

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ И НЕКОТОРЫХ
ДРУГИХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ
В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ БОЛЬШОЙ, НО КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА**

А. Г. Куликовский

(Москва)

Изучается устойчивость плоскопараллельных течений в плоской трубе большой, но конечной длины при больших числах Рейнольдса, на основе представлений об устойчивости однородных состояний [1]. Показано, что плоскопараллельные течения с выпуклым симметричным профилем невозмущенной скорости не являются глобально неустойчивыми. Построен пример глобально неустойчивого течения с профилем скорости, имеющим точки перегиба.

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе постоянного сечения большой длины $-L \leq x \leq L$. Число Рейнольдса, вычисленное по ширине канала, будем предполагать достаточно большим. Всюду, за исключением отрезков трубы конечной длины, примыкающих к концам, профиль скорости можно считать Пуазейлевским и не зависящим от x . Эту область назовем основной частью потока. Будем считать, что на концах трубы $x = \pm L$ выставлены некоторые не зависящие от времени граничные условия, связывающие между собой возмущения гидродинамических величин и их производные, причем на каждом из концов в граничные условия входят значения указанных величин на этом же конце. Примером может служить условие, что возмущение скорости равно нулю при $x = \pm L$. Его можно считать выполненным, если жидкость втекает и вытекает через пористые стенки на концах трубы.

Отметим, что существенным обстоятельством в рассматриваемой постановке задачи является втекание и вытекание жидкости через границы рассматриваемой области.

Так как невозмущенное состояние и условия на границах стационарны, то зависимость возмущений скорости и давления от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$ и задача состоит в нахождении собственных значений ω . В основной части потока для заданного ω зависимость возмущений от x задается множителем $\exp(ikx)$, причем для каждого ω допустимые значения k определяются из условия существования нетривиального решения краевой задачи в плоскости yz , перпендикулярной к оси трубы (оси x). В случае течения между двумя плоскостями величина k должна быть выбрана так, чтобы существовало нетривиальное решение уравнения Орра—Зоммерфельда (см., например, [2])

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2 \varphi = ikR \left[\left(u - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) \varphi - \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi \right] \quad (0.1)$$

подчиненное граничным условиям

$$\varphi(\pm 1) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} \Big|_{y=\pm 1} = 0 \quad (0.2)$$

где y — безразмерная координата, $U(y)$ — невозмущенная скорость, $\varphi(y)$ — функция, связанная с функцией тока $\psi(x, y, z, t)$ для возмущения скорости соотношением

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(y) \exp i(kx - \omega t)$$

Так как в уравнении (0.1) коэффициент при старшей производной постоянен, а остальные коэффициенты зависят от ω и k аналитически, не обращаясь в бесконечность при конечных значениях ω и k , то и решения уравнения (0.1) зависят от ω и k аналитически. Поэтому условие существования нетривиального решения краевой задачи (0.1), (0.2) имеет вид

$$G(\omega, k) = 0 \quad (0.3)$$

где G — аналитическая мероморфная функция от ω и k , выражающаяся через значения при $y = \pm 1$ функций, составляющих фундаментальную систему решений уравнения (0.1), и их производных по y , взятых в тех же точках.

Каждому ω , в силу уравнения (0.3), соответствует, вообще говоря, бесконечное множество значений $k_j(\omega)$, которые являются собственными значениями краевой задачи (0.1), (0.2). Функции $k_j(\omega)$ являются ветвями аналитической функции $k(\omega)$, которая получается в результате разрешения уравнения (0.3). Каждая ветвь $k_j(\omega)$ соответствует некоторой волне вида $\exp i [k_j(\omega) x - \omega t]$ распространяющейся вдоль трубы. Условия на концах трубы вместе с переходными зонами (где происходит установление Пуазейлевского профиля скорости) порождают некоторые эффективные граничные условия, связывающие при $x = \pm L$ амплитуды волн, распространяющихся в основной части потока от концов трубы.

Рассматриваемая задача об устойчивости течения в достаточно длинной плоской трубе относится к типу задач, рассмотренных в [1]. Действительно, зависимость $k(\omega)$, получаемая из (0.3), такова, что при достаточно больших $\text{Im } \omega$ не существует [2] действительных значений k , удовлетворяющих уравнению (0.3).

Будем предполагать, что граничные условия при $x = \pm L$ обеспечивают корректность постановки задачи. Это предположение выполняется, например, если при $x = \pm L$ возмущение скорости обращается в нуль, так как при этом решение плоской нестационарной задачи о течении жидкости существует и единственно [3].

В работе [1] показано, что при достаточно больших L собственные решения, зависящие от времени как $\exp(-i\omega t)$, сводятся к двум типам — одностороннему и глобальному. Комплексная частота ω , соответствующая односторонним решениям, зависит от конкретного вида граничных условий на одном из концов. В глобальных решениях ω в пределе при $L \rightarrow \infty$ не зависит от конкретного вида граничных условий. Глобальные собственные решения являются аналогом квазиклассических, применявшихся при изучении слабонеоднородных систем [4].

Для глобальных решений собственная частота с наибольшей мнимой частью в общем случае является решением уравнения

$$\text{Im} [k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega)] = 0 \quad (0.4)$$

имеющим наибольшую мнимую часть. Обозначим это решение через ω_* . Через $k_s(\omega)$ и $k_{s+1}(\omega)$ в уравнении (0.4) обозначены ветви функции $k(\omega)$, для которых $\text{Im } k_s(\omega) > 0$, $\text{Im } k_{s+1}(\omega) < 0$ при достаточно больших $\text{Im } \omega$ и которые дают решение уравнения (0.4) с наибольшей мнимой частью. Собственная функция с $\omega = \omega_*$ представляет самоподдерживающуюся систему волн, соответствующих $k_s(\omega)$ и $k_{s+1}(\omega)$. Условием, при котором значению ω_* соответствует некоторая собственная функция рассматриваемой задачи, является то, что граничные условия при $x = \pm L$ должны обеспечивать отражение $s+1$ -й и s -й волн с амплитудами, не равными нулю тождественно по ω при падении соответственно s -й и $s+1$ -й волн на $x = L$ и $x = -L$. Обычно это условие всегда выполнено. Его выполнения всегда можно добиться, слегка изменив граничные условия. Наконец, в исключительном случае, когда это условие не выполнено для s -й и $s+1$ -й волн, глобальные собственные функции могут образовываться на основе других пар волн, для которых соответствующие ветви $k_i(\omega)$ и $k_j(\omega)$ подчинены условию $\text{Im } k_i(\omega) > 0$, $\text{Im } k_j(\omega) < 0$ при достаточно больших $\text{Im } \omega$. Получаемые при этом значения ω , очевидно, имеют мнимую часть, меньшую чем ω_* . Поэтому, если уравнение (0.4) не имеет решений с $\text{Im } \omega > 0$, то глобальной неустойчивости нет.

