

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Задачам малых колебаний вязкой жидкости посвящен ряд работ. Волны на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины исследовались, например, в [1]. В работе [3] развивается метод пограничного слоя применительно к задачам о колебаниях жидкости в сосудах в случае малой вязкости. На основе этого метода в работах [3-6] и других решен ряд задач о колебаниях маловязкой жидкости в некоторых областях. Некоторые общие теоремы о свойствах собственных колебаний тяжелой вязкой жидкости в сосудах установлены в [7]. В работе [8] приближенно вычислен декремент затухания свободных колебаний тяжелой вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде бесконечной глубины. Результаты экспериментального исследования колебаний жидкости в сосудах приведены в [9].

В данной работе изучаются свободные малые колебания вязкой несжимаемой жидкости в неподвижном сосуде произвольной формы, находящемся в поле тяжести. В основной части работы число Рейнольдса предполагается большим (вязкость мала), что дает возможность, как и в работах [2-6], применить метод пограничного слоя. Рассмотрение проводится способом, аналогичным тому, которым в работе [10] изучалось движение тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Получены асимптотические выражения для собственных чисел и собственных функций задачи о свободных колебаниях вязкой жидкости в произвольном сосуде. Декременты затухания и поправки к собственным частотам, обусловленные вязкостью, выражаются формулами, зависящими только от соответствующих собственных частот и собственных функций задачи о колебаниях идеальной жидкости. Проведены вычисления для некоторых конкретных форм сосудов.

В последней части работы выясняется характер особенности движения вязкой жидкости вблизи линии контакта свободной поверхности со стенками сосуда. Здесь рассматриваются свободные колебания при произвольном числе Рейнольдса.

1. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ и кинематической вязкости ν в неподвижном сосуде (фиг. 1). Уравнения движения жидкости имеют вид

$$U_t + (U \nabla) U = -\rho^{-1} \nabla P - gk + \nu \Delta U, \quad \operatorname{div} U = 0 \quad (1.1)$$

Здесь t — время, U — скорость жидкости, P — давление, g — постоянное ускорение силы тяжести, орт k направлен вертикально вверх, а индекс t означает частную производную. Пусть L — характерный линейный размер сосуда, $T = (L/g)^{1/2}$ — характерное время (порядка периода колебаний), l — характерная амплитуда колебаний частиц жидкости. Число Рейнольдса R предполагается большим

$$R = L^2 T^{-1} \nu^{-1} = L^{3/2} g^{1/2} \nu^{-1} \gg 1 \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) можно линеаризировать, если $|(U \nabla) U| \ll |U_t|$. По порядку величины имеем: $|U| \sim lT^{-1}$, $|U_t| \sim lT^{-2}$. Для оператора ∇ вне

пограничного слоя справедлива оценка $\nabla \sim L^{-1}$, и поэтому $|\mathbf{U} \nabla| \sim \sim lL^{-1}T^{-1}$. В пограничном слое различные компоненты векторов \mathbf{U} , ∇ имеют разные порядки (см. ниже), но порядок $|\mathbf{U} \nabla|$ здесь такой же, как и вне погранслоя. Условие линеаризации поэтому приводится к виду

$$l \ll L \quad (1.3)$$

и ниже всюду предполагается выполненным. Задача далее рассматривается в линейной постановке и решается в виде рядов по параметру $R^{-1/2} \ll 1$.

Чтобы погрешность за счет нелинейности, составляющая $O(l/L)$, не превосходила членов n -го приближения в решении линейной задачи, требуется наложить условие $l/L \ll R^{-n/2}$, более сильное, чем (1.3) (см. также [5]). Для вычисления декремента затухания в первом приближении достаточно выполнения условия (1.3).

Запишем линеаризованные уравнения движения и граничные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t &= -\rho^{-1} \nabla P - g\mathbf{k} + \nu \Delta \mathbf{U}, & \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0 \text{ в } D, & \mathbf{U} &= 0 \text{ на } S \quad (1.4) \\ P + \frac{\partial P}{\partial z} F - 2\rho\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} &= P_0, & \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} &= \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} = 0 \\ U_z &= \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} \text{ на } \Sigma \end{aligned}$$

Здесь D — область, занятая жидкостью в состоянии покоя, а S , Σ — соответственно смоченная поверхность стенок и свободная поверхность в состоянии покоя. Декартова система координат xuz выбрана так, чтобы плоскость xu совпадала с невозмущенной свободной поверхностью Σ , а ось z направлена вертикально вверх (фиг. 1). Условия на свободной поверхности, выражающие равенство напряжений внутри и вне жидкости (P_0 — постоянное давление вне жидкости), снесены на Σ , а $z = = F(x, y, t)$ — уравнение возмущенной свободной поверхности.

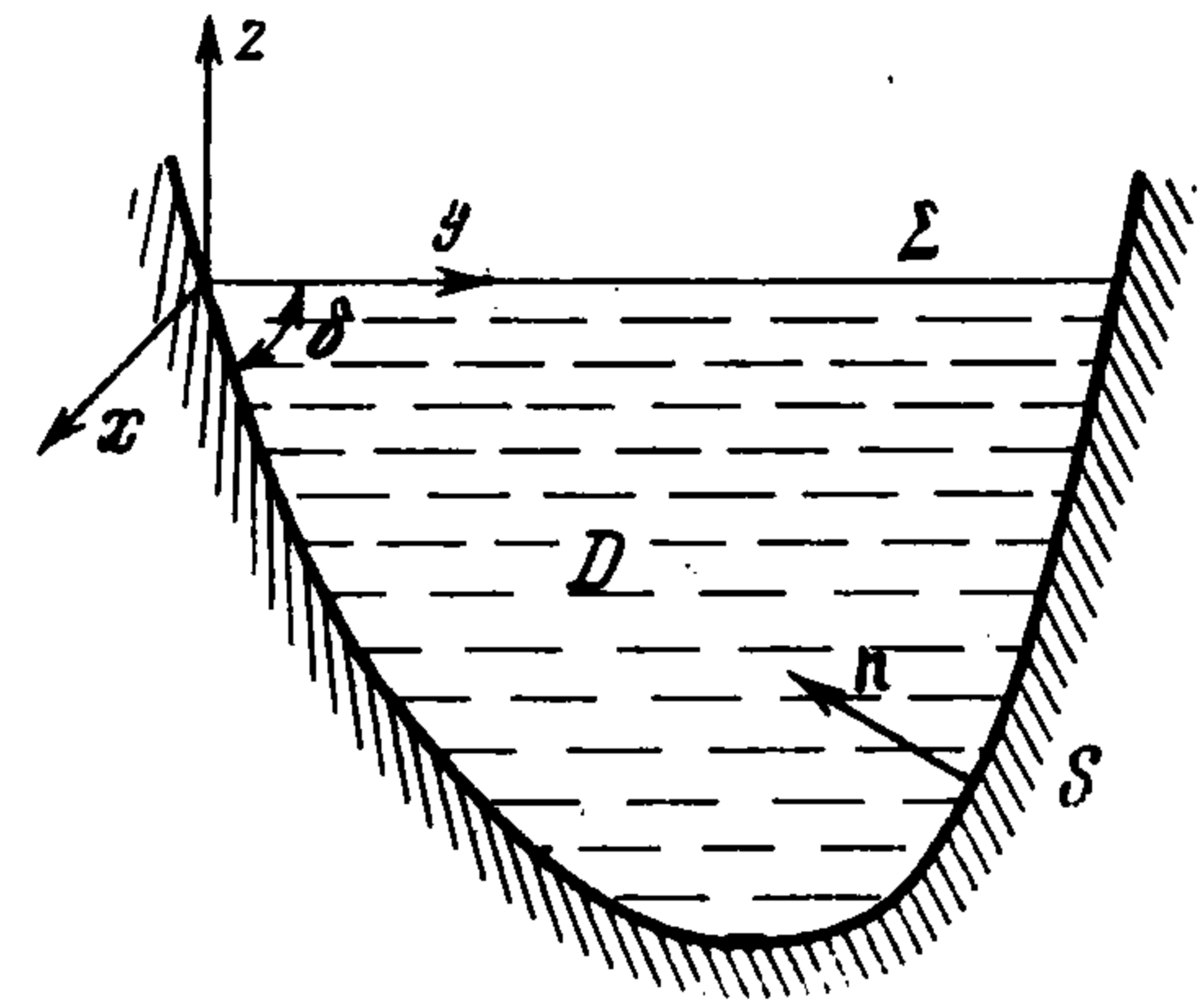
Решение задачи о свободных колебаниях жидкости ищем в виде

