> Напоминаем [1], что функции от  $k$  являются здесь Фурье-образами соответствующих функций от  $x$ , причем точка  $k$  принадлежит окружности  $B$  радиуса  $a^{-1}$ . Здесь и в дальнейшем черта обозначает комплексное сопряжение.

Для перехода к теории упругости удобно ввести коллективные ячейечные переменные. Определим моменты инерции порядка  $q$  ( $q = 0, 1 \dots$ )

$$\rho^{(q)} = \frac{1}{a} \int \rho(\xi) \xi^q d\xi, \quad \text{или} \quad \rho^{(q)} = (\rho, \xi^q) \quad (1.5)$$

где скобками обозначено соответствующее скалярное произведение, и введем диагональные матрицы

$$I^{qq'} = \rho^{(2q)} \delta^{qq'}, \quad I_{qq'}^{-1} = \rho_{(2q)}^{-1} \delta_{qq'} \quad (1.6)$$

При помощи известного алгоритма построим ортонормированную систему полиномов  $e^q(\xi)$  с весом  $\rho(\xi)$  и взаимную систему функций  $e_{q'}(\xi)$ , определив их соотношениями

$$(\rho e^q, e^{q'}) = I^{qq'}, \quad (e_q, e^{q'}) = \delta_q^{q'} \quad (1.7)$$

Легко видеть, что <sup>1</sup>

$$e_q(\xi) = \rho(\xi) I_{qq'}^{-1} e^{q'}(\xi) \quad (1.8)$$

Построенный биортогональный функциональный базис полностью определяется заданием  $\rho(\xi)$ . В частности, при постоянной плотности  $e^q(\xi)$  совпадают с полиномами Лежандра. В случае дискретного распределения масс базис автоматически оказывается конечным:  $q = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Независимо от  $\rho(\xi)$  для первых двух элементов базиса имеем

$$e^0(\xi) = 1, \quad e^1(\xi) = \xi, \quad e_0(\xi) = \rho_{(0)}^{-1} \rho(\xi), \quad e_1(\xi) = \rho_{(2)}^{-1} \rho(\xi) \xi \quad (1.9)$$

Разложим теперь все функции  $\xi$  по элементам базиса

$$\begin{aligned} w(k, \xi) &= w_q(k) e^q(\xi), & f(k, \xi) &= f^q(k) e_q(\xi) \\ \Phi(k, \xi, \xi') &= \Phi^{qq'}(k) e_q(\xi) e_{q'}(\xi') \end{aligned} \quad (1.10)$$

Коэффициенты разложения определяются очевидным образом

$$\begin{aligned} w_q(k) &= (e_q, w), & f^q(k) &= (e^q, f) \\ \Phi^{qq'}(k) &= \frac{1}{a^2} \iint \Phi(k, \xi, \xi') e^q(\xi) e^{q'}(\xi') d\xi d\xi' = \overline{\Phi^{q'q}}(k) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Первые коэффициенты разложения имеют простой физический смысл. Учитывая (1.9), находим, что  $w_0$  — смещение центра масс ячейки,  $w_1$  — средняя деформация ячейки (микродоформация),  $f^0$  — средняя плотность сил,  $f^1$  — средняя плотность силовых диполей. Остальные коэффициенты соответствуют микродоформациям и микромоментам высших порядков.

В новых переменных лагранжиан (1.4) в обозначениях [1] записывается в форме

$$2L = \langle w_q | \omega^2 I^{qq'} | w_{q'} \rangle - \langle w_q | \Phi^{qq'} | w_{q'} \rangle + 2 \langle w_q | f^q \rangle \quad (1.12)$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\omega^2 I^{qq'} w_{q'}(k) - \Phi^{qq'}(k) w_{q'}(k) = - f^q(k) \quad (1.13)$$

Как известно [2,3], свободные колебания сложной цепочки описываются в  $(k, \omega)$ -представлении одной акустической (идущей из начала координат)

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем по повторяющимся верхним и нижним индексам предполагается суммирование.