Отметим, что применение результатов работы [1] к системам, у которых каждому ω соответствует бесконечное множество k_j , основано на предположении о возможности предельного перехода, при котором краевая задача для системы с бесконечным числом волн, соответствующих заданному ω , получается как предел последовательности корректных краевых задач для систем с конечным числом волн. Хотя такой предельный переход для течения Пуазейля не рассматривался, возможность его проведения не вызывает серьезных сомнений. Кроме того, существование собственной функции, соответствующей решению уравнения (0.4) вытекает из физического смысла явления, связанного с прохождением и отражением s -й и $s + 1$ -й волн [1] и не зависящего от общего числа волн. Поэтому представляет интерес исследовать уравнение (0.4) в связи с задачей об устойчивости течения Пуазейля.

Как и обычно, наряду с задачей об устойчивости течения Пуазейля, будем также рассматривать, устойчивость плоскопараллельных течений, характеризующихся другим заданием невозмущенной скорости $U(y)$. Отметим, что течения вязкой жидкости с профилем скорости, отличным от Пуазейлевского, при отсутствии внешних сил, могут только приближенно рассматриваться как плоскопараллельные, и поэтому необходима некоторая осторожность при трактовке полученных результатов.

Ниже будет показано, что если профиль невозмущенной скорости является симметричным ($U(-y) = U(y)$), выпуклым ($U''(y) > 0$ при всех y) и число Рейнольдса достаточно велико, то уравнение (0.4) не имеет корней в верхней полуплоскости ω . Будет указан профиль невозмущенной скорости с точками перегиба такой, что соответствующее течение является глобально неустойчивым.

Наличие неустойчивости в том виде, как она понимается в этой работе, приводит к неограниченному росту возмущений всюду в потоке, так что ламинарное течение реально не может осуществиться; в частности, не может быть ламинарного участка течения, примыкающего к началу трубы.

1. Рассмотрим на комплексной плоскости ω полуплоскость $\text{Im } \omega > b$ и рассмотрим область Q (может быть, состоящую из нескольких отделенных одна от другой частей) на плоскости k , состоящую из всех точек, на которые отображаются точки полуплоскости $\text{Im } \omega > b$ при помощи хотя бы одной из ветвей $k_j(\omega)$ аналитической функции $k(\omega)$, задаваемой неявно уравнением (0.3). Граница области Q состоит из кривых, представляющих собой отображения на плоскость k прямой $\text{Im } \omega = b$. Согласно [2] при достаточно больших значениях b действительная ось k не принадлежит этим областям. Можно утверждать также, что для сколь угодно больших b существуют точки, принадлежащие Q и лежащие как в верхней $\text{Im } k > > 0$, так и в нижней $\text{Im } k < < 0$ полуплоскостях k . Например, можно показать, что если $\omega \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости, а k остается ограниченным, то $k \rightarrow i\pi n / 2$, где $n \neq 0$ — целое число (положительное или отрицательное). Эти значения k соответствуют собственным функциям уравнения Лапласа

$$\varphi'' - k^2\varphi = 0$$

к которому сводится уравнение для «невязких» [2] решений при $\omega \rightarrow \infty$. Таким образом, при достаточно большом b область Q разделена на две части — верхнюю Q_+ и нижнюю Q_- , не соединенные одна с другой.

При уменьшении b область Q может только расширяться, так как расширяется соответствующая область на плоскости ω . Если при $b = 0$ области Q_+ и Q_- на плоскости k остаются разделенными некоторой полосой, параллельной действительной оси k , то уравнение (0.4) не будет иметь решений в верхней полуплоскости ω . Действительно,

в силу условия о том, что при достаточно больших b выполняются неравенства $\text{Im } k_s > 0$, $\text{Im } k_{s+1} < 0$ и вследствие непрерывной зависимости k от ω можно утверждать, что для любого ω из верхней полуплоскости корни k_s и k_{s+1} принадлежат соответственно Q_+ и Q_- и, очевидно, уравнение (0.4) в рассматриваемом случае не выполняется для ω с $\text{Im } \omega > 0$. Дальнейшая часть работы посвящена доказательству того, что области Q_+ и Q_- на плоскости k , определенные для $b = 0$ (обозначим их Q_+^* и Q_-^*) уравнением (0.3), при достаточно больших R разделены полосой, параллельной действительной оси k .

2. Рассмотрим кривые $k_j(\omega)$ ($\text{Im } \omega = 0$), представляющие отображение действительной оси ω на плоскость k . Эти кривые могут служить границами областей Q_+^* и Q_-^* . Прежде всего заметим, что если некоторому $\omega = a + ib$ соответствует некоторое $k = \alpha + i\beta$, то значению $\omega = -a + ib$ соответствует $k = -\alpha + i\beta$, так как при этих значениях краевая задача (0.1), (0.2) имеет собственную функцию, комплексно-сопряженную с исходной. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только части кривых $k_j(\omega)$, соответствующие $\omega > 0$ (обозначим их через $k_j^*(\omega)$), так как части кривых $k_j(\omega)$, соответствующие $\omega < 0$, симметричны с ними относительно мнимой оси k .

Как известно [2, 5], существует только одна ветвь $\omega_1(k)$ функции $\omega(k)$, принимающая при действительных $k > 0$ значения с $\text{Im } \omega > 0$. Значения k , для которых $\text{Im } \omega_1 > 0$ заполняют отрезок $[k_1, k_2]$ на действительной оси k , вне которого $\text{Im } \omega_1(k) < 0$. Отсюда следует, что кривые $k_j^*(\omega)$ пересекают действительную ось в двух точках k_1 и k_2 . В работе [6] показано, что при больших числах Рейнольдса обе эти точки соответствуют пересечению действительной оси с одной и той же кривой, которую обозначим $k_*^*(\omega)$. Часть этой кривой, заключенная между точками k_1 и k_2 , расположена в нижней полуплоскости, а остальная кривая — в верхней.

Величина $\text{Im } \omega_1(k)$ положительна и ограничена на отрезке $[k_1, k_2]$ действительной оси k и отрицательна вне этого отрезка [2]; поэтому очевидно, что кривая $k_*^*(\omega)$ представляет в нижней полуплоскости k границу области Q_+^* . Для течений с выпуклым профилем невозмущенной скорости значения $k_*^*(\omega)$ с $\text{Im } k_*^*(\omega) < 0$, соответствующие им значения ω и $c = \omega / k$, одновременно стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, однако k_*^*R и $R \text{Im } k_*^*$ для тех же значений $k_*^*(\omega)$ стремятся к бесконечности. Так как, кроме $k_*^*(\omega)$, никакие другие кривые $k_*^*(\omega)$ не пересекают действительную ось k , то область Q_-^* и кривая $k_l^*(\omega)$, ограничивающая ее сверху, лежат в нижней полуплоскости. Очевидно, что если уравнение (0.3) имеет решение ω с $\text{Im } \omega > 0$ при больших R , то $\text{Im } k_{s+1} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Поэтому рассмотрим ветви функции $k(\omega)$, удовлетворяющие этому условию.