$$\mathbf{U} = e^{\lambda t} \mathbf{u}, \quad P = P_0 - \rho g z + \rho e^{\lambda t} q, \quad F = e^{\lambda t} f(x, y) \quad (1.5)$$

где λ — комплексное собственное число, \mathbf{u} , q — функции координат x, y, z . Подставляя (1.5) в (1.4), приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{u} &= -\nabla q + \nu \Delta \mathbf{u}, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \text{ в } D, & \mathbf{u} &= 0 \text{ на } S \\ u_z &= \frac{\lambda}{g} q - \frac{2\lambda\nu}{g} \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, & f &= \frac{u_z}{\lambda} \text{ на } \Sigma \quad (1.6) \end{aligned}$$

Требуется определить числа $\lambda \neq 0$, при которых краевая задача (1.6) допускает ненулевое решение, и собственные функции \mathbf{u} , q для этих λ . Последнее условие (1.6) может служить для определения формы свободной поверхности после решения задачи. Выбором единиц измерения длины и времени можно добиться того, что $L \sim 1$, $g \sim 1$, и тогда в силу (1.2) задача (1.6) будет содержать малый параметр $\nu \ll 1$.



Фиг. 1

2. Решение задачи (1.6) ищем, как и в работах [2-6,10], методом пограничного слоя [11]. Полагаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v} + \mathbf{w}, & q &= s + h, & \mathbf{v} &= \mathbf{v}^0 + \nu^{1/2}\mathbf{v}^1 + \dots \\ s &= s^0 + \nu^{1/2}s^1 + \dots, & \lambda &= \lambda^0 + \nu^{1/2}\lambda^1 + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{w} , h — функции типа пограничного слоя. Эти функции также могут быть разложены в ряды по степеням $\nu^{1/2}$, причем все коэффициенты их разложений \mathbf{w}^k , h^k быстро убывают с ростом расстояния от границ области D . Обозначим через D_S , D_Σ области пограничного слоя, примыкающие изнутри к поверхностям S , Σ соответственно и имеющие толщину порядка $\nu^{1/2}$. Тогда можно принять $\mathbf{w} = 0$, $h = 0$ вне D_S , D_Σ .

Потребуем, чтобы как функции \mathbf{v} , s , так и \mathbf{w} , h удовлетворяли уравнениям (1.6). Граничные условия для них можно получать следующим образом. Пусть функции \mathbf{v}^i , s^i , \mathbf{w}^i , h^i , λ^i , где $i = 0, 1, \dots, k-1$, уже определены. Для определения \mathbf{v}^k , s^k потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли, вместе с ранее найденными \mathbf{v}^i , s^i , \mathbf{w}^i , h^i , условию $\mathbf{u}\mathbf{n} = 0$ на стенке S и первому из условий (1.6) на Σ . Здесь \mathbf{n} — орт внутренней нормали к S .

При решении краевой задачи для \mathbf{v}^k , s^k будет одновременно определяться число λ^k . Затем определяются функции \mathbf{w}^k , h^k , которые должны удовлетворять с учетом уже найденных \mathbf{v}^i , s^i , \mathbf{w}^i , h^i , λ^i , \mathbf{v}^k , s^k , λ^k условию равенства нулю касательных к стенке S компонент вектора \mathbf{u} , двум условиям (1.6) равенства нулю касательных напряжений на Σ , а также условиям $\mathbf{w}^k \rightarrow 0$, $h^k \rightarrow 0$ вне D_S , D_Σ . Нетрудно убедиться, что описанный процесс построения решения формально обеспечивает удовлетворение уравнений и граничных условий с погрешностью порядка $\nu^{(k+1)/2}$, стремящейся к нулю с ростом номера приближения k .

Так как функции \mathbf{v} , s , представленные рядами (2.1), удовлетворяют уравнениям (1.6), то для k -го приближения найдем

$$\sum_{i=0}^k \lambda^i \mathbf{v}^{k-i} = -\nabla s^k + \Delta \mathbf{v}^{k-2}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}^k = 0 \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2.2)$$

причем слагаемое $\Delta \mathbf{v}^{k-2}$ в первом уравнении (2.2) отсутствует при $k = 0, 1$. Если все $\lambda^i \neq 0$, то из (2.2) легко получить по индукции, что все \mathbf{v}^k — потенциальные векторы в D и $\Delta \mathbf{v}^k = 0$. Тогда в силу (2.2) имеем

$$\mathbf{v}^k = \nabla \varphi^k, \quad \Delta \varphi^k = 0, \quad s^k = -\sum_{i=0}^k \lambda^i \varphi^{k-i} \quad (k=0, 1, \dots) \quad (2.3)$$

В последнем из равенств (2.3) уже использовано то, что функция φ^k определяется с точностью до произвольной функции времени. Ниже ограничимся рассмотрением \mathbf{v}^0 , s^0 , λ^0 , \mathbf{v}^1 , s^1 , λ^1 , а также \mathbf{w}^0 , h^0 , которые будем обозначать просто через \mathbf{w} , h .