и  $N - 1$  оптическими ветвями. На фигуре они схематически показаны сплошными кривыми для двухатомной цепочки. При переходе к непрерывному распределению масс число оптических ветвей неограниченно возрастает. Соответствующие полосы пропускания в плоскости  $k, \omega$  будем называть акустической и оптической областями.

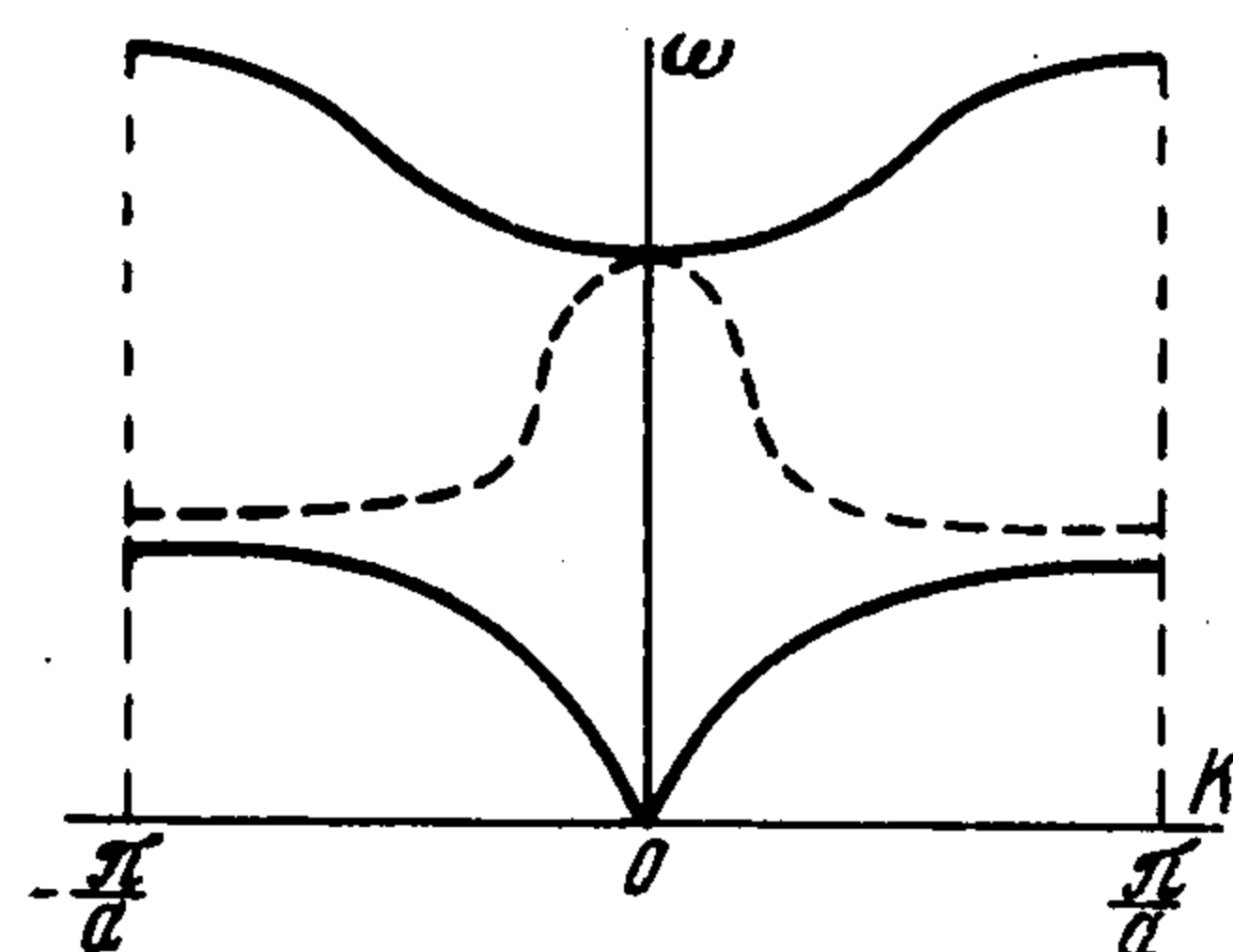
Для теории упругости главный интерес представляет акустическая область, в которой основной кинематической переменной является смещение центра масс ячейки. В связи с этим целесообразно явно выделить эту переменную.