3. Считая число Рейнольдса достаточно большим, рассмотрим подробнее зависимость $k(\omega)$, которая обеспечивает существование нетривиального решения краевой задачи (0.1), (0.2). Так как R входит в уравнение (0.1) в виде комбинации kR , то, как обычно, будем рассматривать только такие значения k , для которых $kR \gg 1$.

При доказательстве упомянутого выше утверждения о том, что области Q_+^* и Q_-^* разделены полосой, параллельной действительной оси k , можно

не рассматривать малую область $k \sim 1/R$, так как внутри нее не может содержаться замкнутой части области Q^* . Последнее утверждение является следствием того, что область $k \lesssim 1/R$ не содержит точек, соответствующих $\omega_{\frac{1}{2}}^{\pm} = \infty$ ($k \rightarrow i\pi n/2$, $n \neq 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости).

Как известно [2,7], граничные условия (0.2) при $y = -1$ при достаточно больших kR можно записать следующим образом:

$$C_1\varphi_1(-1) + C_2\varphi_2(-1) + C_3\varphi_3(-1) = 0 \quad (3.1)$$

$$C_1\varphi_1'(-1) + C_2\varphi_2'(-1) + C_3\varphi_3'(-1) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по y . Функция φ_1 — решение «невязкого» уравнения

$$(U - c)(\varphi'' - k^2\varphi) - U''\varphi = 0 \quad (3.3)$$

не имеющее особенности в точке $y = y_c$, где $U(y_0) = c \equiv \omega/k$. При малых c имеют место равенства $\varphi_1(-1) = -c/U'(-1)$, $\varphi_1'(-1) = 1$ (предполагается, что $U'(y)$ непрерывно и что $U'(-1) \neq 0$).

Функция φ_2 вне некоторого интервала значений y длины порядка $1/(kR)^{1/3}$ с центром в точке y_c совпадает с решением невязкого уравнения (3.3), имеющим особенность в точке y_c . Внутри указанного интервала φ_2 удовлетворяет уравнению, учитывающему вязкость.

При малых c согласно [7]

$$\varphi_2(-1) = 1, \quad \varphi_2'(-1) = \frac{U''(y_c)}{U'(-1)} [f(z) - \ln |kRU'(-1)|^{1/3}] \quad (3.4)$$

где $f(z)$ — комплексная функция переменной

$$z = c [kR / U''(-1)]^{1/3}$$

Здесь и всюду ниже предполагается, что $-3\pi/2 < \arg k < \pi/2$.

При $z \rightarrow \infty$ функция $f(z)$ ведет себя как $\ln [-zU_1'(-1)]$, причем берется ветвь логарифма, равная $\ln |z| + i\arg(-z)$, так что при больших действительных $z > 0$ будет выполняться асимптотическое равенство $\varphi_2'(-1) = [U''(y_c)/U'(-1)] (\ln c - i\pi)$. Это представление справедливо [8], если $-\pi/6 < \arg z < 7\pi/6$.

Если ω действительно и положительно, а $\text{Im } k < 0$, то $0 < \arg z < 2\pi/3$. При конечных z функция $f(z)$ не обращается в бесконечность, так как уравнение, учитывающее вязкость, которому удовлетворяет функция φ_2 , не имеет особенностей [7].

Функция φ_3 — быстросменяющееся решение «вязкого» уравнения

$$\varphi'''' = ikR(U - c)\varphi'' \quad (3.5)$$

убывающее при возрастании y . Это решение при больших $|kR|$ очень быстро стремится к нулю с увеличением y , если $-3\pi/2 < \arg k < \pi/2$.

Введением новой переменной η вместо y уравнение (3.5) можно преобразовать к виду [2,7,9]

$$\frac{d^4\varphi}{d\eta^4} = -i\eta \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \quad (3.6)$$

причем в окрестности точки y_c переменная η связана с y следующим образом:

$$\eta = - (y - y_c) [kRU'(-1)]^{1/3}$$

При малых значениях c соответствующим образом пронормированное решение φ_3 при $y = -1$ удовлетворяет условиям [2,7,9]

$$\varphi_3(-1) = 1, \quad \varphi_3'(-1) = - \frac{[kRU'(-1)]^{1/3}}{D(z)} \quad (3.7)$$

Здесь

$$D(z) = \left[\frac{\varphi_3(\eta)}{d\varphi_3(\eta)/d\eta} \right]_{\eta=z} \quad (3.8)$$

При больших z

$$D(z) = z^{-1/2} e^{i\pi/4}$$

Если в уравнении (3.5) заменить $i\omega$ и ik на комплексно-сопряженные к ним величины, то этому уравнению будет удовлетворять решение, комплексно-сопряженное к первоначальному. При указанной замене вместо исходного значения z получим значение, симметричное с ним относительно прямой $\arg z = 5\pi/6$.

Так как комплексно-сопряженное решение будет с точностью до множителя тем же самым, то можно выбрать нормировочный множитель так, что на прямой $\arg z = 5\pi/6$ решение $\varphi_3(z)$ будет принимать действительные значения, а в точках, симметричных относительно этой прямой — комплексно-сопряженные значения. Этим же свойством должны обладать любые одночлены, составленные из решения $\varphi_3(z)$, и его производных, инвариантные относительно умножения φ_3 и z на произвольные постоянные, в частности, функция $D(z)/z$. Результаты численного счета функции φ_3 , проведенного в работе [9], подтверждают высказанные выше утверждения (см. значения φ_3 и ее производных при $\eta = 0$ и приведенное выше асимптотическое поведение функции $D(z)$ при $z \rightarrow \infty$).

Из результатов работы [9] следует, что функция $D(z)$ не обращается в нуль и бесконечность в конечных точках действительной оси z и принимает действительные значения только в точке $z = z_1 \approx 2.3$ и при $z \rightarrow \infty$, когда $D(z) \rightarrow 0$. Из отмеченного выше свойства симметрии функции $D(z)/z$ следует, что $D(z)$ ограничена также на прямой $\arg z = 2\pi/3$.