Для функций \mathbf{v}^0 , s^0 имеем, как следует из описанного выше процесса определения решения, краевые условия $\mathbf{v}^0 \mathbf{n} = 0$ на S и $\lambda^0 s^0 = g v_z^0$ на

Σ. Используя равенства (2.3), получим

$$\Delta\varphi^\circ = 0 \text{ в } D, \quad \frac{\partial\varphi^\circ}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\varphi^\circ}{\partial z} + \frac{(\lambda^\circ)^2}{g}\varphi^\circ = 0 \text{ на } \Sigma \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}^\circ = \nabla\varphi^\circ, \quad s^\circ = -\lambda^\circ\varphi^\circ$$

Задача на собственные значения (2.4) для φ° описывает свободные колебания идеальной жидкости и имеет дискретный спектр чисто мнимых собственных значений $\lambda^\circ = \pm i\omega_m$, $\omega_m > 0$, $m = 1, 2, \dots$, имеющих конечную кратность [12]. Собственная функция Φ_m , соответствующая частоте ω_m , удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta\Phi_m = 0 \text{ в } D, \quad \partial\Phi_m / \partial n = 0 \text{ на } S, \quad \partial\Phi_m / \partial z = (\omega_m^2 / g)\Phi_m \text{ на } \Sigma \quad (2.5)$$

Будем искать собственное колебание вязкой жидкости, которое при $\nu \rightarrow 0$ переходит в m -е колебание идеальной жидкости, т. е. положим

$$\varphi^\circ = \Phi_m, \quad \lambda^\circ = \pm i\omega_m$$

Для функций w , h имеем, в соответствии со сказанным выше, краевую задачу

$$\lambda^\circ w = -\nabla h + \nu\Delta w, \quad \operatorname{div} w = 0 \text{ в } D_S, D_\Sigma$$

$$\mathbf{w}^* = -\mathbf{v}^\circ \text{ на } S, \quad w \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \text{ вне } D_S, D_\Sigma \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(w_x + v_x^\circ)}{\partial z} + \frac{\partial(w_z + v_z^\circ)}{\partial x} = \frac{\partial(w_y + v_y^\circ)}{\partial z} + \frac{\partial(w_z + v_z^\circ)}{\partial y} = 0 \text{ на } \Sigma$$

Здесь w^* — проекция вектора w на плоскость, касательную к S ; вектор \mathbf{v}° на S также лежит в этой плоскости в силу условия $\mathbf{v}^\circ \mathbf{n} = 0$. Найдем асимптотическое решение задачи (2.6) при $\nu \rightarrow 0$ отдельно в областях D_S и D_Σ . В области D_Γ , являющейся пересечением этих областей и прилегающей к контуру Γ (линии контакта свободной поверхности Σ и стенок сосуда S), решение носит более сложный характер.

В области D_S введем криволинейные ортогональные координаты $\xi\eta\zeta$ так, чтобы поверхность $\zeta = 0$ совпадала с поверхностью S и чтобы в области D_S было $\zeta > 0$. Обозначим через H_ξ, H_η, H_ζ соответствующие коэффициенты Ламе, через $H_\xi^\circ, H_\eta^\circ, H_\zeta^\circ$ — их значения при $\zeta = 0$, а через w_ξ, w_η, w_ζ — компоненты вектора w в этих координатах. Примем, не нарушая общности, $H_\zeta^\circ = 1$. Тогда ζ есть, с точностью до малых высшего порядка, расстояние по внутренней нормали от поверхности S , а w_ζ — проекция w на нормаль \mathbf{n} . Положим еще

$$\zeta = \nu^{1/2}\alpha, \quad w_\zeta = \nu^{1/2}w_\alpha \quad (2.7)$$

и перейдем в уравнениях (2.6) к переменным ξ, η, α . Учитывая, что $\zeta \sim \nu^{1/2}$, $\alpha \sim 1$ в D_S и опуская в уравнениях движения (2.6) малые порядка $\nu^{1/2}$ и выше, приведем эти уравнения к виду (см. также [10])

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0, \quad \lambda^\circ w_\xi = -\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \alpha^2}, \quad \lambda^\circ w_\eta = -\frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \alpha^2} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_\eta^\circ w_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(H_\xi^\circ w_\eta) + H_\xi^\circ H_\eta^\circ \frac{\partial w_\alpha}{\partial \alpha} = 0$$

Так как $h \rightarrow 0$ вне области D_S , т. е. при $\alpha \rightarrow \infty$, то из (2.8) следует $h \equiv 0$. Тогда для w получим, учитывая условие (2.6) на S , краевую задачу

$$\begin{aligned} \lambda^\circ w^* &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial \alpha^2}, & \text{Div } w^* + \frac{\partial w_\alpha}{\partial \alpha} &= 0 \\ w^* &= -v^\circ \text{ при } \alpha = 0, & w^* \rightarrow 0, \quad w_\alpha \rightarrow 0 & \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь w^* — вектор с компонентами w_ξ, w_η , а Div обозначает операцию дивергенции по отношению к двумерному вектору на поверхности S .

Определим из (2.9) сначала w^* , а затем w_α

$$w^* = -v^\circ \exp(\sqrt{\lambda^\circ} \alpha), \quad w_\alpha = (\text{Div } v^\circ / \sqrt{\lambda^\circ}) \exp(\sqrt{\lambda^\circ} \alpha)$$

где выбрана та ветвь $\sqrt{\lambda^\circ}$, для которой $\text{Re } \sqrt{\lambda^\circ} < 0$. Возвращаясь к переменным ξ, w_ξ согласно (2.7) и учитывая равенство $v^\circ = \nabla \varphi^\circ$, получим окончательно в D_S

$$\begin{aligned} w^*(\xi, \eta, \zeta) &= -\nabla \varphi^\circ(\xi, \eta, 0) \exp(\sqrt{\lambda^\circ / v} \zeta), & h &\equiv 0 \\ w_\zeta(\xi, \eta, \zeta) &= (\sqrt{v} / \sqrt{\lambda^\circ}) \text{Div} [\nabla \varphi^\circ(\xi, \eta, 0)] \exp(\sqrt{\lambda^\circ / v} \zeta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

