

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОКОЛОЗВУКОВОГО ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

С. В. Фалькович, И. А. Чернов

(Саратов)

В околозвуковом диапазоне скоростей приближенные уравнения, описывающие течение газа, обладают важным классом автомодельных решений. Многие свойства околозвукового течения, как, например, характер потока вдали от обтекаемого тела, в соплах Лавала и др., были изучены с использованием этих решений в качестве главного члена [1-3].

Ниже исследуются случаи, когда автомодельные решения представляют алгебраические функции. Используя параметрическое представление искомых величин, удается во всех случаях указать вид решения, удобный для газодинамических расчетов. Тем самым получены некоторые точные решения уравнения Трикоми, при помощи которых можно изучить новые свойства околозвукового потока: течение в соплах Лавала с сомкнувшимися сверхзвуковыми зонами, течение в сопле, контур которого имеет излом стенки, течение в окрестности точки пересечения звуковой линии с границей звуковой струи и др.

1. Рассмотрим плоское безвихревое движение идеальной сжимаемой жидкости, в котором величина скорости всюду мало отличается от звуковой. На плоскости годографа приближенная система уравнений, описывающая такое течение, имеет вид [4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь ψ — функция тока, φ — потенциал скоростей, η — функция скорости, обращающаяся в нуль при критической скорости, θ — угол наклона вектора скорости.

Система (1.1) эквивалентна одному уравнению Трикоми для функции тока

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (1.2)$$

Рассмотрим автомодельные решения системы (1.1) вида [3]

$$\psi = \rho^k f(\xi), \quad \varphi = \rho^{k+1/3} g(\xi), \quad \rho = \sqrt{\theta^2 + 4/9 \eta^3}, \quad \xi = 4/9 \eta^3 / \rho^2 \quad (1.3)$$

Если подставить ψ из первого равенства (1.3) в уравнение (1.2), то для определения функции f получаем гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)f'' + [2/3 - 7/6\xi]f' + 1/2k(1/2k + 1/6)f = 0 \quad (1.4)$$

Параметры этого уравнения таковы:

$$a = -1/2k, \quad b = 1/2k + 1/6, \quad c = 2/3 \quad (1.5)$$

Решение гипергеометрического уравнения удобно представить P -функцией Римана, которая показывает положение особых точек этого

уравнения и показатели особенностей решений в этих точках

$$f = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & -1/2 k & 0 & \xi \\ 1/3 & 1/2 k + 1/6 & 1/2 & \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

В окрестности особых точек функция f может быть найдена через ряды. Так, в окрестности особой точки $\xi = 1$ два линейно независимых решения уравнения (1.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= F(-1/2 k, 1/2 k + 1/6; 1/2; 1 - \xi) \\ f_2 &= \sqrt{1 - \xi} F(1/2 - 1/2 k, 2/3 + 1/2 k; 3/2; 1 - \xi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Общее решение гипергеометрического уравнения содержит две константы $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$.

Так как $1 - \xi = \theta^2 / \rho^{-2}$, то из (1.3) и (1.7) видно, что функция тока ψ , соответствующая решению f_1 , будет функцией, четной по переменной θ , а соответствующая решению f_2 , в силу множителя θ / ρ , является нечетной по θ функцией. Легко видеть, что решение f_2 описывает течения, симметричные относительно оси x физической плоскости, к таким относятся течения в соплах Лавала, течение вдали от обтекаемого тела.

Для определения функции g подставим ψ и φ из (1.3) в равенства (1.1), получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно f и g , из которой найдем

$$g = -\frac{6}{3k+1} \xi^{2/3} (1 - \xi)^{1/2} f'(\xi) \quad (1.8)$$

Подставляя f из равенства (1.6) и используя формулу дифференцирования гипергеометрической функции, получим для g выражение

$$g = -\frac{6}{3k+1} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & -1/2 k - 1/6 & 0 & \xi \\ 2/3 & 1/2 k & 1/2 & \end{array} \right\} \quad (1.9)$$

2. Определим, при каких значениях k из (1.3) существуют алгебраические решения уравнения (1.4). Воспользуемся результатами Шварца, который решил эту задачу для гипергеометрического уравнения общего вида [6]. Найдем сначала те значения k , при которых существуют частные алгебраические интегралы уравнения (1.4), когда второе из двух линейно независимых решений может не быть алгебраической функцией. Такой случай представляется тогда и только тогда, когда одно из чисел $-1/2 k$, $1/2 k + 1/6$, $1/2 k + 2/3$, $-1/2 k + 1/2$ будет целым. Это условие определяет следующие значения:

$$k = p, \quad k = -1/3 + p \quad (p = \pm 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Соответствующие решения, имеющие вид полиномов, можно найти в книге Гудерлея [3].

Определим теперь те значения k , при которых общий интеграл гипергеометрического уравнения (1.4) является алгебраическим. Такие случаи представляются тогда и только тогда, когда разности показателей

$$\lambda = 1 - c, \quad \mu = a - b, \quad \nu = c - a - b \quad (2.2)$$

вычисленные с точностью до целой части числа с игнорированием знака, укладываются в известную таблицу Шварца [6]. Для рассматриваемого уравнения (1.5) получаем следующие пять возможностей:

$$\lambda = 1/3, \quad \mu = 1/2, \quad \nu = 1/2 \quad \text{при } k = 1/3 + p \quad (2.3)$$

$$\lambda = 1/3, \quad \mu = 1/3, \quad \nu = 1/2 \quad \text{при } k = 1/6 + p, \quad k = -1/2 + p \quad (2.4)$$

$$\lambda = 1/3, \quad \mu = 1/4, \quad \nu = 1/2 \quad \text{при } k = 1/12 + p, \quad k = -5/12 + p \quad (2.5)$$

$$\lambda = 1/3, \quad \mu = 1/5, \quad \nu = 1/2 \quad \text{при } k = 1/30 + p, \quad k = -11/30 + p \quad (2.6)$$

$$\lambda = 1/3, \quad \mu = 2/5, \quad \nu = 1/2 \quad \text{при } k = 7/30 + p, \quad k = -17/30 + p \quad (2.7)$$

Значение $k = 1/3$ из семейства (2.3) приводит к автомодельным решениям, описывающим течение в сопле Лаваля с криволинейной линией перехода, что было показано Ф. И. Франклем [2]. С. В. Фалькович [4] заметил, что в этом случае решение будет алгебраической функцией и нашел соответствующий общий интеграл. Ф. И. Франкль [5] указал затем все семейство (2.3) и вид тех частных интегралов, которые описывают течения, симметричные относительно оси x физической плоскости. Значение $k = -5/3$ из того же семейства дает решение задачи об основной особенности течения вдали от обтекаемого тела [1]. При $k = 4/3$ существует частный интеграл, описывающий течение около угла. Отметим попутно, что соответствующее решение, найденное Вальо-Лауриным [7] численно, получено в аналитической форме в работе авторов [8]. В этой работе найдены также некоторые частные интегралы, существующие при $k = 1/6$ из (2.4), при $k = 1/12$ из (2.5) и при $k = 1/30$ из (2.6). Ю. Б. Лифшиц и О. С. Рыжов [9] другим способом получили те же частные интегралы при $k = 1/6$ и $k = 1/12$ и указали семейства (2.4) и (2.5), однако в их работе речь идет о частных алгебраических интегралах.

3. При фактическом вычислении гипергеометрической функции, входящей в равенство (1.6), будем использовать метод Шварца [10]. Уравнение (1.4) приведем к нормальной форме, делая замену

$$h(\xi) = \xi^{1/3} (1 - \xi)^{1/4} f(\xi) \quad (3.1)$$

Для определения h получаем уравнение

$$\frac{d^2 h}{d\xi^2} + Ih = 0 \quad \left(I = \frac{2}{9\xi^2} + \frac{3}{16(1-\xi)^2} + \frac{23 - (6k+1)^2}{144\xi(1-\xi)} \right) \quad (3.2)$$

Пусть f_1 и f_2 — два линейно независимых частных интеграла уравнения (1.4), не обязательно совпадающие с решениями (1.7). Им соответствуют два интеграла h_1 и h_2 уравнения (3.2). Введем в рассмотрение функцию Шварца, которая определяется как отношение частных интегралов

$$s = f_1 : f_2 = h_1 : h_2 \quad (3.3)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция s . Так как каждый из интегралов f_1 и f_2 содержит по две произвольные постоянные, то s , определяемая с точностью до мультипликативной постоянной, содержит три константы. Поэтому уравнение для s будет третьего порядка. Обозначая штрихом дифференцирование по ξ , можно записать

$$h_1'' + Ih_1 = 0, \quad h_2'' + Ih_2 = 0 \quad (3.4)$$

Подставив в первое из равенств (3.4) вместо h_1 его выражение, равное sh_2 , и учитывая второе уравнение (3.4), получим

$$\frac{s''}{s'} = -2 \frac{h_2'}{h_2} \quad (3.5)$$

Дифференцируя это равенство по ξ и используя второе из равенств (3.4) и (3.5) для исключения h_2 и ее производных, найдем искомое уравнение для функции s

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2} \left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = 2I \quad (3.6)$$

Если найдено частное решение уравнения (3.6), то, интегрируя равенство (3.5), получим сначала решение $h_2 = (s')^{-1/2}$ уравнения (3.2), а затем, используя соотношение (3.3), второе решение этого уравнения $h_1 = s (s')^{-1/2}$. Общее решение уравнения (3.4) имеет тогда вид

$$h = (s')^{-1/2} (C_1 s + C_2) \quad (3.7)$$

Учитывая затем соотношение (3.1), выпишем общий интеграл гипергеометрического уравнения (1.4)

$$f = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^{1/2} \xi^{-1/3} (1 - \xi)^{-1/4} (C_1 s + C_2) \quad (3.8)$$

4. После того как решение на плоскости годографа будет найдено, необходимо совершить обратный переход на физическую плоскость. Возвращаясь к переменным φ и ψ , получим вместо (1.1) систему

$$\frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \eta \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.1)$$

Ограничимся рассмотрением течений, мало отличающихся от плоскопараллельного потока вдоль оси x физической плоскости. Тогда в уравнениях (4.1) можно заменить φ на x , ψ на y , η на $-u$, θ на v , где u и v — безразмерные компоненты вектора скорости возмущения звукового потока на оси прямоугольной системы x, y . При этом условии система (4.1) эквивалентна приближенной системе околосвуковых уравнений, полученной Карманом [11].

Автомодельные решения на физической плоскости имеют вид [12, 13]

$$u = y^{2(n-1)} U(\zeta), \quad v = y^{3(n-1)} V(\zeta), \quad \zeta = xy^{-n} \quad (4.2)$$

При этом n связано с k из равенств (1.3) соотношением

$$n = \frac{3k + 1}{3k} \quad (4.3)$$

Функции U и V удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [14]:

$$u\zeta \frac{dn}{d\zeta} + \frac{dV}{d\zeta} - 2(n-1)U = 0, \quad U \frac{dU}{d\zeta} - 3(n-1)V + n\zeta \frac{dV}{d\zeta} = 0 \quad (4.4)$$

Вместо U и V введем переменные [15]

$$t = U\zeta^{-2}, \quad \tau = V\zeta^{-3} \quad (4.5)$$

Тогда система (4.4) эквивалентна системе

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2(n-1)t^2 + 3t\tau - 3n\tau}{2t^2 - 2nt - 3(n-1)\tau}, \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{(n^2 - t)dt}{2t^2 - 2nt - 3(n-1)\tau} \quad (4.6)$$

Эти уравнения имеют на конечном расстоянии от начала координат следующие особые точки:

$$A (t = 0, \tau = 0), \quad C (t = n^2, \tau = 2/3n^3), \quad D (t = 1, \tau = -2/3) \quad (4.7)$$

Точка A соответствует оси x физической плоскости, особая точка C изображает предельную характеристику. Бесконечность плоскости t, τ , которую будем обозначать точкой B , соответствует оси y .

Второе уравнение системы (4.6) показывает, что если интегральная кривая $t = t(\tau)$ первого из уравнений (4.6) пересекает линию $t = n^2$ в точке, отличной от особой точки C , то $d\xi = 0$. Это означает появление в соответствующем течении предельной линии.