Введем обозначения ( $p = 1, 2, \dots$ )

$$u = w_0, \quad \eta_p = w_p; \quad q = f^0, \quad \mu^p = f^p \quad (1.14)$$

Соответственно разобьем на блоки матрицу  $\Phi^{qq'}$ . Из условия инвариантности энергии относительно трансляции следует, что  $\Phi^{qq'}(k)$  представима в виде ( $p, p' = 1, 2, \dots$ )

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} k^2 \gamma(k) & ik\chi^{p'}(k) \\ \dots & \dots \\ -ik\chi^p(k) & \Gamma^{pp'}(k) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$



где  $\gamma(k)$ ,  $\chi^p(k)$  и  $\Gamma^{pp'}(k) = \overline{\Gamma^{p'p}(k)}$  — целые аналитические функции, однозначно определяемые заданием исходной матрицы  $\Phi(k)$ .

Уравнения (1.13) переписутся теперь в виде системы ( $\rho = \rho_{(0)}$ )

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho u(k) - k^2 \gamma(k) u(k) - ik\chi^p(k) \eta_p(k) &= -q(k) \\ \omega^2 \Gamma^{pp'} \eta_{p'}(k) + ik\chi^p(k) u(k) - \Gamma^{pp'}(k) \eta_{p'}(k) &= -\mu^p(k) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Переход к  $(x, t)$ -представлению очевиден: функциям  $\gamma$ ,  $\chi^p$  и  $\Gamma^{pp'}$  будут соответствовать интегральные операторы с разностными ядрами.

Упругую энергию  $\Phi$  можно записать в виде

$$\Phi = \int \varphi(x) dx \quad (1.17)$$

где  $\varphi(x)$  определена с точностью до дивергентных членов. При дополнительном условии инвариантности относительно трансляции  $\varphi(x)$  определяется однозначно и может быть интерпретирована как плотность упругой энергии. Из (1.12) при учете (1.14) и (1.15) находим

$$2\varphi(x) = \varepsilon(x) [\gamma(x) * \varepsilon(x)] + \eta_p(x) [2\chi^p(x) * \varepsilon(x) + \Gamma^{pp'}(x) * \eta_{p'}(x)] \quad (1.18)$$

Здесь  $\varepsilon(x) = u'(x)$  — макроскопическая деформация, а операция  $*$  обозначает интегральную свертку.

Данная модель, описываемая уравнениями (1.16), при условии ограниченности носителей  $u(k)$  и  $\eta_p(k)$  является точным представлением исходной модели с периодическим дискретным или непрерывным распределением масс. При этом  $\gamma(k)$ ,  $\chi^p(k)$  и  $\Gamma^{pp'}(k)$  явно выражаются через микропараметры  $\Phi(n, \xi, \xi')$ . Наоборот, при заданных  $\gamma(k)$ ,  $\chi^p(k)$  и  $\Gamma^{pp'}(k)$ , удовлетворяющих очевидным условиям, можно найти  $\Phi(n, \xi, \xi')$ . При феноменологическом подходе систему (1.16) можно рассматривать как наиболее общую одномерную модель макроскопически однородной ли-

нейно-упругой среды сложной структуры с пространственной дисперсией<sup>1</sup>.

Важно отметить, что среда с периодической структурой может быть описана методом, отличным от того, который принят в модели Борна. Введем вместо  $w(n, \xi)$  и  $f(n, \xi)$  смещение  $w(x)$  и плотность сил  $f(x)$ , зависящие от одной пространственной координаты  $x$ . В этих переменных лагранжиан имеет вид

$$2L = \int \rho(x) w'^2(x) dx - \iint w(x) \Phi(x, x') w(x') dx dx' + 2 \int w(x) f(x) dx \quad (1.19)$$