В области D_Σ положим, аналогично (2.7)

$$z = v^{1/2} \beta, \quad w_z = v^{1/2} w_\beta \quad (2.11)$$

и перейдем в уравнениях и краевых условиях (2.6) к переменным x, y, β , опуская члены высших порядков малости по v . Получим, аналогично (2.8), (2.9), уравнения

$$h \equiv 0, \quad \lambda^\circ w_x = \frac{\partial^2 w_x}{\partial \beta^2}, \quad \lambda^\circ w_y = \frac{\partial^2 w_y}{\partial \beta^2}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_\beta}{\partial \beta} = 0 \quad (2.12)$$

Краевые условия (2.6) на Σ , а также условия на границе пограничного слоя дадут с учетом равенств (2.4), (2.11) в первом приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial \beta} &= -v^{1/2} \left(\frac{\partial v_x^\circ}{\partial z} + \frac{\partial v_z^\circ}{\partial x} \right) = -2v^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial w_y}{\partial \beta} &= -2v^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial y \partial z} \quad \text{при } \beta = 0 \\ w_x, w_y, w_\beta &\rightarrow 0 \quad \text{при } \beta \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решим уравнения (2.12) [при условиях (2.13) (сначала для w_x, w_y , затем для w_β)] и перейдем к переменным z, w_z

$$\begin{aligned} w_x(x, y, z) &= 2 \left(\frac{v}{\lambda^\circ} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial x \partial z}(x, y, 0) \exp\left(-\left(\frac{\lambda^\circ}{v}\right)^{1/2} z\right), & \text{Re } \sqrt{\lambda^\circ} &< 0 \\ w_y(x, y, z) &= 2 \left(\frac{v}{\lambda^\circ} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi^\circ}{\partial y \partial z}(x, y, 0) \exp\left(-\left(\frac{\lambda^\circ}{v}\right)^{1/2} z\right) \\ w_z(x, y, z) &= -\frac{2v}{\lambda^\circ} \frac{\partial^3 \varphi^\circ}{\partial z^3}(x, y, 0) \exp\left(-\left(\frac{\lambda^\circ}{v}\right)^{1/2} z\right), & h &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь использовано уравнение Лапласа для φ° . Решения вида (2.14) были получены в работе [3]. Как и предполагалось выше, решения (2.10), (2.14) быстро (экспоненциально) затухают при $\zeta \gg v^{1/2}$, $|z| \gg v^{1/2}$, т. е. вне пограничного слоя. Как отмечалось в [3], касательная и нормальная

к границе области D компоненты вектора w имеют разные порядки малости, причем в D_S эти компоненты больше, чем в D_Σ (см. (2.10), (2.14)).

Оценим функции w , h в области D_Γ , примыкающей к контуру Γ . Эта область имеет по нормали к Γ толщину порядка $\nu^{1/2}$, и для оператора дифференцирования в D_Γ справедлива, вообще говоря, оценка $|\nabla| \sim \nu^{-1/2}$.

Поэтому, так как $|w| \leq O(1)$ вне D_Γ , то в D_Γ будем иметь $|w| \sim 1$, $\partial w_z / \partial z \sim \nu^{-1/2}$. Из уравнений (2.6) тогда следует, что $|\nabla h| \sim 1$, а так как $h = 0$ вне D_Γ , то $h \sim \nu^{1/2}$ в области D_Γ . Полученные оценки

$$|w| \sim 1, \quad \partial w_z / \partial z \sim \nu^{-1/2}, \quad h \sim \nu^{1/2} \quad \text{в } D_\Gamma \quad (2.15)$$

будут использованы в дальнейшем.

Функции ν^1 , s^1 должны компенсировать невязку в выполнении условия $u_n = 0$ на S и первого условия (1.6) на Σ , вызванную решением в пограничном слое w , h . Запишем эти условия, подставляя в них u , q , λ согласно формулам (2.1), (2.3) (с точностью до малых высшего порядка)

$$\begin{aligned} u &= \nabla \varphi^0 + \nu^{1/2} \nabla \varphi^1 + w, & q &= -\lambda^0 \varphi^0 - \nu^{1/2} (\lambda^0 \varphi^1 + \lambda^1 \varphi^0) + h \\ \lambda &= \lambda^0 + \nu^{1/2} \lambda^1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

и учитывая краевые условия (2.4) для φ^0

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^1}{\partial n} &= -\frac{wn}{\sqrt{\nu}} \quad \text{на } S, & \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} &= -\frac{(\lambda^0)^2 \varphi^1 + 2\lambda^0 \lambda^1 \varphi^0}{g} - \\ & -\frac{w_z}{\sqrt{\nu}} + \frac{\lambda^0}{g \sqrt{\nu}} h - \frac{2\lambda^0 \sqrt{\nu}}{g} \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad \text{на } \Sigma \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь приняты во внимание порядки w_z , h на Σ и отброшены члены высшего порядка малости. Отметим, что почти во всей области Σ (кроме узкой области шириной порядка $\nu^{1/2}$, примыкающей к контуру Γ) можно опустить также и последние три слагаемых во втором условии (2.17), так как они в силу (2.14) будут малыми (не более $\nu^{1/2}$).

Решение задачи (1.6) в принятом приближении определяется формулами (2.16), в которых w , h вне D_Γ даются формулами (2.10), (2.14), а для определения φ^0 , λ^0 , φ^1 , λ^1 нужно решить задачи (2.4), (2.17) для уравнения Лапласа.

Наибольший интерес представляет поправка λ^1 к собственному числу. Оказывается, что она может быть выражена только через λ^0 , φ^0 . В формулу Грина для гармонических в D функций φ^0 , φ^1

$$\int_S \left(\varphi^0 \frac{\partial \varphi^1}{\partial n} - \varphi^1 \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} \right) ds + \int_\Sigma \left(\varphi^1 \frac{\partial \varphi^0}{\partial z} - \varphi^0 \frac{\partial \varphi^1}{\partial z} \right) ds = 0 \quad (2.18)$$

подставим нормальные производные этих функций на S , Σ согласно (2.4), (2.17). Отметим, что последние два слагаемых во второй формуле (2.17) конечны (не малы) лишь в области площадью $\sim \nu^{1/2}$ вблизи контура Γ , где они согласно оценкам (2.15) имеют порядок $O(1)$. Поэтому эти слагаемые дадут вклад порядка $\nu^{1/2}$ в интеграл (2.18) по Σ , и их можно опустить. Слагаемое $(-\nu^{1/2} w_z)$ из (2.17) нельзя отбросить, так как оно даст конечный вклад при интегрировании по Σ . После указанных преобразований равен-

ство (2.18) приведется к виду

$$-\int_S \frac{\varphi^\circ \mathbf{w} \mathbf{n}}{V\bar{\nu}} ds + \int_\Sigma \frac{2\lambda^\circ \lambda^1 (\varphi^\circ)^2}{g} ds + \int_\Sigma \frac{\varphi^\circ w_z}{V\bar{\nu}} ds = 0$$