Граничные условия при $y = 1$ записываются аналогично. Обычно при течениях с симметричным профилем вместо условий при $y = 1$ выставляются условия симметрии собственных функций в середине канала при $y = 0$. Так как рассматриваемая краевая задача инвариантна относительно замены y на $-y$, то все собственные функции либо четны, либо нечетны. При больших kR в точке $y = 0$ можно не учитывать вклад в собственную функцию решения φ_3 , быстро убывающего при удалении от стенки. Поэтому при нахождении четных собственных функций должно быть выполнено условие

$$C_1\varphi_1'(0) + C_2\varphi_2'(0) = 0 \quad (3.9)$$

а при нахождении нечетных собственных функций — условие

$$C_1\varphi_1(0) + C_2\varphi_2(0) = 0 \quad (3.10)$$

Совместно с (3.1), (3.2) одно из этих условий представляет систему уравнений для нахождения C_1, C_2 и C_3 . Обозначим линейные комбинации решений φ_1 и φ_2 , удовлетворяющие соответственно условиям (3.9) и (3.10) через $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$. Тогда условия (3.1), (3.2), можно представить в виде

$$\frac{\varphi^{(i)}(-1)}{\varphi^{(i)' }(-1)} = \frac{\varphi_3(-1)}{\varphi_3'(-1)} \quad (3.11)$$

4. Покажем прежде всего, что если $k(\omega)$ для действительных ω стремится к действительному значению k_0 при $kR \rightarrow \infty$, то $k_0 = 0$ и соответствующее значение $c(k_0) \rightarrow 0$.

Предположим, что $k_0 \neq 0$. При этом $\arg k_0$ равен 0 или $-\pi$, а $\arg z$ равен 0 или $2\pi/3$ (считаем $\omega > 0$).

Рассмотрим сначала случай, когда c не стремится к нулю при $kR \rightarrow \infty$. При этом $z \rightarrow \infty$. Из уравнений (3.7), (3.8) следует, что $[\varphi_3(-1)/\varphi_3'(-1)] \rightarrow 0$ при $kR \rightarrow \infty$. Если c не мало, то φ_1 и φ_2 являются медленно меняющимися функциями y в окрестности $y = -1$ и из уравнения (3.11) следует, что $\varphi^{(i)}(-1) \rightarrow 0$. В пределе получим собственную функцию $\varphi^{(i)}$, удовлетворяющую невязкому уравнению и невязкому граничному условию непротекания $\varphi^{(i)}(-1) = 0$. Однако известно [2,10], что невязкая задача для течения с выпуклым профилем невозмущенной скорости имеет решение, соответствующее действительным k и c только в том случае, когда $k = 0$ и $c = 0$. Это противоречит исходному предположению о том, что c не стремится к нулю.

Пусть теперь $c \rightarrow 0$, $k \rightarrow k_0$ при $kR \rightarrow \infty$. Так как $D(z)$ не обращается в бесконечность на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = 2/3\pi$, то $\varphi_3'(-1)$ по порядку величины не меньше $(kR)^{1/3}$. Величина $\varphi_2'(-1)$ стремится к бесконечности при указанном выше предельном переходе, так как если z остается конечным, то $\varphi_2'(-1) \sim \ln |kR|^{1/3}$, а если $z \rightarrow \infty$, то $\varphi_2'(-1) \sim \ln c$. При этом $\varphi_2'(-1)$ по порядку величины не превосходит $\ln(kR)^{1/3}$. Величина $\varphi_1'(-1)$ остается конечной. Поэтому $[\varphi_3'(-1)/\varphi_2'(-1)] \rightarrow \infty$ и $[\varphi_2'(-1)/\varphi_1'(-1)] \rightarrow \infty$ при $kR \rightarrow \infty$. Из уравнения (3.2) при этом следует, что либо $C_2 \rightarrow 0$ и $C_3 \rightarrow 0$ (величина C_1 считается конечной), либо, что $(C_3/C_2) \rightarrow 0$.

В последнем случае в уравнении (3.1) можно пренебречь членом $C_3\varphi_3$.

Так как $[\varphi_1(-1)/\varphi_2(-1)] \rightarrow 0$, то из уравнения (3.1) при этом следует, что и в этом случае $C_2 \rightarrow 0$ и, следовательно, $C_3 \rightarrow 0$.

Таким образом, если $c \rightarrow 0$ при $kR \rightarrow \infty$, то решение краевой задачи в пределе сводится к невязкому решению φ_1 , удовлетворяющему невязкому граничному условию $\varphi_1(-1) = 0$ (так как $\varphi_2(-1) = c \rightarrow 0$). Как уже было сказано, это возможно только при $k = 0$, $c = 0$.

Собственная функция, которая при этом возникает, $\varphi_1(y) = U(y)$, является четной [10].

Из предыдущего следует, что кривые $k^*(\omega)$, которые при больших kR имеют точки вблизи действительной оси k , соответствуют четным собственным функциям и что они могут приближаться к действительной оси k только при малых k и c .

5. Рассмотрим кривые $k^*(\omega)$, соответствующие четным собственным функциям при достаточно больших значениях kR и малых c и k , причем будем интересоваться поведением этих кривых в нижней полуплоскости k , так что для соответствующих значений z выполняются неравенства $-2\pi/3 < \arg z < 0$.

При $k = 0$ решение φ_1 имеет вид [10]

$$\varphi_1(y) = \frac{U(y) - c}{U'(y_c)} \quad (5.1)$$

и является четным, так что $\varphi_1'(0) = 0$ при $k = 0$. Из уравнения (3.3) следует, что при малых значениях k производная $\varphi_1'(0) = \chi k^2$, где χ — некоторое действительное число. Решения φ_1 и φ_2 — независимы, поэтому $\varphi_2'(0) \neq 0$ при $k = 0$. Так как производная $\varphi_2'(0)$ действительна ($\varphi_2(y)$ действительна [2] при $y > y_c + 0 [(kR)^{-1/3}]$), то при малых значениях k четное невязкое решение $\varphi^{(1)}$ имеет вид

$$\varphi^{(1)} = \varphi_1 + \alpha k^2 \varphi_2 \quad (5.2)$$

где α — действительная постоянная. Используя явный вид [2] решений φ_1 и φ_2 в окрестности $y = y_c$ и постоянство определителя Вронского, можно показать, что $\alpha > 0$. Воспользовавшись значениями φ_1 , φ_2 и их производных при $y = -1$, можно записать уравнение (3.11) в виде

$$\frac{c}{\alpha k^2} + c \frac{U''(y_c)}{U'(-1)} [f(z) - \ln |kRU'(-1)|^{1/3}] - F(z) = 0 \quad (5.3)$$

Здесь первые два члена и функция $F(z)$ соответственно равны

$$[1 + U_1' \varphi^{(1)}(-1) / c \varphi^{(1)'(-1)}], \quad F(z) = [1 - D(z) / z]^{-1}$$

Уравнение (5.3) при больших z и малых действительных c и k , когда $f(z) - \ln(kRU')^{1/3} = \ln c - i\pi$, совпадает с соответствующим уравнением книги [2]. Как показано в работе [6] из того, что в верхнюю полуплоскость ω заходит единственная кривая $\omega(k)$ ($\text{Im } k = 0$), следует, что функция $F(z)$ не имеет в верхней полуплоскости z ни нулей, ни полюсов. На действительной оси $F(z)$ обращается в нуль только при $z = 0$, где имеет простой нуль (так как $D(0) \neq 0$). Функция $F(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$.