причем должны выполняться условия

$$\rho(x) = \rho(x + a), \quad \Phi(x, x') = \Phi(x + a, x' + a) \quad (1.20)$$

Обозначим через  $w(\kappa)$ ,  $f(\kappa)$  Фурье-образы  $w(x)$ ,  $f(x)$ , где  $\kappa$  (в отличие от  $k \in B$ ) принадлежит числовой оси  $R_\kappa$ . Пусть также  $\rho(\kappa)$  — Фурье-образ  $\rho(x)$  и  $\Phi(\kappa, \kappa')$  — Фурье-образ  $\Phi(x, x')$  по  $x$  и Фурье-образ по  $x'$ . Тогда

$$4\pi L = \omega^2 \iint \overline{w(\kappa)} \rho(\kappa' - \kappa) w(\kappa') d\kappa d\kappa' - \iint \overline{w(\kappa)} \Phi(\kappa, \kappa') w(\kappa') d\kappa d\kappa' + 2 \int \overline{w(\kappa)} f(\kappa) d\kappa \quad (1.21)$$

Уравнение движения в отличие от (1.13) записывается в виде интегрального уравнения

$$\omega^2 \int \rho(\kappa' - \kappa) w(\kappa') d\kappa' - \int \Phi(\kappa, \kappa') w(\kappa') d\kappa' = -f(\kappa) \quad (1.22)$$

Можно показать, что (1.13) и (1.22) при условии (1.20) являются в точности эквивалентными представлениями одной и той же физической модели. Приведем без доказательства явные формулы перехода от одного представления к другому. Для этого введем периодическую  $\delta$ -функцию

$$\delta_*(\kappa) = \frac{a}{2\pi} \sum_n e^{ina\kappa} = \sum_n \delta\left(\kappa - \frac{2\pi n}{a}\right) \quad (1.23)$$

Переход от (1.22) к (1.13) дается соотношениями ( $k \in B$ ,  $\kappa \in R_\kappa$ )

$$w_q(k) = \frac{1}{a} \int \delta_*(k - \kappa) \overline{e_q(\kappa)} w(\kappa) d\kappa, \quad f^q(k) = \frac{1}{a} \int \delta_*(k - \kappa) \overline{e_q(\kappa)} f(\kappa) d\kappa$$

$$\Phi^{qq'}(k) = \frac{1}{a^2} \iint \delta_*(k - \kappa) \overline{e_q(\kappa)} e_{q'}(\kappa') \Phi(\kappa, \kappa') d\kappa d\kappa' \quad (1.24)$$

а матрица  $I^{qq'}$  определяется (1.7). Обратные формулы

$$w(\kappa) = \frac{1}{a} e_q(\kappa) \int \delta_*(\kappa - k) w_q(k) dk, \quad f(\kappa) = \frac{1}{a} e_q(\kappa) \int \delta_*(\kappa - k) f^q(k) dk$$

$$\rho(\kappa - \kappa') = \frac{1}{a^2} \delta_*(\kappa - \kappa') I^{qq'} e_q(\kappa) \overline{e_{q'}(\kappa')} \quad (1.25)$$

$$\Phi(\kappa, \kappa') = \frac{1}{a^2} \delta_*(\kappa - \kappa') e_q(\kappa) \Phi_*^{qq'}(\kappa) \overline{e_{q'}(\kappa')}$$

где  $\Phi_*^{qq'}(\kappa)$  — периодическое продолжение  $\Phi^{qq'}(k)$ . Легко проверить, что условия (1.20) при этом выполняются.

<sup>1</sup> Отметим, что среда сложной структуры рассматривалась с другой точки зрения в работе [7].

Отметим также соотношения (1.26)

$$\Phi_*^{qq'}(\kappa) e_q(\kappa) = \int \Phi(\kappa, \kappa') e^{q'}(\kappa') d\kappa', \quad I^{qq'} e_q(\kappa) = \int \rho(\kappa' - \kappa) e^{q'}(\kappa') d\kappa'$$

Таким образом, приведенные формулы устанавливают тождественность моделей макроскопически однородной среды с пространственной дисперсией, описываемой уравнениями (1.16), и среды с периодической структурой, описываемой уравнением (1.22) при условиях (1.20). Тем не менее, первая модель в ряде случаев оказывается более удобной, в частности, при рассмотрении волновых процессов и при переходе к длинноволновым приближениям, т. е. при макроописании среды.