Отсюда, используя теорему Гаусса—Остроградского и уравнение $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$, найдем

$$\frac{2\lambda^\circ \lambda^1}{g} \int_\Sigma (\varphi^\circ)^2 ds = - \int_D \frac{\operatorname{div} (\varphi^\circ \mathbf{w})}{V\bar{\nu}} dV = - \int_D \frac{\nabla \varphi^\circ \cdot \mathbf{w}}{V\bar{\nu}} dV \quad (2.19)$$

Функция w конечна в D_S и D_Γ , мала в D_Σ (см. (2.10), (2.14), (2.15)) и практически равна нулю в остальной части области D . Так как область D_S имеет объем $\sim \nu^{1/2}$, а D_Γ — порядка ν , то основной вклад в интеграл (2.19) по D внесет интеграл по D_S . В области D_S можно, с точностью до малых высшего порядка, принять $w = w^*$ (см. (2.10)), а функцию $\nabla \varphi^\circ$ вычислять при $\zeta = 0$, т. е. на стенке S . Далее, так как w^* быстро затухает с ростом ζ в области D_S , то интегрирование по D_S можно свести к интегрированию сначала по ζ от 0 до ∞ , а затем по поверхности S . Тогда формула (2.19) преобразуется к виду

$$\frac{2\lambda^\circ \lambda^1}{g} \int_\Sigma (\varphi^\circ)^2 ds = - \int_{D_S} \frac{\nabla \varphi^\circ \cdot \mathbf{w}^*}{V\bar{\nu}} dV = - \int_S \nabla \varphi^\circ \left(\int_0^\infty \frac{w^* d\zeta}{V\bar{\nu}} \right) ds = - \int_S \frac{(\nabla \varphi^\circ)^2 ds}{V\bar{\lambda}^\circ} \quad (2.20)$$

Здесь при интегрировании по ζ использована формула (2.10) для w^* . Приведем выражение для $V\bar{\lambda}^\circ$ при условии $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^\circ} < 0$

$$\lambda^\circ = \pm i\omega_m, \quad \sqrt{\lambda^\circ} = -[(1 \pm i) / \sqrt{2}] \sqrt{\omega_m}, \quad \omega_m > 0$$

Подставим в равенство (2.20) формулы для λ° , $\sqrt{\lambda^\circ}$ и $\varphi^\circ = \Phi_m$, разрешим его относительно λ^1 , а затем подставим λ^1 в формулу (2.16) для λ .

Получим окончательно

$$\lambda_m = \pm i\omega_m - \frac{(1 \pm i) \nu^{1/2} g}{2 \sqrt{2} \omega_m^{3/2}} A_m, \quad A_m = \left[\int_S (\nabla \Phi_m)^2 ds \right] / \left(\int_\Sigma \Phi_m^2 ds \right) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.21)$$

Здесь $\lambda = \lambda_m$ — собственное число задачи (1.6), близкое к m -у собственному числу задачи о колебаниях идеальной жидкости.

Формула (2.21) показывает, что вязкость приводит к появлению декремента затухания собственных колебаний ($\operatorname{Re} \lambda_m < 0$) и к уменьшению собственной частоты на величину, равную этому декременту. Отметим, что числитель выражения (2.21) для A_m пропорционален диссипации энергии в пограничном слое, а знаменатель — кинетической энергии колебаний идеальной жидкости. В работе [7] указано, что задача (1.6) имеет при $\nu > 0$ конечное число комплексных собственных чисел. Формула (2.21) применима лишь для конечного числа частот, т. е. при $m < m_0$, где $m_0 \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow 0$.

Формула (2.21) справедлива и в случае плоских колебаний жидкости в бесконечном цилиндрическом сосуде (канале), образующие которого горизонтальны и перпендикулярны плоскости движения. В этом случае под D нужно понимать поперечное сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующим, S — кривая, по которой эта плоскость пересекает стенки сосуда, а отрезок Σ — сечение свободной поверхности этой же плоскостью.

3. Для вычисления λ_m по формуле (2.21) достаточно решить задачу на собственные значения (2.5). Эта задача решена аналитически или численно для многих форм сосудов, поэтому расчет λ_m для этих сосудов сводится к вычислению квадратур. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть сосуд имеет вертикальные стенки и плоское дно, а глубина жидкости постоянна и равна H . Решение задачи (2.5) в этом случае [1] можно искать в виде

$$\Phi_m = \psi_m(x, y) \operatorname{ch} k_m(z + H) \quad (3.1)$$

Здесь функция ψ_m — решение задачи на собственные значения

$$\Delta \psi_m + k_m^2 \psi_m = 0 \quad \text{в } \Sigma, \quad \partial \psi_m / \partial N = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (3.2)$$

где Δ — оператор Лапласа в плоскости xy , а N — нормаль к контуру Γ , лежащая в этой плоскости. Частоты ω_m выражаются через числа k_m формулой

$$\omega_m^2 = g k_m \operatorname{th}(k_m H) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1) в формулу (2.21) для A_m , после элементарного интегрирования по z получим

$$A_m = \left\{ \frac{\operatorname{th}(k_m H)}{2k_m} \int_{\Gamma} [(\nabla \psi_m)^2 + k_m^2 \psi_m^2] dl + \frac{H}{2 \operatorname{ch}^2(k_m H)} \int_{\Gamma} [(\nabla \psi_m)^2 - k_m^2 \psi_m^2] dl + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k_m H)} \int_{\Sigma} (\nabla \psi_m)^2 ds \right\} \left(\int_{\Sigma} \psi_m^2 ds \right)^{-1} \quad (3.4)$$

Собственные числа λ_m определяются общей формулой (2.21), в которой ω_m , A_m задаются формулами (3.3), (3.4). Учитывая, что k_m , ψ_m не зависят от H , упростим выражения (3.4), (2.21) для A_m , λ_m в случаях бесконечно большой и малой глубины жидкости

$$A_m = \frac{1}{2k_m} \left\{ \int_{\Gamma} [(\nabla \psi_m)^2 + k_m^2 \psi_m^2] dl \right\} \left(\int_{\Sigma} \psi_m^2 ds \right)^{-1}, \quad \omega_m^2 = g k_m$$

$$\lambda_m = \pm i \omega_m - \frac{(1 \pm i) \nu^{1/2} g^{1/4}}{2 \sqrt{2} k_m^{3/4}} A_m \quad \text{при } H = \infty$$

$$A_m = \left[\int_{\Sigma} (\nabla \psi_m)^2 ds \right] \left(\int_{\Sigma} \psi_m^2 ds \right)^{-1}, \quad \omega_m^2 = g k_m^2 H \quad (3.5)$$

$$\lambda_m = \pm i \omega_m - \frac{(1 \pm i) \nu^{1/2} g^{1/4}}{2 \sqrt{2} H^{3/4} k_m^{3/2}} A_m \quad \text{при } H \rightarrow 0$$