Плоскость переменных t, τ , называемая фазовой плоскостью, удобна при изучении течений, в которых присутствуют ударные волны. Обозначая индексом 1 и 2 параметры, соответствующие разным сторонам ударной волны, запишем условия на скачках [16]

$$t_2 = 2n^2 - t_1, \quad \tau_2 = \tau_1 + 2nt_1 - 2n^3, \quad \zeta_1 = \zeta_2 \quad (4.8)$$

Чтобы определить линию тока, необходимо проинтегрировать приближенное уравнение

$$\frac{dy^\circ}{dx} = v \quad \text{при} \quad y = \text{const} \quad (4.9)$$

Проинтегрируем второе из уравнений (4.1) по площади, ограниченной линией $\zeta = \text{const}$, линиями $y = 0$, $x = -\infty$, $y = y_0$. Применяя формулу Грина, получим

$$\oint \left(\frac{u^2}{2} dy + v dx \right) = 0 \quad (4.10)$$

Вдоль $y = y_0$ первое слагаемое в (4.10) дает нуль, второе y° . Вдоль линий $\zeta = \text{const}$, после подстановки u и v из (4.3), интеграл легко вычислить

$$y^\circ = \frac{1}{4n-3} y_0^{4n-3} Y(\zeta) \quad \left(Y = \frac{1}{2} U^2 + n\zeta V \right) \quad (4.11)$$

Исследование, проведенное во втором параграфе, устанавливает все возможные случаи, когда нелинейная система (4.4) разрешима в алгебраических функциях, соответствующие значения n легко найти, используя формулу перехода (4.3) и результаты, полученные в (2.1) и в (2.3)–(2.7).

5. Рассмотрим теперь по одному значению k из каждого бесконечного семейства (2.4)–(2.7) и найдем соответствующий общий интеграл, при этом другие гипергеометрические функции из того же семейства можно найти кратным дифференцированием найденной функции. Семейство (2.3) считается известным и здесь не рассматривается [5].

Возьмем значение $k = 1/6$ из семейства (2.4). При этом значении k существует следующее решение уравнения Шварца [6]:

$$\xi = \left[\frac{H_1(s)}{F_1(s)} \right]^3, \quad \begin{aligned} H_1(s) &= s^4 + 2\sqrt{3}s^2 - 1 \\ F_1(s) &= s^4 - 2\sqrt{3}s^2 - 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Многочлены H_1 и F_1 таковы, что выполняется тождество

$$H_1^3 - F_1^3 = 12\sqrt{3} [T_1(s)]^2, \quad T_1(s) = s(s^4 + 1) \quad (5.2)$$

Используя выражение (5.1) для ξ и тождество (5.2), найдем

$$1 - \xi = -12\sqrt{3} \frac{T_1^2}{F_1^3} \quad (5.3)$$

Дифференцируя равенство (5.1), вычисляем

$$\frac{d\xi}{ds} = -24\sqrt{3} T_1 H_1^2 F_1^{-4} \quad (5.4)$$

Найдем теперь функцию f по формуле (3.8)

$$f = (C_1 s + C_2) F_1^{-1/4} \quad (5.5)$$

Равенства (5.1) и (5.5) совместно определяют параметрически через s гипергеометрическую функцию $f = f(\xi)$, которая является решением уравнения (1.4) при $k = 1/6$. Найдем теперь зависимость $g = g(\xi)$, используя формулу (1.8). Продифференцируем равенство (5.5) по s

$$\frac{df}{ds} = -[M_1(s)] F_1^{-5/4}, \quad M_1(s) = C_2 s^3 - \sqrt{3} C_1 s^2 + \sqrt{3} C_2 s + C_1 \quad (5.6)$$

Используя соотношение $df/d\xi = (df/ds)(ds/d\xi)$ и равенства (5.6), (5.4), (5.3), (5.1), подставим ξ , $1 - \xi$ и $df/d\xi$, вычисленные через s в формулу (1.8)

$$g = -3^{-3/4} M_1 F_1^{-3/4} \quad (5.7)$$

В рассматриваемом случае можно найти явное выражение функции $f = f(\xi)$, а следовательно, и функции $g = g(\xi)$. В самом деле, уравнение (5.1) можно разрешить относительно функции s в радикалах [6]

$$s = -\sqrt{-i} \left(\frac{\delta \sqrt{1 - \varepsilon \xi^{1/3}} - \delta^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^{-1} \xi^{1/3}}}{\delta \sqrt{1 - \varepsilon \xi^{1/3}} + \delta^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^{-1} \xi^{1/3}}} \right)^{1/2} \quad (5.8)$$

$$\delta = \exp \frac{\pi i}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} i, \quad \varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Если подставить s из (5.8) в (5.5), то получим общий интеграл уравнения (1.4). Найдем явное выражение частных решений f_1 и f_2 , определенных равенствами

$$f_1 = F\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1 - \xi\right) = \frac{1}{\sqrt{3^{1/4} 2}} \sqrt{\delta \sqrt{1 - \varepsilon \xi^{1/3}} + \delta^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^{-1} \xi^{1/3}}} \quad (5.9)$$

$$f_2 = \sqrt{1 - \xi} F\left(\frac{5}{12}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; 1 - \xi\right) = \frac{\sqrt{3^{1/4} 6}}{\sqrt{i}} \sqrt{\delta \sqrt{1 - \varepsilon \xi^{1/3}} - \delta^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^{-1} \xi^{1/3}}} \quad (5.10)$$

В предлагаемой работе предпочтение, однако, отдается параметрическому представлению всех искомых функций, что дает возможность во всех случаях (2.4) — (2.7) до конца решить задачу в удобном для газодинамических расчетов виде.

Получим соответствующее случаю $k = 1/6$ решение системы (4.4). Найдем переменную ζ , определенную равенством (4.2), используя выражения (1.3), (5.5) и (5.7)

$$\zeta = \frac{\varphi}{\psi^3} = G \frac{1 + \sqrt{3} E s - \sqrt{3} s^2 + E s^3}{(E + s)^3} \quad \left(E = \frac{C_2}{C_1} = \text{const}, \quad G = \text{const}\right) \quad (5.11)$$

Равенства (4.2) с учетом замены (4.5) можно записать в виде

$$t = \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^2 u, \quad \tau = \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^3 v \quad (5.12)$$

Если подставить найденные φ и ψ в правые части этих равенств, то получим в параметрическом виде общее решение первого из уравнений (1.6)

$$t = -3 \sqrt{3} \frac{(s^4 - 2 \sqrt{3} s^2 - 1)(s + E)^2}{(1 + \sqrt{3} E s - \sqrt{3} s^2 + E s^3)^2}, \quad \tau = 36 \frac{s(s^4 + 1)(s + E)^3}{(1 + \sqrt{3} E s - \sqrt{3} s^2 + E s^3)^3} \quad (5.13)$$

По формулам (4.5), используя ζ , найденное в (5.11), определим функции U и V

$$U = -3 \sqrt{3} G^2 \frac{s^4 - 2 \sqrt{3} s^2 - 1}{(E + s)^4}, \quad V = 36 G^3 \frac{s(s^4 + 1)}{(E + s)^6} \quad (5.14)$$

Равенства (5.14) совместно с (5.11) определяют параметрически решения $U = U(\zeta)$, $V = V(\zeta)$ системы (4.4).

Ю. В. Лифшиц и О. С. Рыжов [14], исследуя задачу об асимптотическом типе плоско-параллельного течения в окрестности центра сопла Лаваля, рассмотрели сопло, соответствующее значению $n = 3$. Имеется возможность выписать это решение в ко-

вечном виде. На плоскости годографа оно дается функцией f_2 , определенной в (5.10). Найдем соответствующее решение на физической плоскости. Течение, симметричное относительно оси x на плоскости $t\tau$, описывается следующим разложением в окрестности особой точки A (4.7) уравнения (4.6):

$$\tau = \frac{2(n-1)}{n} t^2 + \frac{2(1-n)(12n^2 - 25n + 12)}{n^3} t^3 + \dots \quad (5.15)$$

Это разложение для случая $n = 3$ получится из (5.13), если положить $E = 0$

$$t = -\frac{3\sqrt{3}(s^4 - 2\sqrt{3}s^2 - 1)s^2}{(1 - \sqrt{3}s^2)^2}, \quad \tau = 36 \frac{(s^4 + 1)s^4}{(1 - \sqrt{3}s^2)^3} \quad (5.16)$$

Соответствующая кривая показана на фиг. 1. Значению параметра $s = 0$ соответствует точка A на плоскости $t\tau$ и ось x — на физической плоскости. Если увеличивать s , придавая параметру различные действительные значения, то на плоскости $t\tau$ происходит движение вдоль кривой 1 от точки A в сторону $t > 0$. При $s(2 - 3^{1/2})^{1/2}$ достигается особая точка C . При дальнейшем увеличении s до значения $s = 3^{-1/4}$ получается кривая CB_1 , уходящая на бесконечность. Затем кривая появляется со стороны $\tau < 0$ (точка B_2). При $s = 3^{1/4}$ происходит пересечение линии $t = 9$ в точке L , что означает предельную линию. Если $s \rightarrow \infty$, то интегральная кривая $t = t(\tau)$ уходит на бесконечность в точке B_3 , имея асимптотическое поведение $\tau = 4t$. В общем случае произвольного показателя автомодельности, легко показать, что если интегральная кривая на плоскости $t\tau$ имеет асимптотическое поведение

$$\tau \sim 2(n-1)t \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (5.17)$$

то соответствующее аналитическое течение будет симметрично относительно оси y физической плоскости. При $n = 3$ оказалось, что течение, симметричное относительно оси x , является симметричным и относительно оси y . Поэтому при аналитическом продолжении за ось y на плоскости $t\tau$ происходит проход по описанной кривой в обратном порядке $B_3LB_2B_1CA$. Соответствующее течение, рассматриваемое в целом мало интересно с физической точки зрения из-за наличия области тройного покрытия физической плоскости, которая не может быть устранена введением скачков.

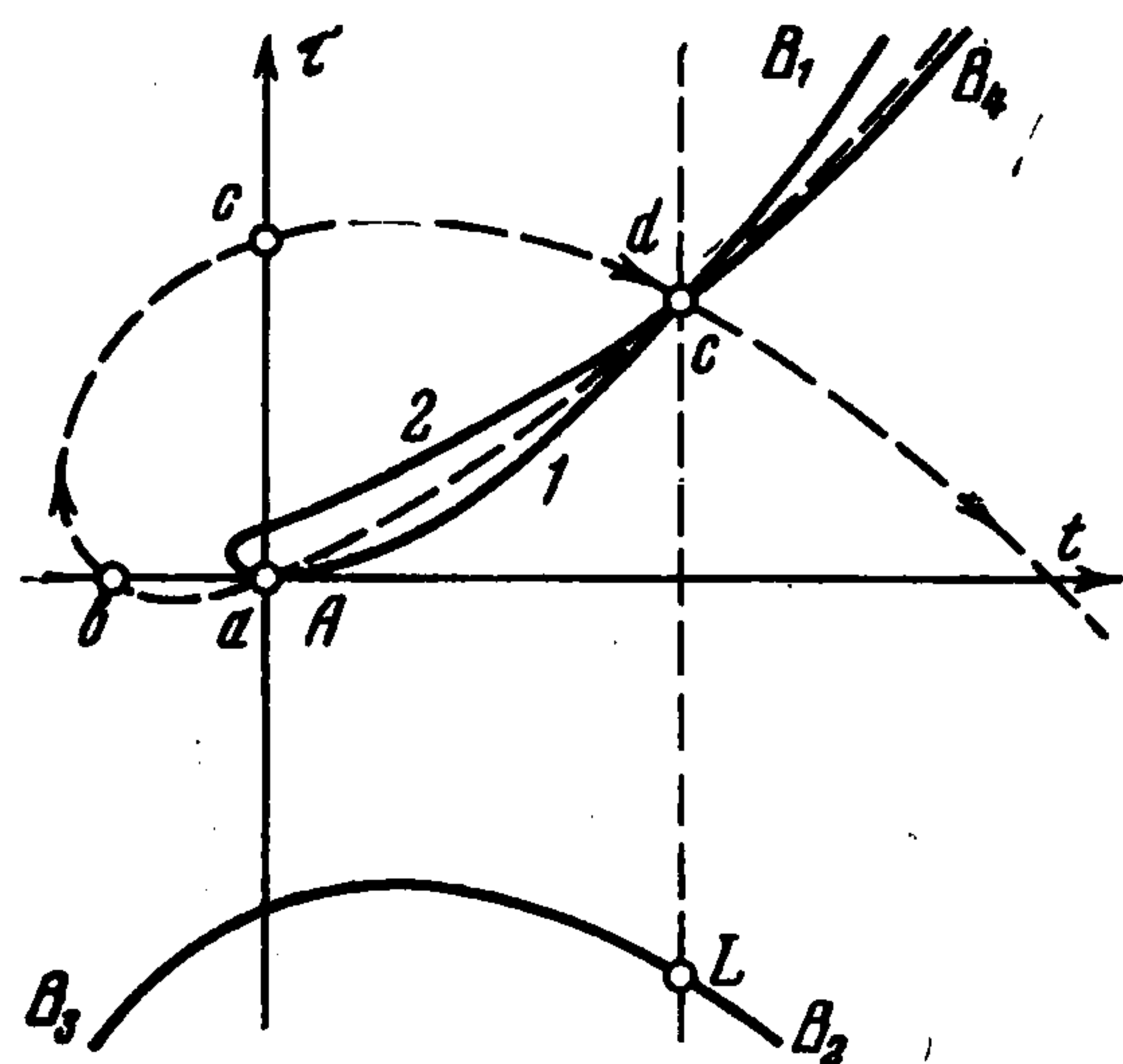
Соотношения (5.16) показывают, что можно построить вещественную кривую $t = t(\tau)$, придавая параметру s не только действительные, но и чисто мнимые значения. Введем обозначение $s = is_1$. Тогда формулы (5.16) примут вид

$$t = \frac{3\sqrt{3}(t_1^4 + 2\sqrt{3}s_1^2 - 1)}{(1 + \sqrt{3}s_1^2)^2}, \quad \tau = \frac{36(1 + s_1^4)s_1^4}{(1 + \sqrt{3}s_1^2)^3}$$