Если $z \rightarrow \infty$ при $kR \rightarrow \infty$, то второй член в левой части равенства (5.3) имеет порядок $c \ln c$ и стремится к нулю при $c \rightarrow 0$, в то время, как $F(z) \rightarrow 1$. Если z остается конечным при $kR \rightarrow \infty$, то $F(z)$ — конечно, второй член в (5.3) имеет порядок $c \ln(kR)^{1/3} \sim c (\ln z - \ln c) \sim c \ln c$ и стремится к нулю при $c \rightarrow 0$. Наконец, если $z \rightarrow 0$ при $kR \rightarrow \infty$, то $F(z) \sim z$ и второй член в уравнении (18) имеет, по отношению к $F(z)$, порядок $[\ln(kR)^{1/3} / (kR)^{1/3}]$. Таким образом, второй член в уравнении (5.3) при больших kR и малых c всегда мал по сравнению с $F(z)$ и им в первом приближении можно пренебречь. Получившееся уравнение

$$\frac{\omega}{\alpha k^3} = F(z) \quad (5.4)$$

с учетом соотношения $z = c [kR / U''(-1)]^{1/3}$ позволяет найти функции $k(z)$ и $\omega(z)$

$$\alpha R^{1/3} k^{2/3} = \frac{z}{F(z)}, \quad \alpha R^{3/2} \omega^{1/2} = \frac{z^{3/2}}{F(z)} \quad (5.5)$$

с тем большей точностью, чем больше kR . Одна ветвь $z_*(\omega)$ кривой $z^*(\omega)$, представляющей зависимость (5.5) z от действительных $\omega > 0$, пересекает действительную ось z в точке $z = z_1 \approx 2,3$ (где $F(z)$ действительна) и с ростом ω уходит в бесконечность в верхней полуплоскости z , асимптотически приближаясь к действительной оси [6]. Учет второго члена в уравнении (5.3) приводит к тому, что кривая $z_*(\omega)$ пересекает второй раз действительную ось при некотором конечном $z = z_2$ таком, что сумма двух последних членов в уравнении (5.3) действительна.

Значение z_2 , как и z_1 , соответствует действительным значениям ω и k (z_1 и z_2 определяют нейтральные колебания); $z_2 \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$, что является следствием асимптотической малости второго члена уравнения (12) по сравнению с третьим.

Если ввести новые переменные $\Omega = \alpha^{2/3} R^{3/2} \omega$, $K = \alpha^{3/2} R^{1/2} k$, то уравнения (5.5) приобретут универсальный вид

$$\Omega^{1/2} = \frac{z^{3/2}}{F(z)}, \quad K^{1/3} = \frac{z}{F(z)} \quad (5.6)$$

В эти уравнения не входит число Рейнольдса и параметр α , зависящий от формы невозмущенного профиля скорости. При $z \rightarrow 0$ величина Ω стремится к нулю, а K остается ограниченным.

Рассмотрим на комплексной плоскости K кривые $K^*(\Omega)$, соответствующие действительным значениям $\Omega > 0$ и лежащие в нижней полуплоскости K . Соответствующие им значения z , очевидно, лежат в секторе $0 < \arg z < 2\pi/3$.

Как было отмечено выше, $F(z)$ не обращается в нуль и бесконечность при $z \neq 0$ в верхней полуплоскости, поэтому большим значениям K на кривых $K^*(\Omega)$ соответствуют большие значения z , и наоборот. При этом $F(z) \approx 1$ и из уравнений (5.6), в соответствии с уравнением (5.4), получим

$$\Omega = K^3 \quad (5.7)$$

Это уравнение соответствует невязкому пределу в уравнении (5.4). В силу уравнения (5.7), верхней полуплоскости Ω на плоскости K соответствуют три сектора

$$-0 < \arg K < \pi/3, \quad -2\pi/3 < \arg K < -\pi/3, \quad -4\pi/3 < \arg K < -\pi$$

Как следует из (5.6), на плоскости z при больших z , когда $F(z) = 1$, этим секторам соответствуют сектора

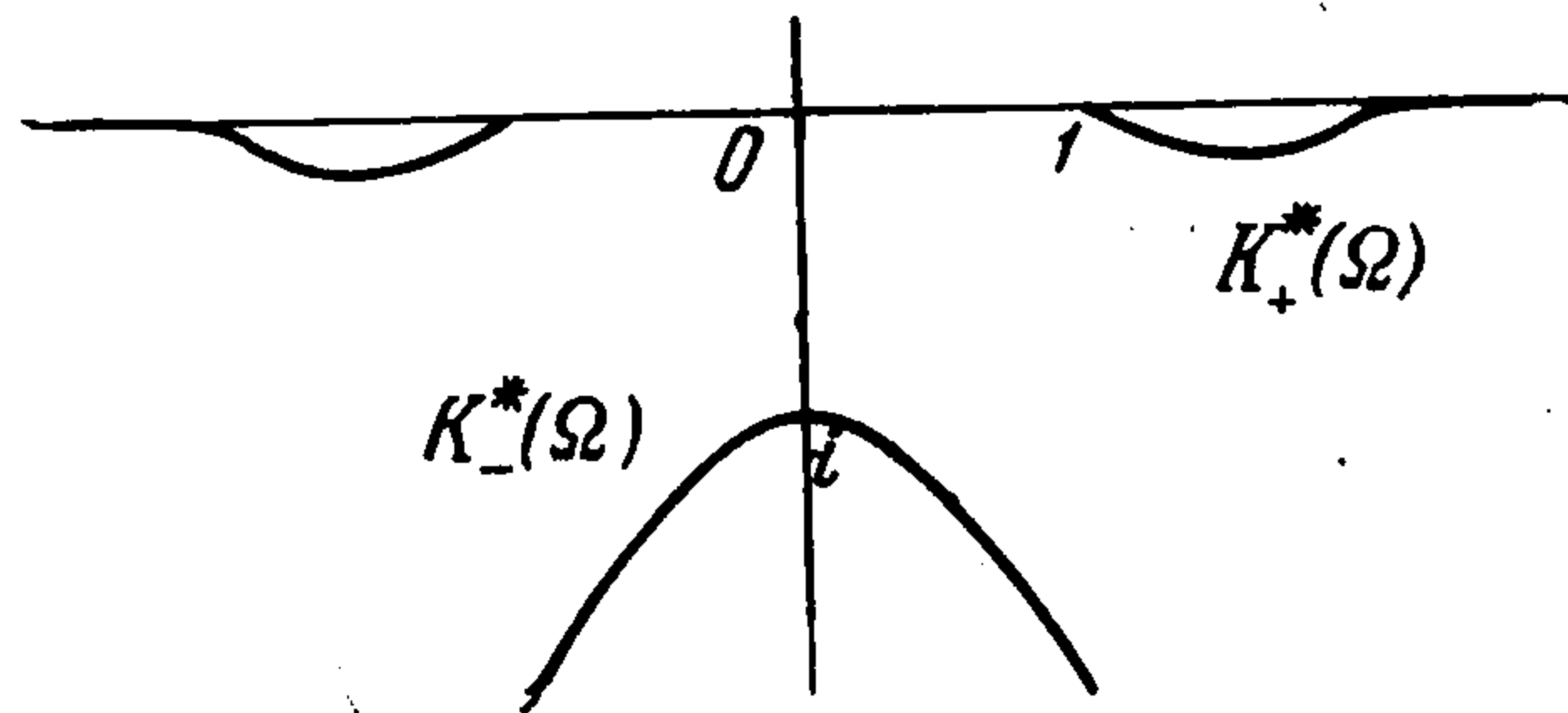
$$0 < \arg z < 7\pi/3, \quad 4\pi/9 < \arg z < 11\pi/9, \quad 8\pi/9 < \arg z < 5\pi/9$$