Рассмотрим сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда, для которого область Σ — прямоугольник $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Решение задачи (3.2) в этом случае имеет вид

$$\Psi_{mn} = \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right), \quad k_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 0, 1, \dots) \quad (3.6)$$

Простое вычисление по формуле (3.4) дает

$$A_{mn} = \frac{2 \operatorname{th}(k_{mn} H)}{k_{mn}} \left[\frac{\pi^2 m^2}{a^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{2 - \delta_{n0}}{b} \right) + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2 - \delta_{m0}}{a} \right) \right] - \frac{2H}{\operatorname{ch}^2(k_{mn} H)} \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^3} + \frac{\pi^2 n^2}{b^3} \right) + \frac{k_{mn}^2}{\operatorname{ch}^2(k_{mn} H)} (m^2 + n^2 \neq 0) \quad (3.7)$$

где δ_{m0} , δ_{n0} — символы Кронекера. Формулы (2.21), (3.3), (3.6), (3.7) определяют решение задачи в случае прямоугольного параллелепипеда. Полагая $n = 0$, $b \gg a$ в (3.6), (3.7), получим для случая плоских поперечных колебаний жидкости в длинном прямоугольном канале формулу

$$A_{m0} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \left[\frac{2 \operatorname{th}(k_{m0} H)}{\pi m} + \frac{1 - (2H/a)}{\operatorname{ch}^2(k_{m0} H)} \right], \quad k_{m0} = \frac{\pi m}{a} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Здесь a — ширина, H — глубина канала.

Если положить еще $H = \infty$, то формулы (3.8), (3.5) дадут собственные частоты плоских колебаний вязкой жидкости, заключенной между двумя параллельными вертикальными плоскостями

$$\lambda_m = \pm i \left(\frac{\pi m g}{a} \right)^{1/2} - (1 \pm i) \left(\frac{\pi m g v^2}{4a^5} \right)^{1/4} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Этот случай рассмотрен в работе [4], где получено такое же выражение для λ_m . В другом предельном случае канала малой глубины ($H \ll a$) найдем из (3.8), (3.5)

$$\lambda_m = \pm i \frac{\pi m}{a} [(gH)^{1/2} - (1 \pm i) \left(\frac{\pi^2 m^2 g v^2}{64 a^2 H^3} \right)^{1/4}] \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Рассмотрим теперь сосуд в форме прямого кругового цилиндра радиуса a , глубины H . Решение задачи (3.2) для круга $r \leq a$ можно взять в виде

$$\begin{aligned} \psi_{0n} &= 2^{-1/2} J_0(\mu_{0n} r/a), & \psi_{mn}^{(1)} &= J_m(\mu_{mn} r/a) \cos m\varphi \\ \psi_{mn}^{(2)} &= J_m(\mu_{mn} r/a) \sin m\varphi & (m, n &= 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь r, φ — полярные координаты в плоскости xy с центром на оси цилиндра, μ_{mn} — последовательные положительные корни производных функций Бесселя

$$J_m'(\mu_{mn}) = 0, \quad 0 < \mu_{m1} < \mu_{m2} < \dots \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Числа k_{mn} связаны с μ_{mn} соотношениями $ak_{mn} = \mu_{mn}$, где $m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$, а частоты ω_{mn} выражаются через k_{mn} общей формулой (3.3). Собственные числа k_{mn} при $m > 0$ двукратны.

Вычислим для функций (3.9) интегралы, входящие в формулу (3.4)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\nabla \psi_{mn})^2 dl &= \frac{\pi m^2}{a} J_m^2(\mu_{mn}), & \int_{\Gamma} \psi_{mn}^2 dl &= \pi a J_m^2(\mu_{mn}) \\ \int_{\Sigma} \psi_{mn}^2 ds &= \frac{\pi a^2}{\mu_{mn}^2} \int_0^{\mu_{mn}} J_m^2(x) x dx = \frac{\pi a^2}{2\mu_{mn}^2} (\mu_{mn}^2 - m^2) J_m^2(\mu_{mn}) \\ \int_{\Sigma} (\nabla \psi_{mn})^2 ds &= \pi \int_0^{\mu_{mn}} \left[J_m'^2(x) + \frac{m^2}{x^2} J_m^2(x) \right] x dx = \pi \int_0^{\mu_{mn}} \left[-J_m(xJ_m')' + \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{x} J_m^2 \right] dx = \pi \int_0^{\mu_{mn}} J_m^2(x) x dx = \frac{\pi}{2} (\mu_{mn}^2 - m^2) J_m^2(\mu_{mn}) \end{aligned}$$

При преобразованиях использованы некоторые равенства для функций Бесселя [13], а также условие (3.10). Подставив результаты вычислений в формулы (3.4), (2.21), найдем

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{\mu_{mn}^2}{a^2} \left[\frac{\mu_{mn}^2 + m^2}{\mu_{mn} (\mu_{mn}^2 - m^2)} \operatorname{th} \left(\frac{\mu_{mn} H}{a} \right) + \frac{1 - (H/a)}{\operatorname{ch}^2(\mu_{mn} H/a)} \right] \quad (3.11) \\ \operatorname{Re} \lambda_{mn} &= - \frac{v^{1/2} g A_{mn}}{2 \sqrt{2} \omega_{mn}^{3/2}}, & \omega_{mn}^2 &= \frac{\mu_{mn} g}{a} \operatorname{th} \left(\frac{\mu_{mn} H}{a} \right) \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В частном случае $m = 1, H \gg a$ аналогичная формула для коэффициента затухания $\operatorname{Re} \lambda_{1n}$ другим способом приближенно получена в работе [8].

В работе [9] приведены экспериментальные зависимости коэффициента затухания собственных колебаний жидкости в цилиндре в зависимости от H/a и числа Рейнольдса для главного колебания ($m = 1, n = 1, \mu_{11} = 1.841$). Результаты расчетов по формулам (3.11) качественно вполне согласуются с данными экспериментов при различных H/a и v . Теоретические значения коэффициента затухания $\operatorname{Re} \lambda_{11}$, вычисленные по формулам (3.11), составляют примерно 0.71 от экспериментальных значений, получен-

ных в работе [9], причем это отношение сохраняется при различных ν и H/a . Такое же расхождение между теоретическими и экспериментальными данными при $H = \infty$ отмечено и в работе [9].