2. Рассмотрим некоторые наиболее важные частные модели. Пусть элементарная ячейка обладает центром симметрии. Можно показать, что в этом случае

$$e^q(-\kappa) = (-1)^q e^q(\kappa), \quad \Phi(\kappa, \kappa') = \Phi(\kappa', \kappa)$$

Из (1.24) немедленно следует

$$\Phi^{qq'}(-k) \equiv \overline{\Phi^{qq'}(k)} = (-1)^{q+q'} \Phi^{qq'}(k) \quad (2.1)$$

В то же время для более сильного условия  $\Phi^{qq'}(-k) = \Phi^{qq'}(k)$  трудно указать какую-либо наглядную модель.

Интересно выяснить, при каких условиях уравнения (1.16) среды со сложной структурой допускают преобразование в уравнения среды с простой структурой [1]. Очевидно, в этом случае  $\Phi(x, x') = \Phi(x - x')$  и, следовательно,  $\Phi(\kappa, \kappa') = \Phi(\kappa) \delta(\kappa - \kappa')$ . Из (1.26) и (1.25) находим необходимые и достаточные условия на силовую матрицу

$$\Phi_*^{qq'}(\kappa) e_q(\kappa) = \Phi(\kappa) e^{q'}(\kappa) \quad (2.2)$$

Условия на  $I^{qq'}$  зависят от характера распределения масс в ячейке. В частности, при непрерывном распределении масс с плотностью  $\rho_0 = \text{const}$

$$I^{qq'} e_q(\kappa) = \rho_0 e^{q'}(\kappa), \quad \rho_0 = \frac{1}{a^2} e_q(\kappa) I^{qq'} \overline{e_{q'}(\kappa)} \quad (2.3)$$

Пространственная дисперсия при этом обусловлена лишь нелокальностью упругого взаимодействия<sup>1</sup>. При дополнительном предположении о близкодействии осуществляется переход к обычной упругой модели.

Возвращаясь к уравнениям (1.16), рассмотрим переход к длинноволновым приближениям, т. е. к модели среды со слабой дисперсией [1]. В этом случае интегральные операторы заменяются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами. Пусть, например,  $\gamma$ ,  $\chi^p$  и  $\Gamma^{pp'}$  — четные функции  $k$ . Тогда во втором приближении

$$\gamma(k) = \gamma_0 - \gamma_2 k^2, \quad \chi^p(k) = \chi_0^p - \chi_2^p k^2, \quad \Gamma^{pp'}(k) = \Gamma_0^{pp'} - \Gamma_2^{pp'} k^2 \quad (2.4)$$

и соответствующие уравнения в  $(x, t)$ -представлении имеют вид ( $D = d/dx$ )

$$\begin{aligned} \rho u'' - D^2(\gamma_0 + \gamma_2 D^2) u - D(\chi_0^p + \chi_2^p D^2) \eta_p &= q \\ I^{pp'} \eta_{p'}' + D(\chi_0^p + \chi_2^p D^2) u + (\Gamma_0^{pp'} + \Gamma_2^{pp'} D^2) \eta_p &= \mu^p \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эти уравнения являются одномерным аналогом моментной теории упругости [4-6]. Более точно, для того чтобы из (2.5) получить одномерные уравнения моментной теории упругости, необходимо сделать два допущения: а) имеются только две степени

<sup>1</sup> В общем случае пространственная дисперсия является следствием как дальнего действия, так и периодичности (дискретности) структуры.

свободы, т. е.  $p = 1$ ; б) следует ограничиться нулевым приближением в первом уравнении, т. е. положить в нем  $\gamma_2 = 0$ ,  $\chi_2 = 0$  и сохранить второе приближение во втором уравнении. Если первое допущение соответствует выбору некоторой частной модели, то второе допущение трудно обосновать: с точки зрения теории пространственной дисперсии оно не представляется корректным.

3. Как указывалось выше, во многих задачах основной интерес представляет акустическая область колебаний. Так в кристаллах оптические частоты имеют порядок  $10^{13} \text{сек}^{-1}$ , т. е. значительно превышают частоты механических колебаний. В подобных случаях систему (1.16) можно существенно упростить и свести к одному уравнению относительно координаты центра масс ячейки.