Поведение этой кривой схематически показано на фиг. 1. При $s_1 = 0$ получаем точку A , при увеличении s_1 следуем от A в сторону $t < 0$, затем пересекаем линию $t = 0$, что означает достижение звуковой скорости при $s_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, затем вдоль кривой 2 попадаем в точку C . Точка C достигается при $s_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. При дальнейшем увеличении s_1 строится кривая CB_4 . Если $s_1 \rightarrow \infty$, то $\tau \sim 4t$. Это означает симметрию течения относительно оси y . При аналитическом продолжении за ось y мы должны пройти по построенной кривой в обратном направлении B_4C2A .

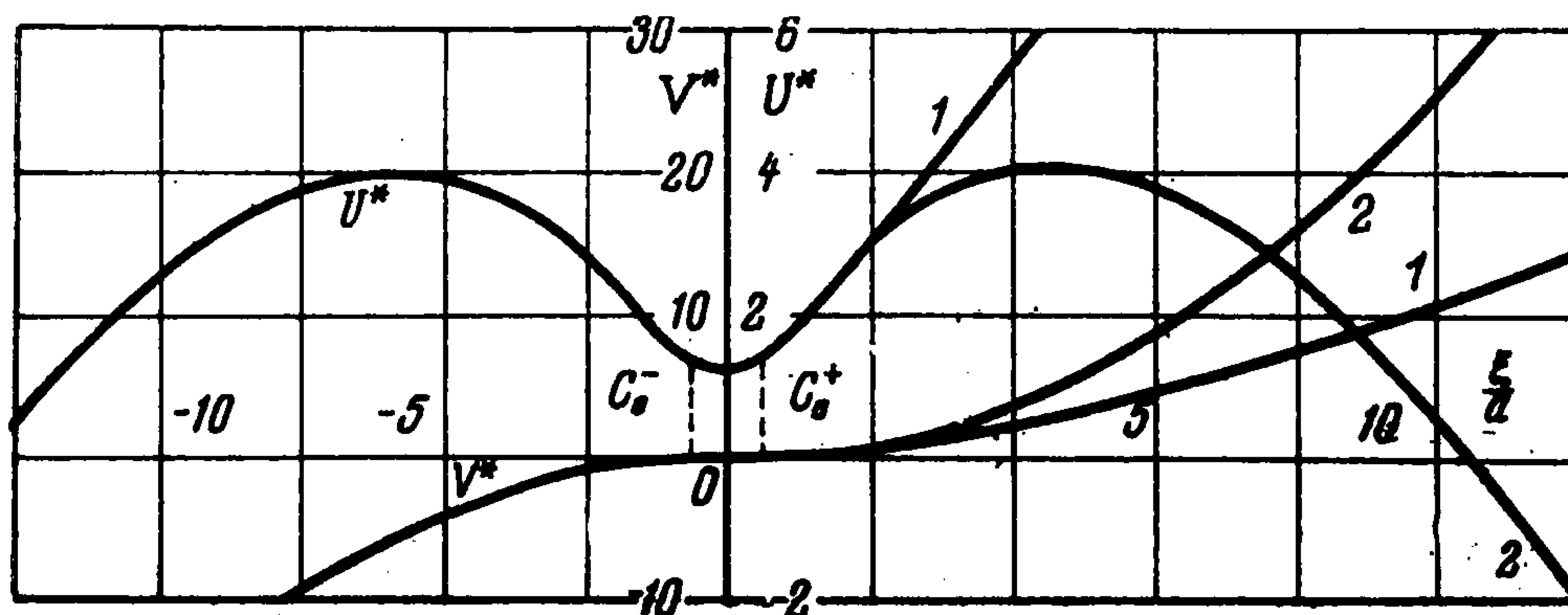
Построим соответствующее течение. В формулах (5.11) и (5.14) положим $E = 0$, $s = is_1$, $G = iG_1$; получим.

$$\zeta = -G_1 \frac{1 + \sqrt{3}s_1^2}{s_1^3}, \quad U = 3\sqrt{3}G_1^2 \frac{s_1^4 + 2\sqrt{3}s_1^2 - 1}{s_1^4}, \quad V = -36G_1^3 \frac{s_1^4 + 1}{s_1^5} \quad (5.18)$$



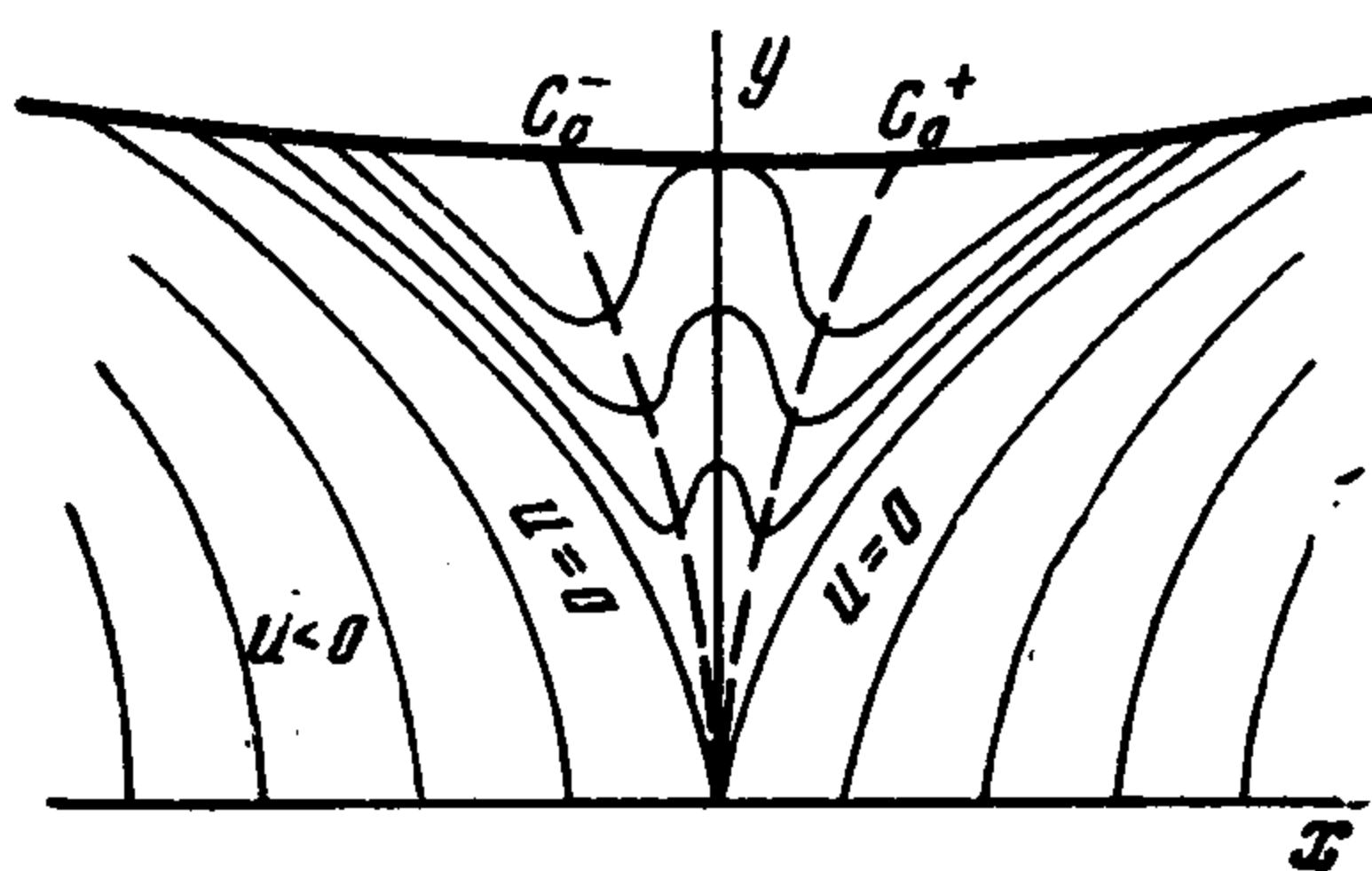
Фиг. 1

Эти формулы определяют функции $U = U(\zeta)$ и $V = V(\zeta)$, которые характеризуют величину компонент скорости u и v вдоль прямых $y = \text{const}$, для левой полуплоскости $\zeta \leq 0$. В правой полуплоскости нужно воспользоваться соотношениями (5.18), положив $G_1 = -G_2$. Эти функции изображены на фиг. 2, где нужно брать в правой полуплоскости ветвь, обозначенную индексом 2. Построение линий тока по формуле (4.11) показывает, что найдено течение в сопле Лавала, имеющем две

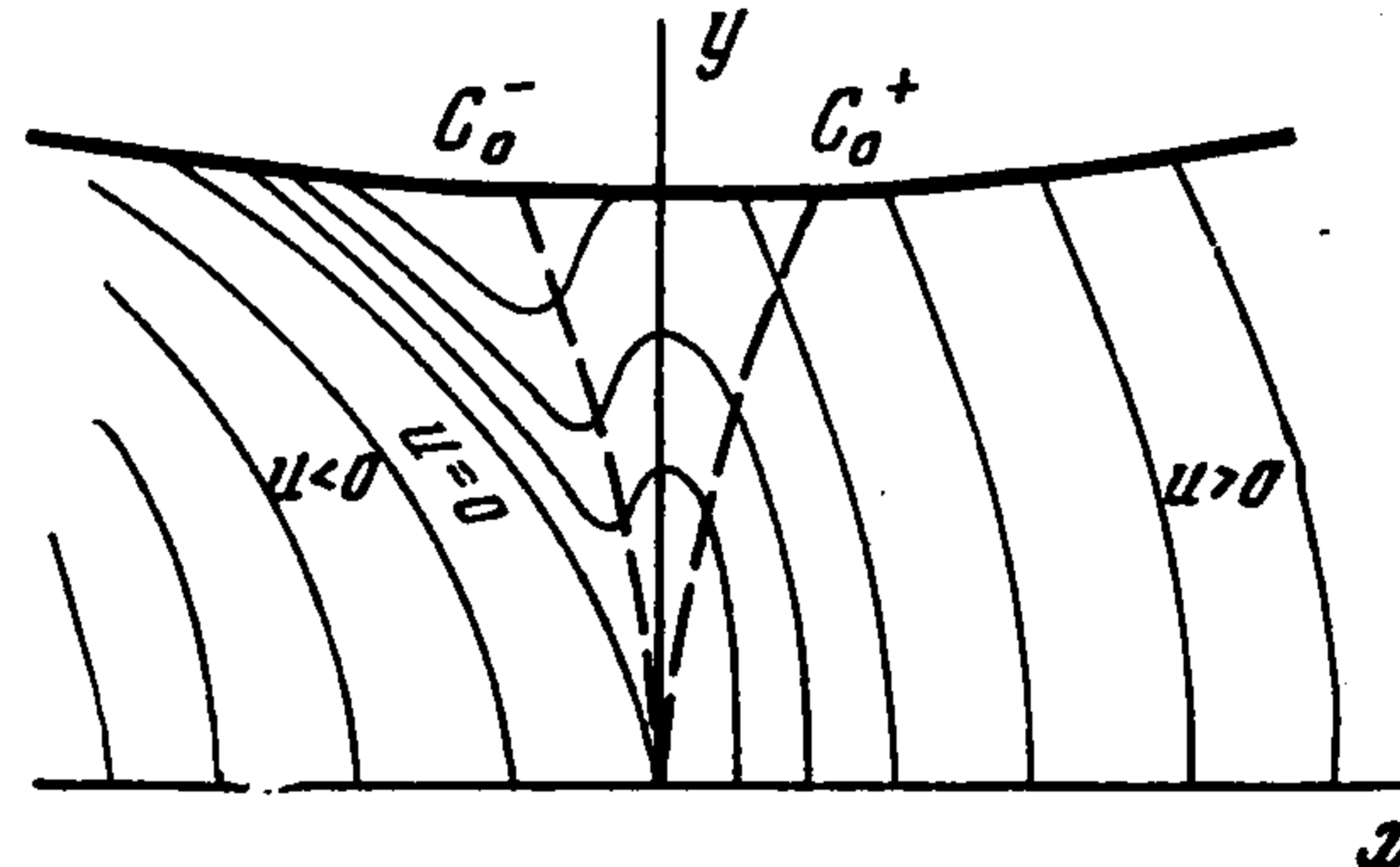


Фиг. 2

плоскости симметрии x и y . На входе течение дозвуковое, затем достигается скорость звука, поток разгоняется, но подтормаживается в критическом сечении, снова разгоняется, а затем плавно переходит в дозвуковой поток. Это течение является предельным течением в сопле Лавала с местными сверхзвуковыми зонами, сомкнувшимися на оси x сопла. На фиг. 3 показана форма стенок и линии $u = \text{const}$, при этом C_0^- предельная характеристика, приходящая в центр сопла, C_0^+ — исходящая из центра. Важно заметить, что течение аналитическое всюду за исключением начала координат, где