каждый из которых соответствует при $F(z) = 1$ верхней полуплоскости Ω . Заметим, что все эти сектора расположены в области получающейся добавлением к верхней полуплоскости z части плоскости z , симметричной с ней относительно прямой $\arg z = 5\pi/6$. Во всей этой области, так

же как и в верхней полуплоскости, $F(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$ и нет ни нулей, ни полюсов функции $F(z)$. При не очень больших значениях z и K , когда $F(z) \neq 1$, границы областей, соответствующих [верхней полуплоскости Ω на плоскостях z и K , не будут уже совпадать с границами указанных секторов.

Рассмотрим кривую $K_*(\Omega)$, ограничивающую область Q_* , которая при больших K совпадает с нижним сектором $-2\pi/3 < \arg K < -\pi/3$. Так как $F(z)$ на этой кривой не обращается в нуль, то согласно (5.6) значению $\Omega = 0$ соответствует $z = 0$. При малых z имеет место [9] равенство $F(z) = zA \exp(-i5\pi/6)$, $A \approx 1.1925$. Согласно второму уравнению (5.6), значению $z = 0$ соответствует в нижней полуплоскости K ($-\pi < \arg K < 0$) только значение $K = -iA^{-3/2} = -i0.8976$. Для этого значения K , воспользовавшись уравнениями (5.6), можно найти, что аргумент приращения dz , соответствующего $d\Omega > 0$, равен $\pi/3$.

Кривая $K_*(\Omega)$ и соответствующая кривая $z_*(\Omega)$ были получены путем численного счета на электронно-вычислительной машине. При этом вдоль линии $z_*(\Omega)$ интегрировалось дифференциальное уравнение (3.6) с начальными данными при $\eta = 0$, взятыми из работы [9]. Для каждого z вычислялось $D(z)$ по формуле (3.8), правая часть $\Phi(z) = z^{3/2} [1 - D(z)/z]$ в первом уравнении (5.6) и ее производная по z .



Фиг. 1

Аргумент приращения Δz для каждого шага определялся из условия $\text{Im} [\Phi(z + \Delta z)] = \text{Im} \Phi(z) + \text{Im} [\Phi'(z) \Delta z] = 0$. Аргумент первого шага был выбран равным $\pi/3$. Длина шагов $|\Delta z| = 0.001$.

Результаты расчета представлены в табл. 1, а кривая $K_*(\Omega)$ изображена на фиг. 1. Кривая $K_*(\Omega)$, соответствующая $\Omega > 0$, лежит в области $\text{Re } K < 0$, $\text{Im } K < 0$ и представляет часть границы области Q_* .

Таблица 1

$n/100$	Ω	$\text{Re } z$	$\text{Im } z$	$\text{Re } K_*$	$\text{Im } K_*$
0	0	0	0	0	-0.8976
2	0.1877	0.08950	0.1787	-0.08085	-0.9061
4	0.3839	0.1601	0.3558	-0.1564	-0.9297
6	0.5937	0.2168	0.5576	-0.2245	-0.9628
8	0.8185	0.2645	0.7518	-0.2855	-1.001
10	1.058	0.3065	0.9473	-0.3405	-1.041
15	1.716	0.3980	1.439	-0.4580	-1.144
20	2.447	0.4806	1.932	-0.5553	-1.244
30	4.080	0.6404	2.919	-0.7102	-1.428
40	5.900	0.8024	3.906	-0.8335	-1.595
60	9.947	1.128	5.879	-1.029	-1.879
80	14.42	1.463	7.851	-1.182	-2.119

Другая часть границы области Q_* соответствует отрицательным значениям Ω и симметрична с кривой $K_*(\Omega)$ относительно мнимой оси.

Кривая $K_+^*(\Omega)$, представляющая границу области Q_+^* (Q_+^* при больших K переходит в два сектора $0 < \arg K < \pi/3$ и $-4\pi/3 < \arg K < \pi$), рассчитана аналогичным образом в той ее части, которая лежит в нижней полуплоскости K . При этом дифференциальное уравнение (3.6) считалось сначала вдоль действительной оси z от нуля до точки $z = z_1 \approx 2,3$, где $\text{Im } \Phi(z)$ обратилось в нуль, а затем аргумент каждого следующего шага Δz находился из условия $\text{Im } \Phi(z + \Delta z) = 0$, как было описано выше. Отметим, что результаты счета дифференциального уравнения (3.6) вдоль действительной оси совпадают с численными данными работы [9] с точностью до трех знаков.

Результаты расчета кривой $K_+^*(\Omega)$ представлены в табл. 2. Кривая $K_+^*(\Omega)$ изображена на фиг. 1. Симметрично с ней относительно мнимой оси расположена кривая, соответствующая отрицательным значениям Ω и также представляющая границу области Q_+^* .

Из табл. 1 и 2 и фиг. 1 видно, что области Q_+^* и Q_-^* разделены полосой, параллельной действительной оси K . Поэтому уравнение (0.4) не имеет корней с $\text{Im } \omega > 0$ и плоскопараллельное течение с симметричными выпуклыми профилями невозмущенной скорости при больших числах Рейнольдса не является глобально неустойчивым.

6. Рассмотрим теперь устойчивость плоскопараллельного течения в трубе, когда профиль невозмущенной скорости имеет точки перегиба, и скорость отлична от постоянной только в узких, по сравнению с шириной канала, зонах, прилегающих к стенкам (пограничные слои). Профиль невозмущенной скорости предполагается симметричным, а число Рейнольдса — достаточно большим.

Будем теперь считать, что в уравнении (0.1) безразмерные величины y , k и число Рейнольдса R вычислены по толщине пограничного слоя (внутри которого $U \neq 1$). При этом безразмерная толщина пограничного слоя будет равна единице, а безразмерную полуширину канала обозначим через $h + 1$ и будем считать ее достаточно большой. Выберем начало отсчета y на внешней границе пограничного слоя, так что $y = -1$ на стенке и $y = h$ в центре канала.