Рассмотрим сначала уравнения нулевого приближения

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho u(k) - k^2 \gamma_0 u(k) - ik \chi_0^p \eta_p(k) &= -q(k) \\ \omega^2 I^{pp'} \eta_{p'}(k) + ik \chi_0^p u(k) - \Gamma_{0j}^{pp'} \eta_{p'}(k) &= -\mu^p(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Легко видеть, что уравнение для собственных частот при  $k = 0$  расщепляется на уравнение  $\omega = 0$  для акустической частоты и уравнение  $|\Gamma_0^{pp'} - \omega^2 I^{pp'}| = 0$  для оптических частот. Из соображений устойчивости следует, что оптические частоты не могут обращаться в нуль. Например, для двухатомной цепочки это означало бы, что она распадается на две простые не связанные между собой цепочки. Таким образом, в акустической области частот существует матрица  $A^0(\omega) = \|\Gamma_0 - \omega^2 I\|^{-1}$ . Но отсюда также следует существование эрмитовой матрицы

$$A(k, \omega) = \|\Gamma(k) - \omega^2 I\|^{-1} \quad (3.2)$$

в некоторой конечной окрестности начала координат плоскости  $k, \omega$ . Эта окрестность определяется граничной кривой, заданной уравнением  $|\Gamma(k) - \omega^2 I| = 0$ . В общем случае исследование граничной кривой представляет определенные трудности, можно лишь утверждать, что при  $k = 0$  она касается нижней оптической ветви и  $A(k, \omega)$  заведомо существует в длинноволновой части акустической области. Но для двухатомной цепочки с взаимодействием ближайших соседей можно показать, что граничная кривая (пунктирная линия на фигуре) нигде не пересекает акустическую ветвь и, следовательно,  $A(k, \omega)$  существует во всей акустической области. Область существования  $A(k, \omega)$  будем называть допустимой акустической областью.

Матрицу  $A(k, \omega)$  можно выразить через  $A^0(\omega)$  и коэффициенты  $\Gamma_s$  разложения матрицы  $\Gamma(k)$

$$\Gamma(k) = \sum_{s=0}^{\infty} (-ik)^s \Gamma_s \quad (3.3)$$

Пусть  $j(m) = \{j_1 j_2 \dots\}$  — произвольная комбинация целых чисел  $j_v$  таких, что

$$1 \leq j_v \leq m, \quad \sum_v j_v = m$$

Через  $A^{j(m)}(\omega)$  обозначим окаймленное произведение

$$A^{j(m)} = A^0 \dots A^0 \Gamma_{j_v} A^0 \dots A^0, \quad j_v \in j(m) \quad (3.4)$$

Тогда для  $A(k, \omega)$  в соответствующем круге сходимости справедливо представление в виде ряда

$$A(k, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m A^m(\omega), \quad A^m(\omega) = \sum_j A^{j(m)}(\omega) \quad (3.5)$$

Отметим, что в статическом случае ( $\omega = 0$ ) матрица  $A(k)$  выражается через  $\Gamma_s$  и числовую матрицу  $\Gamma_0^{-1}$ .

При помощи матрицы  $A(k, \omega)$  можно в допустимой акустической области разрешить второе уравнение системы (1.16) относительно  $\eta_p(k)$  и исключить  $\eta_p(k)$  в первом уравнении. Окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho u(k) - k^2 c(k, \omega) u(k) &= -Q(k) \\ \eta_p(k) &= ika_p(k, \omega) u(k) + A_{pp'}(k, \omega) \mu^{p'}(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} c(k, \omega) &= \gamma(k) - \overline{\chi^p(k)} A_{pp'}(k, \omega) \chi^{p'}(k), \quad a_p(k, \omega) = A_{pp'}(k, \omega) \chi^{p'}(k) \\ Q(k) &= q(k) + ik\mu(k), \quad \mu(k) = -\overline{a_p(k, \omega)} \mu^p(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнения (3.6) в допустимой акустической области являются точным эквивалентом системы (1.16). В нулевом приближении в окрестности акустической ветви ( $\omega \sim k$ ) они принимают вид