Фиг. 3



Фиг. 4

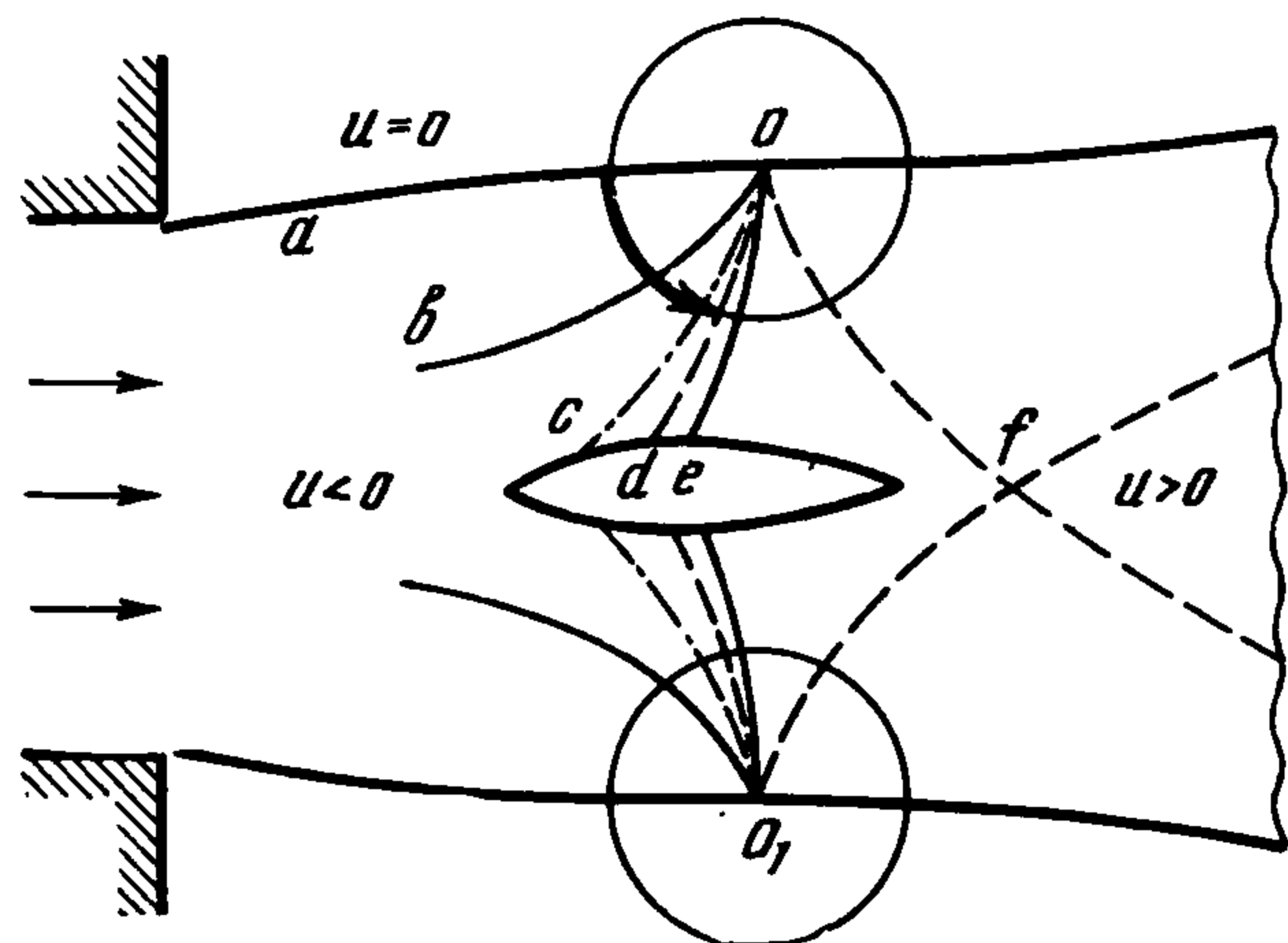
расположена особенность, характеризующая точку слияния сверхзвуковых зон. Найдем распределение продольной компоненты скорости u вдоль оси сопла $u = -\text{const } x^{4/3}$, откуда видно, что вторая производная d^2u/dx^2 обращается в бесконечность при $x = 0$. Отметим, что подобные течения, рассмотренные в работе Томтики и Тамады [17] и в работе О. С. Рыжова [18], не являются аналитическими, как вдоль приходящей в центр характеристики C_0^- , так и вдоль исходящей C_0^+ характеристики и могут быть реализованы лишь при специальной форме стенок. Течение же, показанное на фиг. 3, в некоторый момент осуществляется, по-видимому, в любом сопле в окрестности его центра.

Наряду с течением, показанным на фиг. 3, можно рассмотреть при $n = 3$ широкий класс течений в соплах Лавала со слабыми разрывами вдоль C_0^- - и C_0^+ -характеристик и с ударными волнами аналогично тому, как это сделано О. С. Рыжовым [18] в случае $n = 2$. Остановимся на одном из таких течений. Пусть на плоскости yt изображающая кривая есть $A_2CB_4B_4C_1A$. Это означает, что во входной части до C_0^+ -характеристики течение совпадает с рассмотренным, вдоль C_0^+ характеристики существует слабый разрыв, после которого течение, оставаясь симметричным относительно оси x , является сверхзвуковым вплоть до оси. C_0^+ -характеристика несет разрыв третьих производных составляющих скорости возмущения u, v . Функции U и V нового

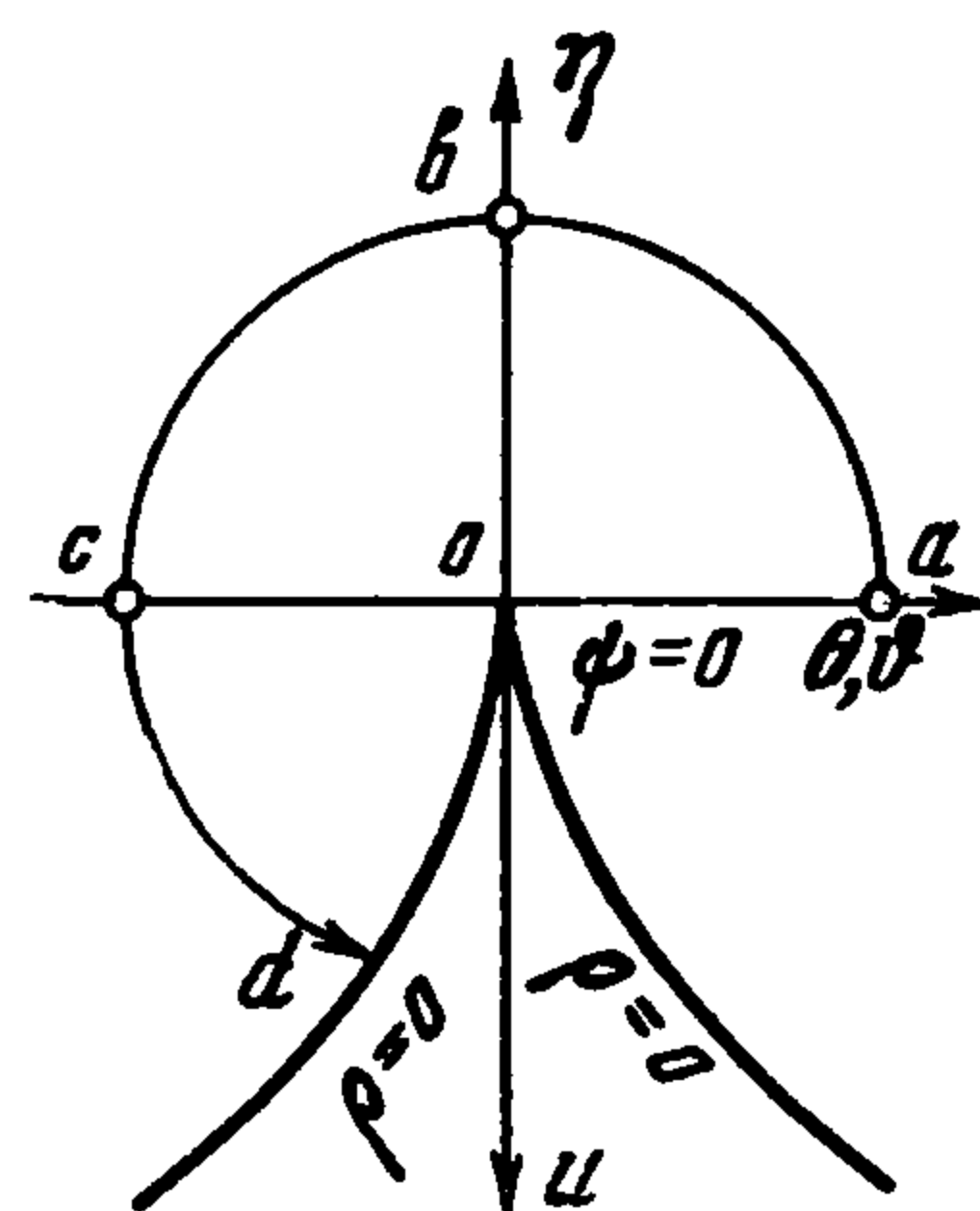
течения показаны на фиг. 2, где в области $\zeta > \zeta_{C_0^+}$ нужно брать ветвь, обозначенную индексом 1. Форма стенок сопла и линии $u = \text{const}$ изображены на фиг. 4. Это течение изучалось Ю. Б. Лифшицем и О. С. Рыжовым [14].

Используя построенные решения уравнения Трикоми, проследим за сменой различных режимов течений газа через сопло Лавала, которое симметрично относительно оси O_y , совпадающей с критическим сечением.

Рассмотрим течение в сопле, которое симметрично относительно оси y , совпадающей с критическим сечением. При дозвуковых скоростях поле течения в этом сопле также симметрично относительно оси y . При разгоне газа в окрестности критического



Фиг. 5



Фиг. 6

сечения с двух сторон появляются местные сверхзвуковые зоны, размер которых увеличивается при повышении расхода. При удалении от зон течение остается симметричным относительно y , в самих зонах, вообще говоря, могут возникнуть ударные волны, нарушающие симметричность. Как показывает фиг. 3 в предельном случае, когда сверхзвуковые зоны сомкнулись, возможно сохранение симметрии течения, но в следующий момент (фиг. 4) происходит выход на режим работы сопла Лавала, когда симметрия резко нарушается. Далее должно, по-видимому, произойти «растворение» описанной особенности сомкнувшихся сверхзвуковых зон и переход к течению, аналитическому в центре сопла, которое соответствует значению $n = 2$. Можно предположить, что течение, показанное на фиг. 4, не является устойчивым. Строгая проверка предложенного описания требует решения уравнений нестационарного двумерного околозвукового течения.