Таблица 2

$n/100$	Ω	$\text{Re}z$	$\text{Im}z$	$\text{Re}K_+^*$	$\text{Im}K_+^*$
23.5	2.381	2.350	0.01216	1.012	-0.002792
24	2.458	2.387	0.02387	1.037	-0.01548
26	2.818	2.593	0.07980	1.110	-0.04558
30	3.508	2.984	0.1532	1.268	-0.1010
35	4.556	3.478	0.2242	1.487	-0.1474
38	5.239	3.778	0.2410	1.621	-0.1553
40	5.703	3.978	0.2338	1.705	-0.1506
45	6.828	4.474	0.1716	1.880	-0.1082
50	7.837	4.967	0.09227	1.980	-0.05519
55	8.794	5.466	0.05810	2.040	-0.03253
60	9.802	5.966	0.05916	2.106	-0.03157
70	11.99	6.966	0.06851	2.258	-0.03331
80	14.28	7.966	0.06233	2.401	-0.02818

n — число шагов при счете дифференциального уравнения (3.6).

Рассмотрим при малых значениях k и c собственную функцию $\varphi^{(1)}(y)$, симметричную относительно середины канала. При этом всюду, за исключением узкого пристеночного слоя, собственная функция $\varphi^{(1)}(y)$ представляется в виде линейной комбинации невязких решений $\varphi^{(1)} = \varphi_1 + A\varphi_2$. Постоянная A определяется из условия в центре канала $\varphi^{(1)'}(h) = 0$ (см. уравнение (3.9)).

Граничные условия на стенке $\varphi(-1) = 0$, $\varphi'(-1) = 0$ должны удовлетворяться с учетом вязкого решения φ_3 . Подобно тому, как это было сделано выше, при получении уравнения (5.3), используя значения φ_1 , φ_2 , φ_3 и их производных при $y = -1$, получим уравнение, связывающее ω и k при произвольном A :

$$\frac{\omega}{Ak} + \frac{U''(y_c)}{U'(-1)} c [f(z) - \ln |kRU'(-1)|^{1/3}] - F(z) = 0 \quad (6.1)$$

В п. 5 было показано, что если $k \rightarrow 0$ при неизменном профиле невозмущенной скорости, то $A \rightarrow \alpha k^2$ и это значение было использовано при выводе уравнения (5.3). Если же при $k \rightarrow 0$ величина $h \rightarrow \infty$ таким образом, что произведение kh не стремится к нулю, то, как будет показано ниже, величина A не будет при этом стремиться к значению αk^2 .

Вне пограничного слоя $U''(y) = 0$ и любое невязкое решение представляется в виде линейной комбинации $C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}$. При $k = 0$ решение φ_1 пропорционально $U(y) - c$, так что $\varphi_1'(0) = 0$. При малых значениях k величина $\varphi_1'(0)$ будет порядка k^2 . Пренебрегая этой величиной, получим, что при $y > 0$

$$\varphi_1 = \text{ch } ky \quad (6.2)$$

Обозначим значения $\varphi_2(0)$ и $\varphi_2'(0)$ при $k = 0$, $c = 0$, соответственно через a и b (a и b действительны). Из линейной независимости решений φ_1 и φ_2 следует, что $b \neq 0$. При малых k и c значения $\varphi_2(0)$ и $\varphi_2'(0)$ могут отличаться соответственно от a и b не более чем на величину порядка k^2 , c . Отсюда следует в случае малых k и c , что при $y > 0$ приближенно выполняется равенство

$$\varphi_2 = \frac{b}{k} \text{sh } ky \quad (6.3)$$

При этом из условия $\varphi'(h) = 0$ получим

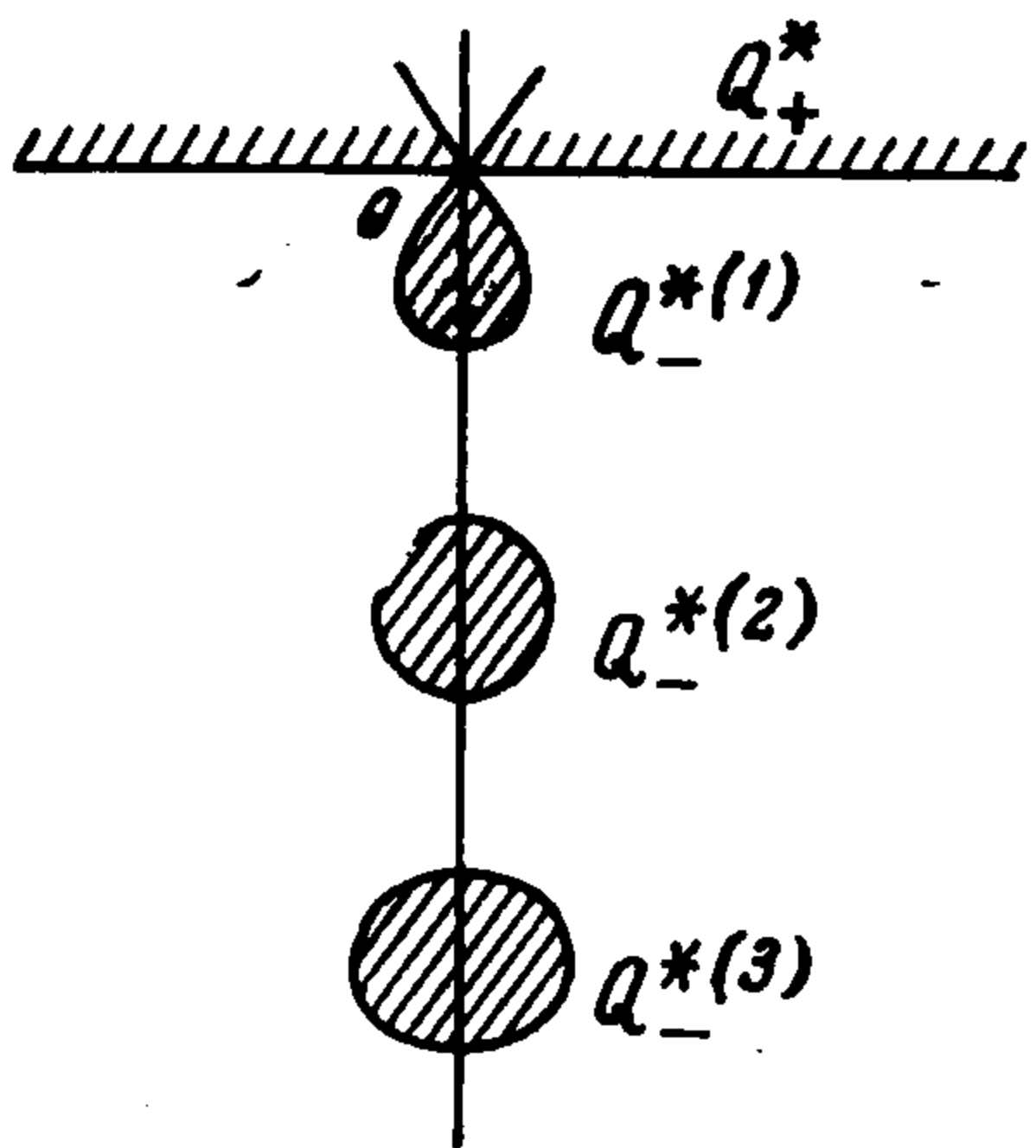
$$A = -\frac{k}{b} \text{th } kh \quad (6.4)$$