В качестве примера сосуда переменной глубины рассмотрим канал с плоскими взаимно перпендикулярными стенками, наклоненными под углом 45° к вертикали. Область D , занятая жидкостью, определяется неравенствами $|y| - a \leq z \leq 0$, где $a > 0$ — максимальная глубина канала, равная половине его ширины. Собственное колебание идеальной жидкости в таком канале, соответствующее наименьшей частоте (главная форма колебаний), описывается потенциалом

$$\Phi_1 = (y + a)z, \quad \omega_1^2 = g/a \quad (3.12)$$

Соотношения (3.12) приведены в книге [1], и нетрудно непосредственно проверить, что они удовлетворяют задаче (2.5). Подставляя (3.12) в (2.21) и учитывая замечание в конце п. 2 (здесь S — ломаная $z = |y| - a$ при $|y| \leq a$, а Σ — отрезок $|y| \leq a$ оси y), получим после элементарных выкладок

$$\lambda_1 = \pm i \sqrt{g/a} - (1 \pm i)(g\nu^2/a^5)^{1/4}$$

4. Исследуем поведение решения задачи (1.6) вблизи контура Γ — линии контакта свободной поверхности Σ и стенок S . Выберем начало координат O в какой-либо точке контура Γ , ось z направим вертикально вверх, ось x — по касательной к Γ , а ось y — по внутренней нормали к Γ в плоскости Σ (фиг. 1). Ограничиваясь малой окрестностью точки O , заменим поверхность S касательной плоскостью к S в точке O , кривую Γ — касательной к ней в точке O , т. е. осью x , и будем рассматривать плоское движение в вертикальной плоскости yz .

Уравнения и краевые условия (1.6) примут вид

$$\begin{aligned} \lambda u &= -\nabla q + \nu \Delta u, & \operatorname{div} u &= 0 \text{ в } D, & u &= 0 \text{ при } z = -y \operatorname{tg} \delta \\ u_z &= \frac{\lambda}{g} q - \frac{2\lambda\nu}{g} \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} &= 0, & f &= \frac{u_z}{\lambda} \text{ при } z = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где u — двумерный вектор с компонентами u_y, u_z , а δ — угол между поверхностью стенок S и горизонтальной плоскостью в точке O . На основании уравнения неразрывности можно ввести функцию тока Ψ так, что $u_y = \partial \Psi / \partial z$, $u_z = -\partial \Psi / \partial y$. Переходя к функции тока Ψ и вводя полярные координаты r, θ в плоскости yz , перепишем соотношения (4.1) в виде

$$q_r = \frac{1}{r} \left[\frac{\nu}{r} (r \Psi_r)_r + \frac{\nu}{r^2} \Psi_{\theta\theta} - \lambda \Psi \right]_\theta, \quad \frac{q_\theta}{r} = - \left[\frac{\nu}{r} (r \Psi_r)_r + \frac{\nu}{r^2} \Psi_{\theta\theta} - \lambda \Psi \right]_r$$

при $-\delta \leq \theta \leq 0$

$$g \Psi_r + \lambda q + 2\lambda\nu (\Psi_\theta / r)_r = 0, \quad r \Psi_r + \Psi_{\theta\theta} = r^2 \Psi_{rr} \quad (4.2)$$

$$f = -\Psi_r / \lambda \text{ при } \theta = 0, \quad \Psi_r = \Psi_\theta = 0 \text{ при } \theta = -\delta \quad (y = r \cos \theta, z = r \sin \theta)$$

Здесь индексы r, θ обозначают частные производные, а функция $f(r)$ по-прежнему определяет возвышение свободной поверхности. Решение задачи (4.2) при $r \rightarrow 0$ ищем в виде

$$\Psi(r, \theta) = r^{1+k} M(\theta) + \dots \quad (4.3)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка по r . При этом компоненты скорости имеют порядок r^k при $r \rightarrow 0$, компоненты тензора напряжения — порядок r^{k-1} , а сила, действующая на стенку — порядок r^k . Требуя ограниченности скоростей и сил, будем считать $k > 0$. Подставляя (4.3) в первое уравнение (4.2), определим функцию q в виде

$$q = q_0(\theta) + [\nu r^{k-2} / (k-1)] [M'' + (k+1)^2 M]' + \dots \quad (k \neq 1) \quad (4.4)$$

где штрихом обозначены производные по θ . Подставим выражения (4.3), (4.4) во второе уравнение (4.2)

$$q_0' + [\nu r^{k-1} / (k-1)] [M'' + (k+1)^2 M]'' + \nu (k-1) r^{k-1} [M'' + (k+1)^2 M] + \dots = 0$$

Отсюда при $k \neq 1$ получаем уравнение для функции M , которое легко решается

$$[M'' + (k+1)^2 M]'' + (k-1)^2 [M'' + (k+1)^2 M] = 0 \quad (4.5)$$

$$M(\theta) = C_1 \sin(k+1)\theta + C_2 \cos(k+1)\theta + C_3 \sin(k-1)\theta + C_4 \cos(k-1)\theta$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные. Теперь подставим (4.3), (4.4) в краевые условия (4.2) и приравняем в них коэффициенты при главных степенях r . Получим при $k \neq 1$ условия

$$M'''' + (k+1)^2 M'' + 2k(k-1)M' = 0, \quad M'' - (k^2 - 1)M = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \\ M = 0, \quad M' = 0 \quad \text{при } \theta = -\delta \quad (4.6)$$

Подставляя общее решение (4.5) для $M(\theta)$ в условия (4.6), получим систему линейных однородных уравнений для постоянных C_i

$$C_1 + C_3 = 0, \quad C_2(k+1) + C_4(k-1) = 0 \quad (4.7) \\ -C_1 \sin(k+1)\delta + C_2 \cos(k+1)\delta - C_3 \sin(k-1)\delta + C_4 \cos(k-1)\delta = 0$$

$$C_1(k+1) \cos(k+1)\delta + C_2(k+1) \sin(k+1)\delta + C_3(k-1) \cos(k-1)\delta + C_4(k-1) \sin(k-1)\delta = 0$$

Для существования нетривиального решения определитель системы (4.7) нужно приравнять нулю. Получится характеристическое уравнение для показателя k

$$(k^2 + 1) \cos(k+1)\delta \cos(k-1)\delta + (k^2 - 1) [\sin(k+1)\delta \sin(k-1)\delta - 1] = 0$$

которое простыми преобразованиями приводится при $k > 0$ к виду

$$\cos k\delta = k \sin \delta \quad (4.8)$$

Представляет интерес наименьший положительный корень k уравнения (4.8), так как он определяет главный член асимптотики вида (4.3). Нетрудно убедиться, что такой корень $k(\delta)$ существует при любом угле δ в интервале $(0, \pi]$. Функция $k(\delta)$ монотонно убывает от ∞ до 0.5 при изменении δ от 0 до π . Значения функции $k(\delta)$ определя-

лись путем численного решения на ЭВМ уравнения (4.8). Некоторые из найденных значений приведены в таблице, а график функции $k(\delta)$ изображен на фиг. 2.