В качестве другого важного течения, которое описывается автомодельным решением с $n = 3$, отметим течение, возникающее в окрестности точки пересечения границы звуковой струи со звуковой линией. На фиг. 5 показана струя с критической скоростью на границе, в струю помещено тело. Поток до обтекаемого тела является дозвуковым, затем он разгоняется и становится сверхзвуковым позади тела, Oa — звуковая линия, Ob — линия горизонтального наклона скорости, Oc — вторая звуковая линия, Od — предельная характеристика C_0^+ , Oe — линия горизонтального наклона скорости, Of — предельная характеристика C_0^- .

Рассмотрим окрестность точки O на плоскости годографа (фиг. 6). На этой фигуре соответствующие линии обозначены теми же буквами, что и на фиг. 5. Характерной чертой рассматриваемого течения является тот факт, что линия тока Oa является в то же время звуковой линией, на которой выполняется условие $\eta = 0$. На плоскости годографа это условие формулируется так: $\psi = 0$ на линии Oa . В окрестности $\eta = 0$ существует частное решение гипергеометрического уравнения (1.4), определяемое разложением

$$f_3 = \frac{\eta}{(3/2 \rho)^{2/3}} F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{3}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) \quad (5.19)$$

Решение f_3 определяет функцию тока ψ , удовлетворяющую граничному условию: $\psi = 0$ при $\eta = 0$. Совершим теперь аналитическое продолжение f_3 (5.19) в окрестность предельной характеристики Od , как показано на фиг. 6, и потребуем, чтобы функция тока ψ была там регулярна. Аналитическое продолжение f_3 в окрестность линии Ob дается формулой [19]

$$f_3 = Q_1 \frac{\eta}{(\frac{3}{2}\rho)^{2/3}} F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{3}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) + \\ + Q_2 \frac{\eta}{(\frac{3}{2}\rho)^{2/3}} \frac{\theta}{\rho} F\left(\frac{k}{2} + 1, -\frac{k}{2} + \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) \quad (5.20)$$

$$Q_1 = \frac{\Gamma(4/3) \Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2 k + 1) \Gamma(-1/2 k + 5/6)}, \quad Q_2 = \frac{\Gamma(4/3) \Gamma(-1/2)}{\Gamma(-1/2 k + 1/3) \Gamma(1/2 k + 1/2)}$$

Затем следует воспользоваться соотношениями, при помощи которых производится аналитическое продолжение в окрестность Oc

$$F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{3}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) = D_1 F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{3}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) + \\ + D_2 \frac{(\frac{3}{2}\rho)^{2/3}}{\eta} F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{k}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) \quad (5.21)$$

$$F\left(\frac{k}{2} + 1, -\frac{k}{2} + \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) = -D_3 \frac{\rho}{\theta} F\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) - \\ - D_4 \frac{(\frac{3}{2}\rho)^{2/3}}{\eta} \frac{\rho}{\theta} F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{k}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) \quad (5.22)$$

$$D_1 = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(-1/3)}{\Gamma(1/2 k + 1/6) \Gamma(-1/2 k)}, \quad D_2 = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/3)}{\Gamma(-1/2 k + 1/3) \Gamma(1/2 k + 1/2)} \\ D_3 = \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(-1/3)}{\Gamma(-1/2 k + 1/2) \Gamma(1/2 k + 2/3)}, \quad D_4 = \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(1/3)}{\Gamma(1/2 k + 1) \Gamma(-1/2 k + 5/6)}$$

Подставляя в правую часть равенства (5.20) функции из (5.21) и (5.22), получим для окрестности линии Oc

$$f_3 = \frac{\eta E_1}{(\frac{3}{2}\rho)^{2/3}} F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{3}; \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) + E_2 F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{k}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) \quad (5.23)$$

$$E_1 = Q_1 D_1 - Q_2 D_3, \quad E_2 = Q_1 D_2 - Q_2 D_4$$

Осталось совершить продолжение в окрестность предельной характеристики Od , которое производится с использованием формул [19]

$$F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{3}; \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) = \\ = R_1 \left(-\frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right)^{\frac{k}{2} - \frac{1}{3}} F\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{2}; -\frac{k}{2}; -k + \frac{5}{6}; \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right) + \\ + R_2 \left(-\frac{4\eta^3}{9\rho^2}\right)^{-\frac{k}{2} - \frac{1}{2}} F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{6}; k + \frac{7}{6}; \frac{9\rho^2}{4\eta^3}\right) \quad (5.24)$$

$$F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{k}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) = \\ = R_3 \left(-\frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right)^{-\frac{k}{2} - \frac{1}{6}} F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{6}; k + \frac{7}{6}; \frac{9\rho^2}{4\eta^3}\right) + \\ + R_4 \left(-\frac{4\eta^3}{9\rho^2}\right)^{\frac{k}{2}} F\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2} + \frac{1}{3}; -k + \frac{5}{6}; \frac{9\rho^2}{4\eta^3}\right) \quad (5.25)$$

$$R_1 = \frac{\Gamma(4/3) \Gamma(k + 1/6)}{\Gamma(1/2 k + 1/2) \Gamma(1/2 k + 1)}, \quad R_2 = \frac{\Gamma(4/3) \Gamma(-k - 1/6)}{\Gamma(1/3 - 1/2 k) \Gamma(-1/2 k + 5/6)}$$

$$R_3 = \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(-k - 1/6)}{\Gamma(-1/2 k) \Gamma(-1/2 k + 1/2)}, \quad R_4 = \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(k + 1/6)}{\Gamma(1/2 k + 1/6) \Gamma(1/2 k + 2/3)}$$

Подставим функции, найденные в (5.24), (5.25), в равенство (5.23) и запишем функцию тока ψ (1.3), которая соответствует решению f_3

$$\psi = N_1 \left(-\frac{4}{9} \eta^3 \right)^{\frac{k}{2}} F \left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2} + \frac{1}{3}; -k + \frac{5}{6}; \frac{9\rho^2}{4\eta^3} \right) +$$

$$+ N_2 \left(-\frac{4}{9} \eta^3 \right)^{-\frac{k}{2} - \frac{1}{6}} \rho^{2k+1/3} F \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{6}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}; k + \frac{7}{6}; \frac{9\rho^2}{4\eta^3} \right) \quad (5.26)$$

Здесь

$$N_1 = -Q_1 D_1 R_1 + Q_2 D_3 R_1 + Q_1 D_2 R_4 - Q_1 D_4 R_4$$

$$N_2 = -Q_1 D_1 R_2 + Q_2 D_3 R_2 + Q_1 D_2 R_3 - Q_2 D_4 R_3$$

Если вместо коэффициентов Q, D, R подставить их выражения из соотношений (5.20)–(5.25) и воспользоваться известной формулой для Γ -функции $\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \pi / \sin \pi z$, то коэффициентам N_1 и N_2 можно придать вид

$$N_1 = \frac{4}{3} \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(k + 1/6)}{k \Gamma(1/2 k) \Gamma(1/2 k + 1/2)} \cos \pi k$$

$$N_2 = \frac{2}{3} \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(-k - 1/6)}{\Gamma(-1/2 k + 5/6) \Gamma(-1/2 k + 1/3)} \cos \pi(k + 1/3) \quad (5.27)$$

Если в выражении (5.26) коэффициент N_2 при втором слагаемом равен нулю, то функция тока ψ регулярна в окрестности предельной характеристики, определяемой равенством $\rho = 0$. Получаем следующие значения k :

$$k = \frac{p}{2} - \frac{1}{3} \quad (p = \pm 0, 1, 2, \dots) \quad (5.28)$$

В частности, $k = 1/6$, что соответствует по формуле (4.3) значению $n = 3$.

Легко показать, что решение f_3 из равенства (5.19) определяется на плоскости $t\tau$ следующим разложением в окрестности особой точки A :

$$\tau = \frac{n}{3n-3} t + \frac{(3n-2)(2n-3)}{4n(3n-3)} t^2 + \frac{(3n-2)^2(2n^2-5n+2)}{56n^3(n-1)} t^3 + \dots \quad (5.29)$$

Это разложение для $n = 3$ дает то частное решение, которое определяется формулами (5.13) при $E = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. После исключения s получим соотношение

$$(\tau - t - 9)^2 = (1 + 1/3 t)(t - 9)^2 \quad (5.30)$$

Это решение принадлежит к классу решений, указанному в работе [8]. Аналогичное решение получено также Р. В. Баранцевым [20]. Соответствующая кривая показана на фиг. 1 пунктиром. Скорости находятся по формулам

$$U = G\zeta + 1/12 G^2, \quad V = 1/2 G\zeta^2 + 1/3 G^2\zeta + 1/72 G^3 \quad (5.31)$$

6. Рассмотрим теперь значение $k = 1/12$ из семейства (2.5). При этом значении k существует [6] следующее решение уравнения (3.6)

$$\xi = \frac{[H_2(s)]^3}{2^2 3^3 [F_2(s)]^4}, \quad H_2(s) = 1 + 14s^4 + s^8, \quad F_2(s) = s - s^5 \quad (6.1)$$

В дальнейших вычислениях применяется тождество

$$H_2^3 - 2^2 3^3 F_2^4 = [T_2(s)]^2 \quad (T_2(s) = 1 - 33s^4 - 33s^8 + s^{12}) \quad (6.2)$$

Используя (6.1) и (6.2), найдем выражение

$$1 - \xi = -2^{-2} 3^{-3} T_2 F_2^{-4} \quad (6.3)$$

Дифференцируя равенство (6.1), определим производную

$$\frac{d\xi}{ds} = -3^{-3} H_2^2 T_2 F_2^{-5} \quad (6.4)$$

По формуле (3.8), подставляя ξ из (6.1), $1 - \xi$ из (6.3) и $d\xi/ds$ из (6.4), получим f

$$f = (C_1 s + C_2) F_2^{-1/6} \quad (6.5)$$

Соответствующее решение g находим по формуле (1.8)

$$g = -5^{-1} \cdot 2^{-1/3} 3^{-1/2} F_2^{-5/6} M(s)_2 \quad M(s) = C_2 - 5C_1 s - 5C_2 s^4 + C_1 s^5$$

Равенства (6.5) и (6.6) совместно с (6.1) дают параметрические функции $f = f(\xi)$ и $g = g(\xi)$, которые определяют решение на плоскости годографа.

Заметим, что рассматриваемое в этом параграфе решение может быть получено из решения, рассмотренного в предыдущем параграфе, при помощи квадратичного преобразования гипергеометрической функции. В самом деле, частные решения (1.7) при $k = 1/12$ имеют вид

$$f_1 = F\left(-\frac{1}{24}, \frac{5}{24}; \frac{1}{2}; 1 - \xi\right), \quad f_2 = \sqrt{1 - \xi} F\left(\frac{11}{24}, \frac{17}{24}; \frac{3}{2}; 1 - \xi\right) \quad (6.6)$$

Воспользуемся следующими формулами, взятыми из таблицы Гурса квадратичных преобразований [21]:

$$\frac{2\Gamma(1/2)\Gamma(2/3)}{\Gamma(11/24)\Gamma(17/24)} F\left(-\frac{1}{24}, \frac{5}{24}; \frac{1}{2}; 1 - \xi\right) = F\left[-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \xi})\right] + F\left[-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \xi})\right] \quad (6.7)$$

$$\frac{2\Gamma(-1/2)\Gamma(2/3)}{\Gamma(-1/24)\Gamma(5/24)} \sqrt{1 - \xi} F\left(\frac{11}{24}, \frac{17}{24}; \frac{3}{2}; 1 - \xi\right) = F\left[-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \xi})\right] - F\left[-\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \xi})\right]$$

В равенствах (6.7) справа стоит функция $F(-1/12, 5/12, 2/3, w)$, но в силу соотношения

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & -1/12 & 0 & w \\ 1/3 & 5/12 & 1/3 & \end{array} \right\} = w^{1/12} P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & -1/12 & 0 & \frac{w-1}{w} \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 & \end{array} \right\}$$

мы возвращаемся к функции f , определенной в (1.6) при $k = 1/6$, с измененным аргументом. В силу этого замечания, учитывая вывод, полученный в предыдущем параграфе, относительно возможности нахождения явной зависимости $f = f(\xi)$ при $k = 1/6$, заключаем, что и при $k = 1/12$ такая зависимость может быть найдена.