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho u(k) - c_0 k^2 u(k) &= -Q(k) \\ \eta_p(k) &= ia_p^0(0) k u(k) + A_{pp'}^0(0) \mu^{p'}(k) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Первое уравнение, как и следовало ожидать, совпадает с уравнением одномерного однородного континуума, характеризуемого упругой константой  $c_0$ . Именно эта упругая константа определяется из макроскопических экспериментов. Ее связь с микропараметрами следует из (3.7)

$$c_0 = \gamma_0 - \chi_0^p A_{pp'}^0(0) \chi_0^{p'} \quad (3.9)$$

что согласуется с известным выражением [2].

В правую часть уравнения входит эквивалентная плотность внешних сил  $Q$ , которая согласно (3.7) состоит из двух слагаемых. Первое является средней плотностью внешних сил  $q$ , а второе — производной (со знаком минус) плотности микромоментов  $\mu$  в точном соответствии с обычной макроскопической теорией. Таким образом, средняя плотность микромоментов  $\mu$  соответствует макроскопической плотности моментов.

Аналогично может быть интерпретирована плотность  $Q$  и в общем случае уравнений (3.6).

Развивая дальше аналогию с макроскопической теорией, естественно трактовать величину

$$\sigma(k) = c(k, \omega) \varepsilon(k) \quad (\varepsilon(k) = -iku(k)) \quad (3.10)$$

как напряжение. Первое уравнение (3.6) в  $(x, t)$ -представлении примет

теперь вид

$$\rho u''(x) - D\sigma(x) = Q(x) \quad (3.11)$$

а соотношению (3.10) будет соответствовать операторный закон Гука.

Преобразуя (1.18) с учетом (3.6), находим выражение для плотности упругой энергии

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sigma(x) \varepsilon(x) \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что напряжение  $\sigma$  можно также определить как обобщенную силу, отвечающую обобщенному перемещению — деформации  $\varepsilon$ , в полном соответствии с обычной теорией упругости.

Таким образом, данное представление более соответствует духу макроскопической теории — механике сплошной среды, чем представление, рассмотренное в § 1. В частности, едва ли имеет смысл вводить (вообще говоря, бесконечный) набор тензоров напряжений, соответствующих уравнениям (1.16). В то же время следует отметить, что если в уравнениях (1.16) имела место лишь пространственная дисперсия, то с уравнением (3.6) связана как пространственная, так и временная дисперсия, однако последняя в данном случае не приводит к диссипации энергии.

Из (3.7) при учете (1.15) и (3.2) следует, что  $c(k, \omega)$  четная функция  $k$  и  $\omega$ . Поэтому в случае слабой дисперсии закон Гука во втором приближении записывается в виде

$$\sigma(x) = (c_0 + c_2 D^2 + c_2' D_t^2) \varepsilon(x) \quad (D_t = d/dt) \quad (3.13)$$

Здесь  $c_2, c_2'$  — соответствующие коэффициенты разложения  $c(k, \omega)$  в длинноволновой окрестности акустической ветви ( $\omega \sim k$ ). Уравнения (3.11) принимают форму

$$Ju''(x) - (c_0 + c_2 D^2) D^2 u(x) = Q(x) \quad (3.14)$$

где  $J = \rho - c_2' D^2$  можно при желании истолковать как операторную инерционную характеристику среды.

В заключение отметим, что аналогичное преобразование уравнений (1.16) возможно также в окрестности оптической ветви.

Поступила 27 XII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К у н и н И. А. Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
2. Б о р н М., Х у а н К у н ь. Динамическая теория кристаллических решеток. М., Изд-во иностр. литер., 1958.
3. Б р и л л ю э н Л., П а р о д и М. Распространение волн в периодических структурах. М., Изд-во иностр. литер., 1959.
4. А э р о Э. Л., К у в ш и н с к и й Е. В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела. Физ. тверд. тела, 1964, т. 6, № 9, стр. 2689.
5. П а л ь м о в В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, стр. 401.
6. M i n d l i n R. D. Microstructure in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 16, p. 51.
7. G r e e n A. E., R i v l i n R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, p. 113.