$\delta/\pi = 0$	$1/8$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$5/8$	1
$k = \infty$	1.4504	1	0.7855	0.5946	0.5248	0.5101	0.5029	0.5

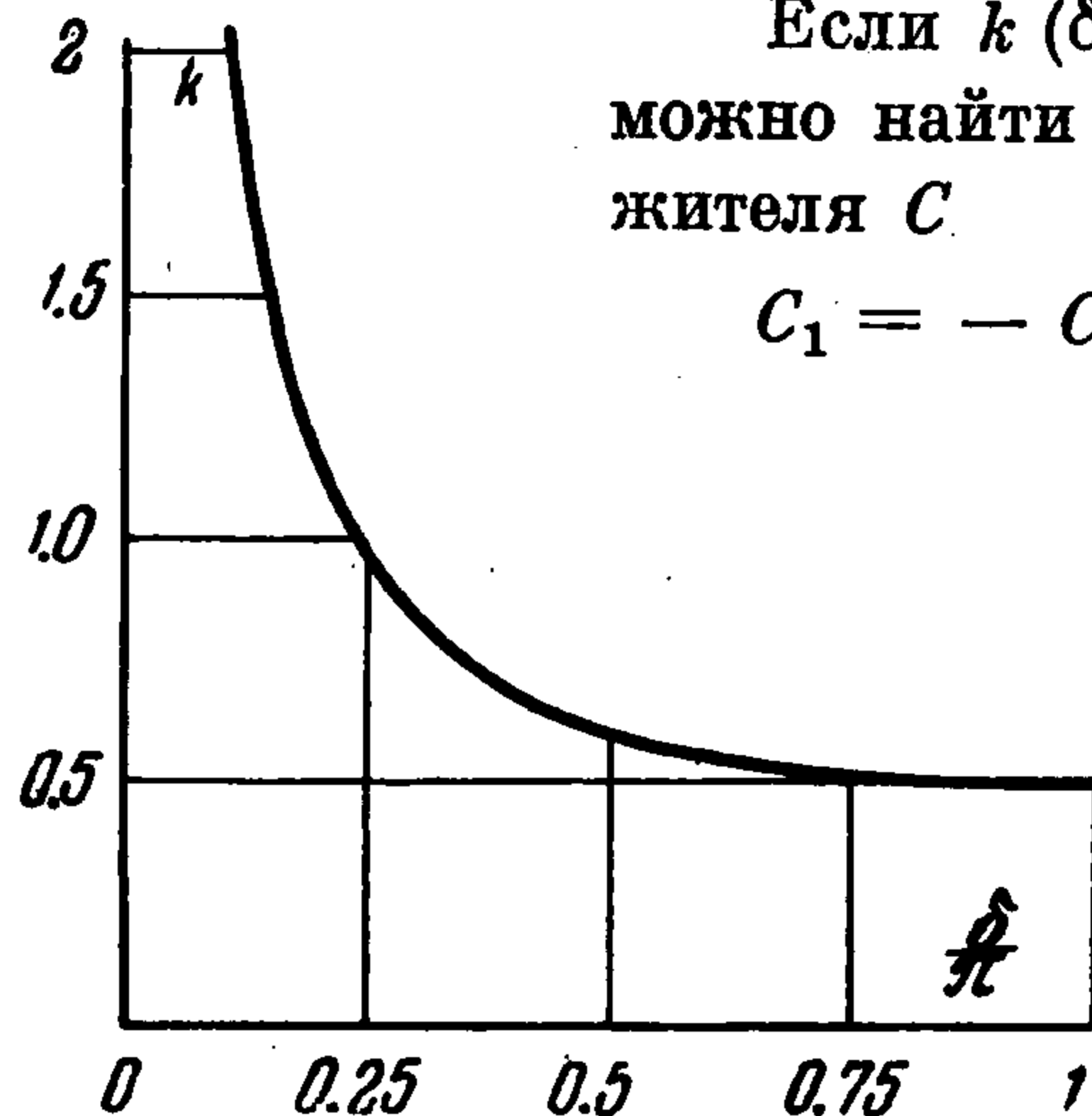
Отметим, что в случае $k = 1$ в равенстве (4.4) появляется логарифмический член, однако окончательный результат — уравнение (4.8) — при этом не меняется.

Если $k(\delta)$ удовлетворяет уравнению (4.8), то из системы (4.7) можно найти постоянные C_i с точностью до произвольного множителя C .

$$C_1 = -C_3 = C(\sin k\delta + \cos \delta), \quad C_2 = C(1 - k)\sin \delta$$

$$C_4 = C(1 + k)\sin \delta$$

Так как постоянные k и C_i найдены, то тем самым полностью определена функция $M(\theta)$ из (4.5) и главный член решения для функции тока (4.3). Построенное решение зависит лишь от угла наклона стенок и, по-видимому, описывает характер особенности решения задачи (1.6) вблизи контура Γ ; последующие члены разложения (4.3) должны зависеть также и от других геометрических свойств поверхности S (в частности, ее кривизны). При помощи (4.3) нетрудно



Фиг. 2

определить асимптотические выражения при $r \rightarrow 0$ для скоростей жидкости, напряжений и других гидродинамических величин. Так, возвышение свободной поверхности $f(r)$ в силу (4.2) пропорционально r^k при $r \rightarrow 0$.

Поступила 30 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а м б Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. М о и с е е в Н. Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье—Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.
3. Б а г а е в а Н. Я., М о и с е е в Н. Н. Три задачи о колебании вязкой жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2.
4. К р а с н о щ е к о в П. С. О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
5. Ш м и д т А. Г. Колебания вязкой жидкости конечной глубины, вызванные начальным смещением ее свободной поверхности. Ж. вычисл. математ. и математ. физ., 1965, т. 5, № 2.
6. К р у ш и н с к а я С. И. Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
7. К р е й н С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2.
8. В и к т о р о в Е. Д. Вычисление коэффициента затухания свободных колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде. ПМТФ, 1965, № 2.
9. М и к и ш е в Г. Н., Д о р о ж к и н Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
10. Ч е р н о у ш к о Ф. Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
11. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5 (77).
12. M o i s e y e v N. N. Introduction to the theory of oscillations of a fluid and body containing fluid. Advances in Appl. mechanics, Academic Press, New York — London, 1964, vol. 8.
13. Я н к е Е., Э м д е Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.