Получим соответствующее случаю $k = 1/12$ решение системы (4.4). Найдем переменную ζ , используя результаты, полученные в (6.4), (6.6)

$$\zeta = G \frac{E - 5s - 5Es^4 + s^5}{(E + s)^5} \quad (6.8)$$

Общее решение уравнения (4.7) записывается в параметрической форме

$$t = 5^2 \frac{(1 + 14s^4 + s^8)(E + s)^2}{(E - 5s - 5Es^4 + s^5)^2}, \quad \tau = \frac{2}{3} 5^3 \frac{(1 - 33s^4 - 33s^8 + s^{12})(E + s)^3}{(E - 5s - 5Es^4 + s^5)^3} \quad (6.9)$$

а решение системы (4.4) дается равенством (6.8) совместно с равенствами

$$U = (5G)^2 \frac{1 + 14s^4 + s^8}{(E + s)^8}, \quad V = \frac{2}{3} (5G)^3 \frac{1 - 33s^4 - 33s^8 + s^{12}}{(E + s)^{12}} \quad (6.10)$$

Найдем теперь такое значение E в (6.9), которое дает решение, совпадающее с разложением (5.15) при $n = 5$, и которое описывает течение, симметричное относи-

тельно оси x физической плоскости. Легко видеть, что нужно взять значение E , совпадающее по величине с одним из корней уравнения $T_2(s) = 0$ и противоположное с ним по знаку. Функция $T_2(s)$, определенная равенством (6.2), фигурирует в числителе выражения (6.9) для τ . Найдем действительные корни уравнения $T_2(s) = 0$

$$s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \quad s_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2} \quad (6.11)$$

Пусть $E = -(1 + \sqrt{2})$. Подставим это значение E в соотношения (6.8) — (6.10). Построим соответствующую кривую на плоскости $t\tau$. На фиг. 7 схематически показано поведение этой кривой.

При $s = 1 + \sqrt{2}$ получим точку A , будем уменьшать параметр: происходит движение вдоль интегральной кривой первого из уравнений (4.6) в сторону $t > 0$. При $s = 1$ попадаем в точку C . Когда s проходит через корень многочлена $M_2(s)$ $s = 0.840$, то кривая уходит на бесконечность в точке B_1 , а затем появляется со стороны $\tau < 0$ в точке B_2 . При $s = 0.655$ кривая пересекает линию $t = 25$ (точка L_1), затем линию $\tau = 0$, и при $s = 0$ мы попадаем второй раз в точку C . Если s приближается к значению $s = s_2 = 1 - \sqrt{2}$, то кривая уходит на бесконечность в точке B_3 , имея асимптотическое поведение $\tau \sim 8t$. При дальнейшем уменьшении параметра происходит повторный обход построенной кривой в обратном направлении $B_3CL_1B_2B_1CA$. Очевидно, что данная кривая может быть продолжена и в область $t < 0$, но для получения этого продолжения нужно рассматривать не только вещественные, но и те комплексные значения параметра s , при которых функции ζ, U, V, t, τ принимают вещественные значения. В предыдущем параграфе при рассмотрении течений, симметричных относительно оси x при $n = 3$, параметру s придавались как вещественные, так и чисто мнимые значения. Возникает вопрос, по какому пути на комплексной плоскости параметра s нужно пойти, чтобы получить все вещественные значения рассматриваемых функций. Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к следующему свойству функции Шварца [6]: функция Шварца $s = s(\xi)$, определенная равенством (3.3), дает конформное отображение нижней полуплоскости переменного ξ на внутренность треугольника, ограниченного дугами окружностей с внутренними углами, равными $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, где λ, μ, ν определены соотношениями (2.2). Так как здесь рассматриваются лишь действительные значения ξ и так как все газодинамические параметры в случае автомодельных решений выражаются через ξ , то ясно, что на плоскости комплексного переменного s не нужно сходить с границы упомянутого треугольника. В рассматриваемом случае для получения продолжения кривой $t = t(\tau)$ за точку A нужно двигаться на плоскости параметра от значения $s = 1 + \sqrt{2}$ по окружности с центром в точке $s = 1$, радиус которой $\sqrt{2}$.

Использование комплексных значений параметра при расчетах неудобно и предпочтительнее сделать линейное преобразование, переводящее упомянутую окружность в действительную ось, используя то свойство функции Шварца, что линейное преобразование над ней снова дает решение уравнения Шварца [10]. Обозначая новую функцию снова через s , получаем наряду с решением (6.1) уравнения (3.6) при $k = 1/12$ такое решение:

$$\xi = \frac{64 \sqrt{2} [H_3(s)]^3}{[F_3(s)]^4} \quad \left(\begin{array}{l} H_3(s) = s^7 - 1/4 \cdot 7 \sqrt{2} s^4 - s \\ F_3(s) = s^6 + 5 \sqrt{2} s^3 - 1 \end{array} \right) \quad (6.12)$$

Вместо тождества (6.2) будем иметь

$$F_3^4 - 64 \sqrt{2} H_3^3 = [T_3(s)]^2 \quad (6.13)$$

$$T_3(s) = -s^{12} + 22 \sqrt{2} s^9 + 22 \sqrt{2} s^3 + 1$$

Повторяя указанную процедуру, по формулам (3.8) и (1.8) найдем f и g .

$$f = (C_1 s + C_2) F_3^{-1/6}, \quad g = 2^{1/3} 5^{-1} F_3^{-5/6} M_3(s) \quad (6.14)$$

$$M_3(s) = -\sqrt{2} C_2 s^5 + 5 C_1 s^3 - 5 C_2 s^2 - \sqrt{2} C_1$$

Переменная ζ определяется с использованием соотношений (6.14)

$$\zeta = G \frac{-\sqrt{2}s^5 + 5Es^3 - 5s^2 - \sqrt{2}E}{(Es + 1)^5}, \quad E = \frac{C_1}{C_2} \quad (6.15)$$

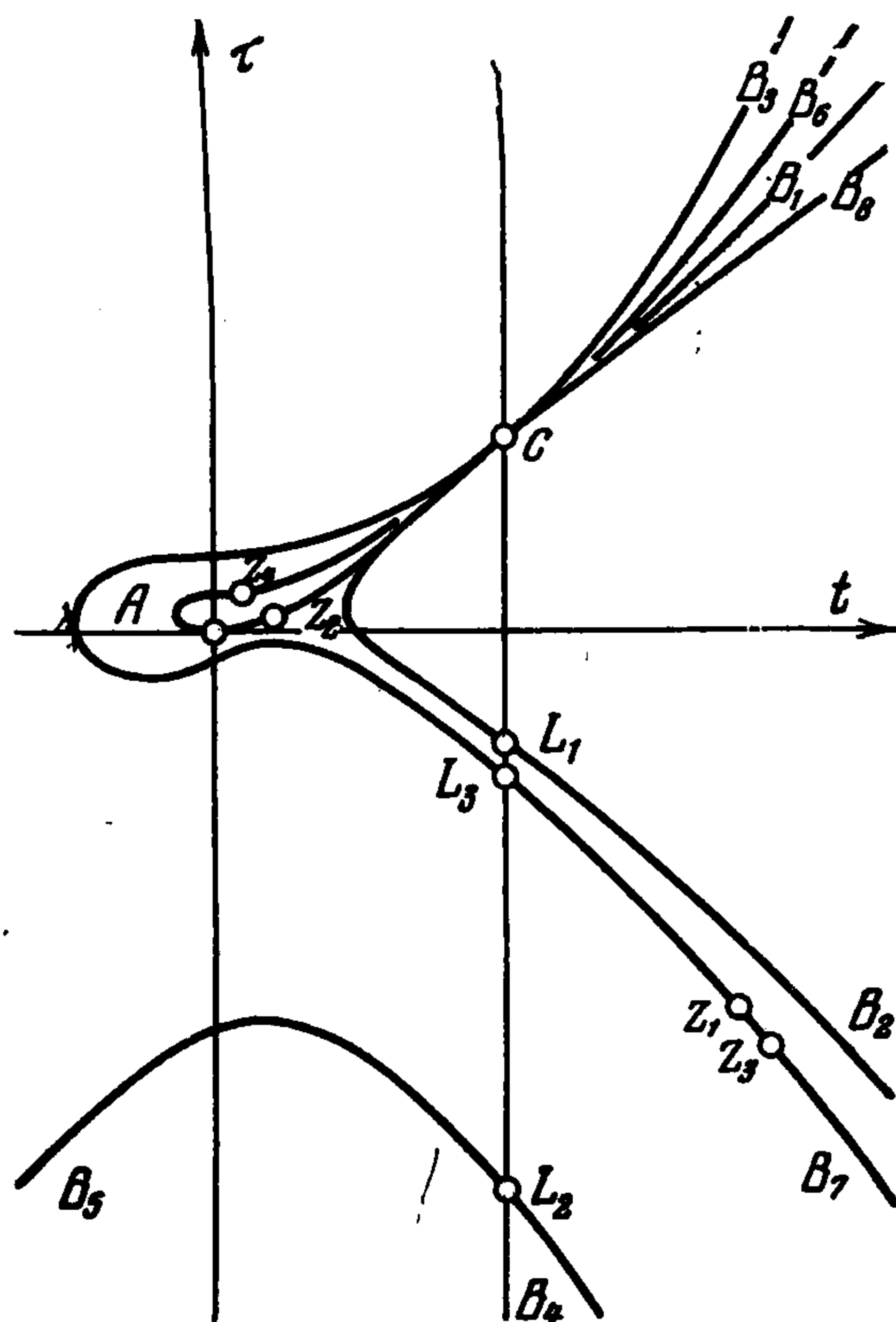
Интегральные кривые на плоскости $t\tau$ легко найти

$$t = \frac{5^2 (2\sqrt{2}s + 7s^4 - 2\sqrt{2}s^7)(Es + 1)^2}{(-\sqrt{2}s^5 + 5Es^3 - 5s^2 - \sqrt{2}E)^2}$$

$$\tau = -\frac{5^3}{3} \frac{(-s^{12} + 22\sqrt{2}s^9 + 22\sqrt{2}s^3 + 1)(Es + 1)^3}{(-\sqrt{2}s^5 + 5Es^3 - 5s^2 - \sqrt{2}E)^3} \quad (6.16)$$

Запишем также решение системы (4.4)

$$U = (5G)^2 \frac{2\sqrt{2}s + 7s^4 - 2\sqrt{2}s^7}{(Es + 1)^8}, \quad V = -\frac{1}{3} (5G)^3 \frac{-s^{12} + 22\sqrt{2}s^9 + 22\sqrt{2}s^3 + 1}{(Es + 1)^{12}} \quad (6.17)$$

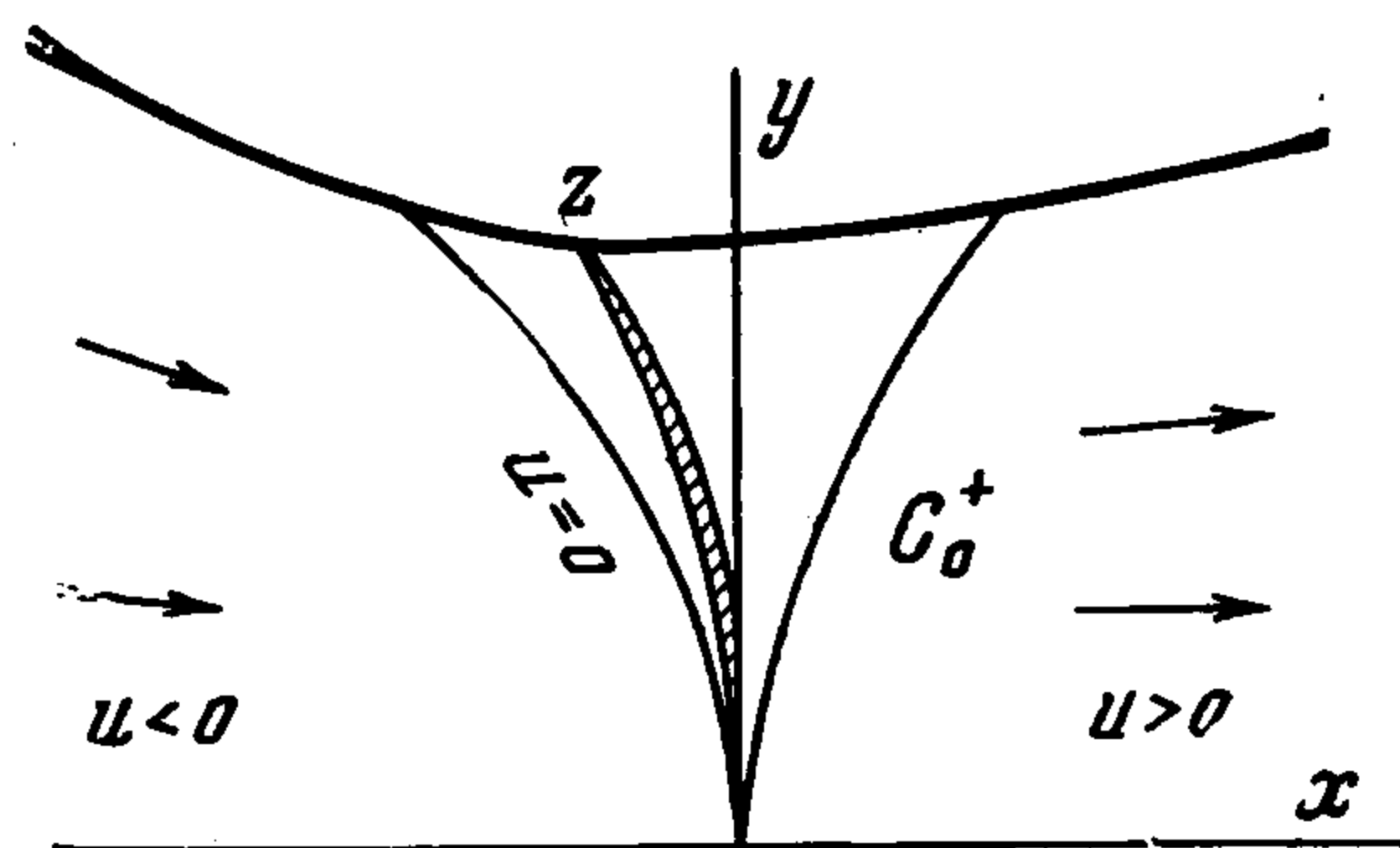


Фиг. 7

Эти равенства нужно рассматривать совместно с равенством (6.15). Чтобы выделить из общего решения (6.16) [частное решение, описывающее течение, симметричное относительно оси x , необходимо найти действительные корни уравнения $T_3(s) = 0$. Таких корней два

$$s_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad s_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Положим в формулах (6.15)–(6.17) постоянную E равной значению $\sqrt{2} - \sqrt{3}$;



Фиг. 8

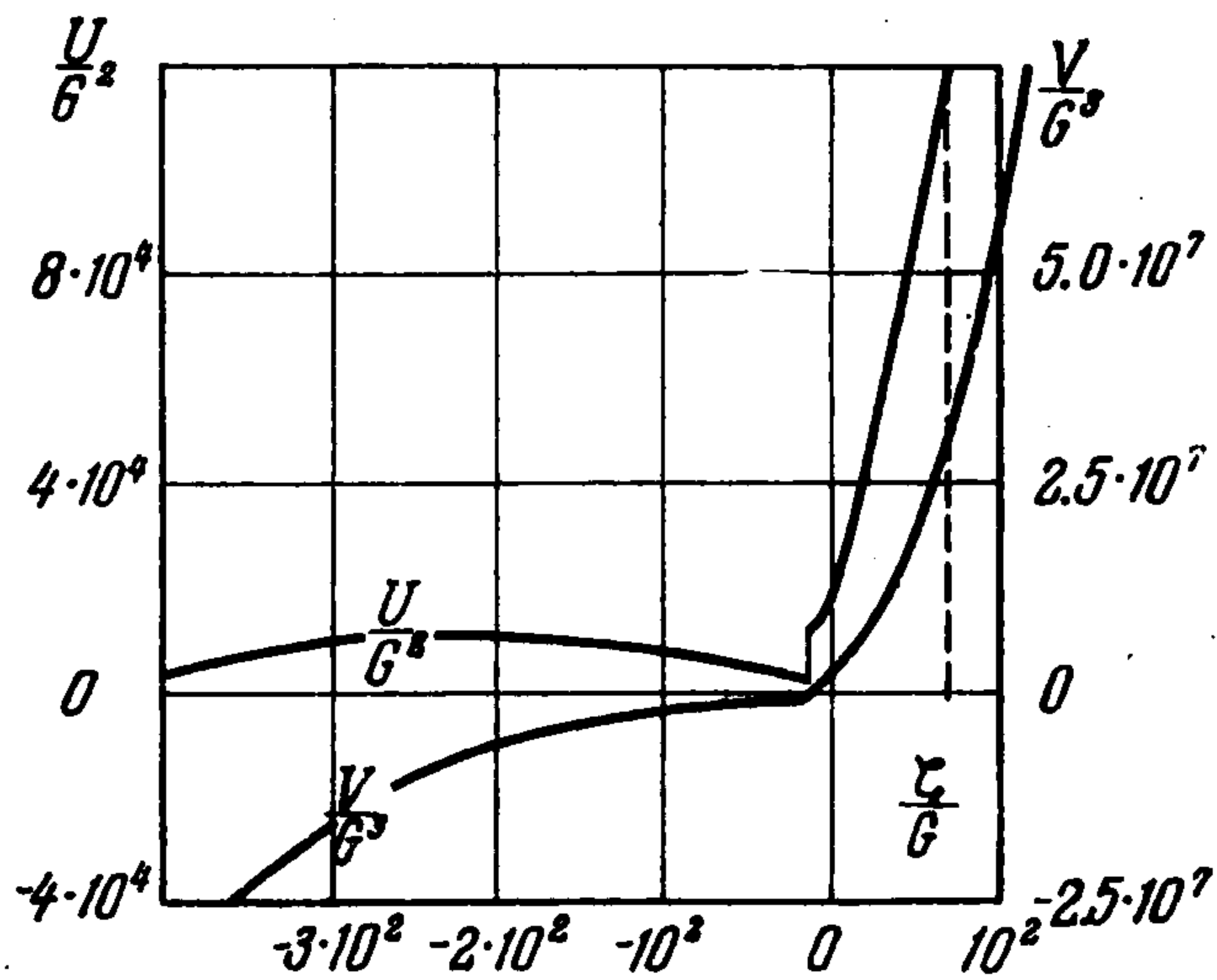
соответствующая кривая изображена на фиг. 7. При $s = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ соотношения (6.16) дают точку A на плоскости $t\tau$. Будем уменьшать параметр, происходит движение по кривой в сторону $t < 0$. При $s = \sqrt{2}$ пересекается линия $t = 0$, что соответствует переходу через скорость звука на физической плоскости. Особая точка C достигается при $s = 0,518$; когда параметр, уменьшаясь, проходит через $s = 0,286$, интегральная кривая уходит на бесконечность в точке B_4 и затем появляется в точке B_5 . При $s = 0,0673$ пересекается в точке L_2 линия $t = 25$. Если $s = 0$, то $t = 0$, $\tau = -458,8$; при $s \rightarrow s_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ кривая уходит на бесконечность в точке B_6 , имея асимптотическое поведение $\tau \sim 8t$. Если и дальше уменьшать параметр, то совершится повторный обход этой кривой в обратном направлении $B_6L_2B_5B_4CA$.

Полученные в этом параграфе решения могут быть использованы для изучения некоторых специальных типов течения в соплах Лавала. Ограничимся течениями, в которых одновременно существуют как дозвуковые, так и сверхзвуковые скорости.

Можно рассмотреть класс течений со слабыми разрывами как вдоль проходящей в центр сопла, так и вдоль исходящей из центра сопла характеристик. Одно из таких течений на плоскости $t\tau$ изображается следующим образом: от точки A по изображенной на фиг. 7 кривой двигаемся в сторону $t < 0$ (дозвуковая часть сопла Лавала); пересекаем линию $t = 0$ (звуковая линия); затем достигаем точки C (C_0^- — характеристика); далее вместо того, чтобы двигаться по аналитическому продолжению CB_4 , идем по кривой CB_3 (вдоль C_0^- — характеристики будут разрывы четвертые произ-

водные компонент скорости возмущения звукового потока); уходим на бесконечность в точке B_3 (ось y — физической плоскости); аналитически продолжая течение за ось y , возвращаемся по кривой B_3C в точку C (C_0^+ — характеристика); из точки C идем в A по кривой, входящей в A со стороны $t > 0$ (сверхзвуковая часть сопла Лавалья). Особенностью этого течения является симметрия потока относительно оси y в области между характеристиками.

Рассмотрим другое возможное приложение полученного решения в случае $n = 5$. Пусть во входной части сопла Лавалья, в его сверхзвуковой части имеется небольшой излом стенок, расширяющий поток (точка Z на фиг. 8). От угла распро-



Фиг. 9

страняется течение разрежения — волна Прандтля — Майера. Если предположить, что излом мал, то волна разрежения должна быть узкой. В этом случае течение Прандтля — Майера можно приближенно заменить скачком разрежения. Предложение рассматривать в околосвуковых потоках такие скачки впервые было сделано Ф. И. Франклем в связи с задачей, о местной сверхзвуковой зоне [22]. Любопытно, что два таких скачка, встречаясь на оси сопла Лавалья в его центре, могут не дать отражения, так что поток вдоль C_0^+ -характеристики является аналитическим. Практически это означает, что можно получить

достаточно гладкий сверхзвуковой поток, применяя неаналитические сопла.

Если обойти физическую плоскость рассматриваемого течения от дозвуковой части к сверхзвуковой, то на плоскости tt , изображающей кривой будет кривая $AZ_1Z_2B_2B_1CA$, направление движения вдоль которой показано стрелками. Точки Z_1 и Z_2 выбраны так, что удовлетворяются первые два условия скачка (4.8). Третьему условию $\zeta_1 = \zeta_2$ можно удовлетворить, если в соотношениях (6.15), (6.17) оставить мультипликативную постоянную G , а в соотношениях (6.8), (6.10), которые определяют течение за скачком, положить эту постоянную равной $70.51G$. Положение скачка определяется значением $\zeta / G = 13.34$. Поведение безразмерных компонент скорости U, V показано на фиг. 9.

7. Найдем решение в случае $k = 1/30$, который принадлежит семейству (2.6). Используем соответствующее решение, найденное Шварцем [6],

$$\xi = \frac{[H_4(s)]^3}{4^3 \cdot 3^3 [F_4(s)]^5}, \quad \begin{aligned} H_4(s) &= 1 + 228s^5 + 494s^{10} - 228s^{15} + s^{20} \\ F_4(s) &= s - 11s^6 - s^{11} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Многочлены $H_4(s)$ и $F_4(s)$ таковы, что выполняется равенство

$$\begin{aligned} H_4^3 - 4^3 \cdot 3^3 F_4^5 &= [T_4(s)]^2 \\ (T_4(s) &= 1 - 522s^5 - 10005s^{10} - 10005s^{20} + 522s^{25} + s^{30}) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Решение уравнения (1.4) при $k = 1/30$ дается (7.1) совместно с равенством

$$f = (C_1 s + C_2) F_4^{-1/12} \quad (7.3)$$

Соответствующее решение имеет вид

$$g \sim F_4^{-3/4} M_4(s) \quad (M_4(s) = C_2 - 11C_1s - 66C_2s^5 + 66C_1s^6 - 11C_2s^{10} + C_1s^{11}) \quad (7.4)$$

Решение системы (4.4) в рассматриваемом случае $n = 11$ имеет следующий параметрический вид:

$$\begin{aligned} \zeta &= G(E - 11s - 66Es^5 + 66s^6 - 11Es^{10} + s^{11})(E + s)^{-11} \\ U &= (11G)^2(1 + 228s^5 + 494s^{10} - 228s^{15} + s^{20})(E + s)^{-20} \\ V &= 2/3(11G)^3(1 - 522s^5 - 10005s^{10} - 10005s^{20} + 522s^{25} + s^{30})(E + s)^{-30} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Соответствующее решение на плоскости $t\tau$ находится по формулам (4.5). Чтобы выделить из общего решения (7.5) то частное, которое описывает течение, симметричное относительно оси x физической плоскости, найдем действительные корни уравнения $T_4(s) = 0$. Таких корней четыре

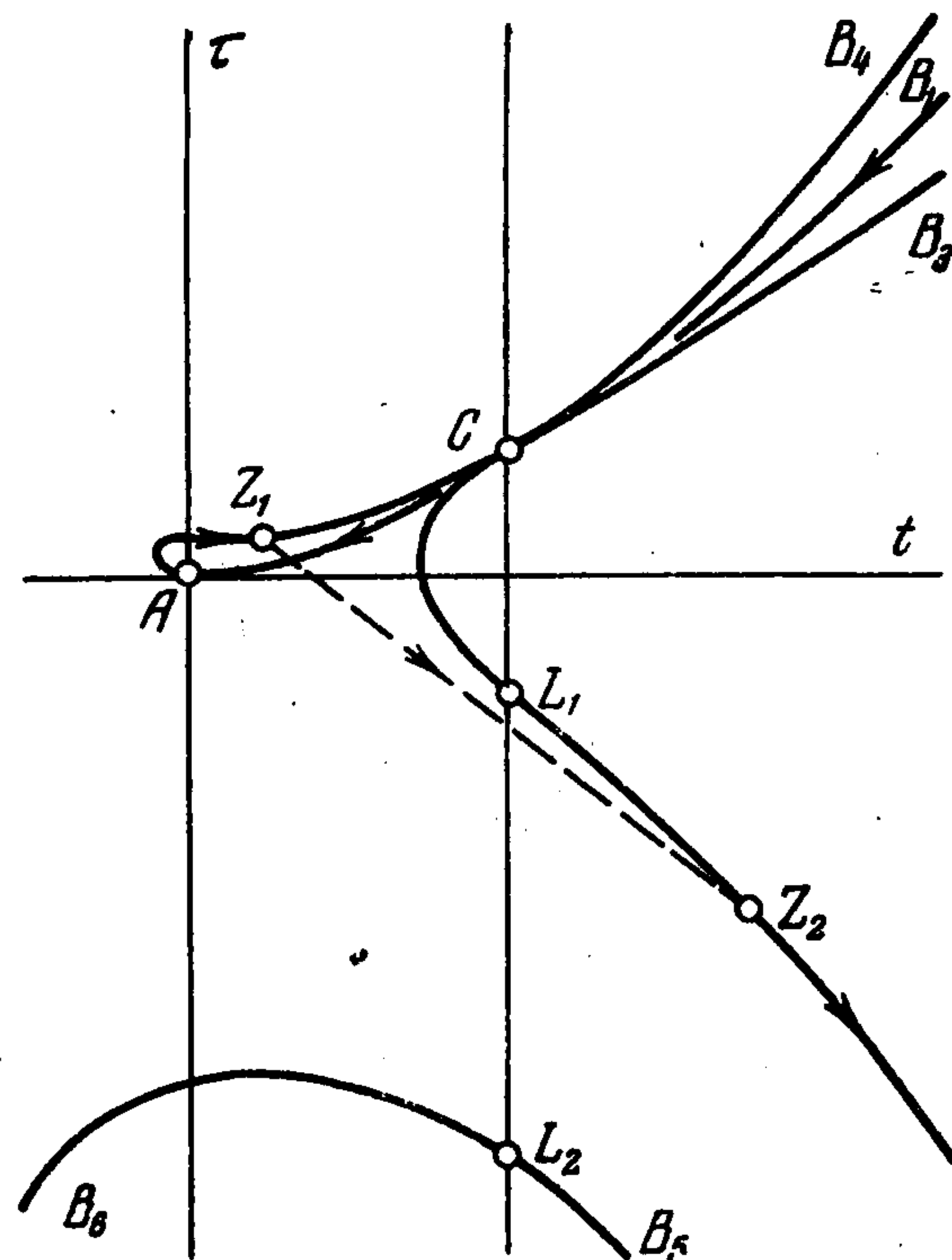
$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} [\sqrt{5} - 1 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}], & s_2 &= \frac{1}{2} [\sqrt{5} - 1 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}] \\ s_3 &= \frac{1}{2} [-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}], & s_4 &= \frac{1}{2} [-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}] \end{aligned} \quad (7.6)$$

Положим постоянную E в соотношениях (7.5) равной $-s_1$, тогда на плоскости $t\tau$ соответствующее решение совпадает с решением, указанным в (5.15). Это решение дает часть кривой, которая схематически показана на фиг. 10.

Будем уменьшать параметр s от значения $s = s_1$ до значения $s = s_2$, тогда на плоскости $t\tau$ кривая идет от точки A в сторону $t > 0$ по следующему пути: $ACB_1B_2L_1CB_3B_4L_2B_5$. При дальнейшем уменьшении параметра тот же путь проходит в обратном направлении.

Получим теперь аналитическое продолжение построенной кривой за точку A в сторону $t < 0$.

В данном случае это можно сделать, не прибегая к новой форме решений. В соотношениях (7.5) положим $E = -s_3$. При уменьшении параметра s от значения $s = s_3$ до значения $s = s_4$ на плоскости $t\tau$ строится кривая, идущая от точки A в сторону $t < 0$ (фиг. 10) по следующему пути: $ACB_6B_7L_3CB_8$. Если и дальше уменьшать параметр, то это приводит к повторному обходу названного пути в обратном направлении.



Фиг. 10

Легко видеть, что полученное решение, рассматриваемое в целом, не может иметь физического смысла из-за наличия трех предельных линий L_1, L_2, L_3 . Ю. Б. Лифшиц и О. С. Рыжов [14] предлагают ввести в рассмотрение ударную волну Z_1Z_2 и использовать следующую часть построенной кривой: от точки A в сторону $t < 0$ до C , затем CB_6B_7 , скачок из точки Z_1 в точку Z_2 и возвращение в A со стороны $t > 0$. Авторы статьи [14] считают, что этим решением описывается некоторое асимптотическое течение в окрестности центра сопла Лавала. Вдоль оси такого сопла продольная скорость изменяется по закону $u = \text{const } x^{2/11}$. На приходящей в центр сопла C_0 характеристике, течение аналитическое за исключением центра сопла, где $d^2u/dx^2 = \infty$. От центра сопла вниз по потоку распространяется ударная волна, после которой поток снова разгоняется. Отметим, что продолжение данного течения через ударную волну так, чтобы после ударной волны поток оставался симметричным относительно оси x , возможно двумя способами: скачком из Z_1 в Z_2 и скачком из Z_3 в Z_4 на ту ветвь кривой CA , которая подходит к A со стороны $t < 0$.

Во втором случае поток позади ударной волны продолжает тормозиться и снова становится дозвуковым.

В случае $k = 1/30$ решение системы (4.4) может быть записано в другом параметрическом виде, отличном от (7.5), который может оказаться более удобным для расчетов в некоторых задачах. Рассмотрим решение (7.1) уравнения Шварца. Совершим над функцией s линейное преобразование

$$s = -\frac{s' + a}{s'a - 1}, \quad a = \frac{1}{4} [-2 - 2\sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}] \quad (7.7)$$

Тогда получим новое решение уравнения Шварца в виде (штрих опускаем)

$$\xi = \frac{[H_5(s)]^3}{-27/5 [F_5(s)]^5} \quad (7.8)$$

$$H_5(s) = -3 \sqrt{5} s^{20} - 190 s^{18} + 57 \sqrt{5} s^{16} - 2280 s^{14} + 1482 \sqrt{5} s^{12} + \\ + 4940 s^{10} + 1482 \sqrt{5} s^8 - 2280 s^6 + 57 \sqrt{5} s^4 - 190 s^2 - 3 \sqrt{5} \\ f_5(s) = \sqrt{5} s^{12} - 22 s^{10} - 33 \sqrt{5} s^8 + 44 s^6 - 33 \sqrt{5} s^4 - 22 s^2 + \sqrt{5}$$

Вместо тождества (7.2) будем иметь такое тождество:

$$H_5^3 + \frac{27}{5} F_5^5 = -\frac{4}{25} [T_5(s)]^2 \quad (7.9)$$

$$T_5(s) = -225 \sqrt{5} s^{29} - 2900 s^{27} - 15921 \sqrt{5} s^{25} + 104400 s^{23} - 90045 \sqrt{5} s^{21} - 200100 s^{19} - \\ - 570285 \sqrt{5} s^{17} + 570285 \sqrt{5} s^{15} + 200100 s^{13} + 90045 \sqrt{5} s^{11} - 104400 s^9 + \\ + 15921 \sqrt{5} s^7 + 2900 s^5 + 225 \sqrt{5} s$$

Решение уравнения (1.4) при $k = 1/30$ дается тогда соотношением (7.8) и равенством

$$f = (C_1 s + C_2) F_5^{-1/12} \quad (7.10)$$

Решение системы (4.4) имеет тогда вид

$$\xi = G(E+s)^{-11} M_5(s), \quad U = -(11G)^2 (E+s)^{-20} H_5, \quad V = \frac{4}{15} (11G)^3 (E+s)^{-30} T_5 \quad (7.11)$$

$$M_5(s) = -3 \sqrt{5} E s^{11} - 11 s^{10} + 55 E s^9 - 33 \sqrt{5} s^8 + 66 \sqrt{5} E s^7 + 66 s^6 - 66 E s^5 - \\ - 66 \sqrt{5} s^4 + 33 \sqrt{5} E s^3 - 55 s^2 + 11 E s + 3 \sqrt{5}$$

Как следует из полученных результатов, в случаях $k = 1/6, 1/12, 1/30$ решение системы (4.4) с использованием параметрического представления функций записывается при помощи однозначных выражений от s , т. е. s является в этих случаях униформизирующей переменной. При этом вид решения в этих случаях аналогичен

$$\xi = G M_i(s) (E+s)^{-n}, \quad U = k_1 G^2 H_i(s) (E+s)^{-2n+2}, \quad V = k^2 G^3 T_i(s) (E+s)^{-3n+3}$$

где E, G, k_1, k_2 — постоянные, M_i, H_i, T_i — соответствующие многочлены.

8. Получим решение при значении $k = 7/30$ из семейства (2.7). Шварц [6] показал, что в этом случае решение уравнения (3.6) может быть алгебраически выражено через решение уравнения (3.6) в случае $k = 1/30$. Клейн [23] нашел вид этой зависимости. Обозначим функцию Шварца в случае $k = 7/30$ через s_1 , а функцию Шварца для $k = 1/30$ по-прежнему через s . Тогда справедлива следующая формула:

$$s_1 = (s^7 + 7s^2) (7s^5 + 1)^{-1} \quad (8.1)$$

Для нахождения решения $f(\xi)$ следует воспользоваться формулой (3.8), где вместо s нужно брать s_1 . Будем использовать снова параметрическое представление, но не через s_1 , а через s . Найдем $d\xi/ds_1 = d\xi/ds ds/ds_1$, причем $d\xi/ds$ определяется из соотношения (7.1), а ds/ds_1 из (8.1)

$$\frac{d\xi}{ds} = -5 \cdot 4^{-3} \cdot 3^{-3} H_4^2 T_4 F_4^{-6}$$

Функция $f(\xi)$ определяется формулой

$$f = (C_1 s^7 + 7C_2 s^5 - 7C_1 s^2 + C_2) F^{-7/12}$$

совместно с равенством (7.1).

После того, как решение найдено, на плоскости годографа обычным способом определяется решение системы (4.4) при $n = 17/7$

$$\zeta = \frac{7}{17} G \frac{s^{17} - 17Es^{15} + 119s^{12} + 187Es^{10} + 187s^7 - 119Es^5 + 17s^2 + E}{(s^7 + 7Es^5 - 7s^2 + E)^{17/7}}$$

$$U = G^2 H_4(s) (s^7 + 7Es^5 - 7s^2 + E)^{-20/7}, \quad V = \frac{2}{3} G^3 T_4(s) (s^7 + 7Es^5 - 7s^2 + E)^{-30/7}$$

Для рассматриваемого случая $k = 7/30$ можно получить те же решения в другой форме, если использовать соотношение (7.8) вместо соотношения (7.1).

Поступила 12 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Исследование по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
2. Франкль Ф. И. К теории сопла Лаваля. Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
3. Гудерлей К. Теория околзвучковых течений. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
4. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
5. Франкль Ф. И. Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу — Трикоми. Докл. АН СССР, 1947, т. 56, № 7.
6. Schwarz H. A. Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt. J. reine und angew., Math., 1873, Bd. 75, p. 292—335.
7. Vaglio — Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 1.
8. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 280—284.
9. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О некоторых точных решениях уравнений трансзвуковых течений газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 5, стр. 954—957.
10. Forsyth A. R. A treatise on differential Equations. London, 1921.
11. Karman Th. The similarity law of Transonic Flow J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
12. Guderley K., Yoshihara H. An Axial — Symmetric Transonic Flow Pattern. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 4. Русск. пер.: Осесимметричные трансзвуковые течения. Сб. пер., Механика, 1953, вып. 2.
13. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
14. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лаваля. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2, стр. 290—293.
15. Germain P. Application des theorems de conservation aux ecoulements plans transsoniques homogenes. Compt. Rend. Paris, 1961, vol. 252, No. 17, p. 2511—2513.
16. Varish D. T., Guderley K. Asymptotic Forms of Shock Waves in Flows over Symmetrical Bodies at Mi JAS, 1953, vol. 20, No. 7.
17. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids. Part I. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4.
18. Рыжов О. С. Образование ударных волн в соплах Лаваля. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2, стр. 309—337.
19. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Изд. 2-е, ч. 2, М., Физматгиз, 1963.
20. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Изд. Ленинград. ун-та, 1965.
21. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I, М., «Наука», 1965.
22. Франкль Ф. И. Пример околзвучкового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
23. Klein F. Vorlesungen über die hypergeometrische Function. Berlin, 1933.