Если при фиксированном h неограниченно уменьшать k , то A становится пропорциональным k^2 , как это предполагалось при выводе уравнения (5.3). Если же при фиксированном k с $\text{Re } k > 0$ устремить h к бесконечности, то первый член в уравнении (5.1) приобретает форму ω / k^2 , характерную для пограничного слоя [2,11]. Как было показано выше, при малых

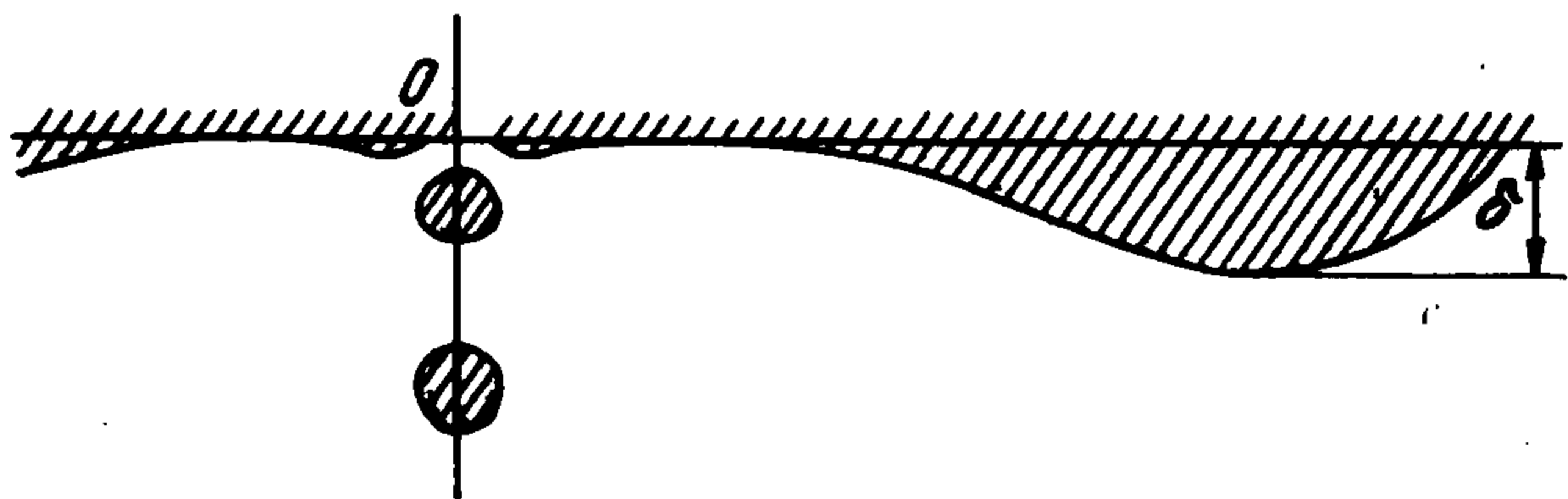
k и c и достаточно большом kR второй член в уравнении (5.1) мал по сравнению с $F(z)$, и им в первом приближении можно пренебречь. Тогда уравнение (5.1) приобретает вид

$$\frac{b\omega}{k^2 \operatorname{th} kh} = F(z) \quad (6.5)$$

Рассмотрим сначала невязкий случай, когда $F(z) = 1$. При этом области Q_+^* и Q_-^* имеют вид, изображенный на фиг. 2. Каждая из замкнутых областей $Q_-^{*(1)}$, $Q_-^{*(2)}$, ... в нижней полуплоскости k соответствует всей верхней полуплоскости ω . Размер каждой из них по вертикали равен $\pi / 2h$. При достаточно большом числе Рейнольдса влияние вязкости на изображенную на фиг. 2 картину ограничивается областями, где величина z , имеющая порядок $\omega R^{1/3} / k^{2/3}$, мала, т. е. окрестностями точек $k = 0 \pm i\pi n / h$, в которых ω обращается в нуль. В частности, как было показано выше, в малой окрестности $|k| \ll 1/h$ точки $k = 0$ поведение кривых, ограничивающих области Q_+^* и Q_-^* , имеет вид, изображенный на фиг. 1.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим теперь несколько большие значения k , когда в дисперсионном уравнении, кроме членов, сохраненных в равенстве (6.5), нужно учитывать и другие члены. Будем считать $F(z) = 1$ и $\operatorname{Re} kh \gg 1$, так что $\operatorname{th} kh = 1$ для k с $\operatorname{Re} k > 0$. При этом дисперсионное уравнение рассматриваемой задачи совпадает с дисперсионным уравнением для невязкого пограничного слоя. Как известно [2,10], если в профиле невозмущенной скорости имеется точка перегиба, то существует интервал на действительной оси k , точкам которого соответствует ω с $\operatorname{Im} \omega > 0$. Это значит, что в этом случае граница области Q_+^* , которая занимает большую часть верхней полуплоскости k , опускается ниже действительной оси k , как показано на фиг. 3. Глубина δ , на которую опускается нижняя граница области Q_+^* , стремится к конечному пределу при $h \rightarrow \infty$. Если h достаточно велико, так что $\pi / 2h < \delta$, то нижняя граница области $Q_-^{*(1)}$ окажется выше нижней точки области Q_+^* . Так как область $Q_-^{*(1)}$ соответствует всей верхней полуплоскости ω , то, очевидно, должны существовать пары значений k , одно из которых принадлежит области Q_+^* , а другое $Q_-^{*(1)}$, соответствующие одному и тому же ω с $\operatorname{Im} \omega > 0$. Таким образом, уравнение (0.4) выполняется для некоторых значений ω из верхней полуплоскости, и рассматриваемое течение глобально неустойчиво.

Полученный результат, по-видимому, свидетельствует также о неустойчивости пограничного слоя при достаточно больших значениях числа Рейнольдса, хотя при предельном переходе $h \rightarrow \infty$ в невязком случае размеры областей $Q_+^{*(1)}$, $Q_-^{*(2)}$. . . , расположенных в нижней полуплоскости, неограниченно уменьшаются, и каждая из них стремится к точке $k = 0$.

При наличии вязкости и конечном h границы областей $Q_-^{*(1)}$, $Q_-^{*(2)}$, . . . изменяют свое положение, по сравнению с невязким случаем, однако в окрестностях точек, где ω и, следовательно, z обращаются в бесконечность, функция $k(\omega)$ будет иметь тот же вид, что и в невязком случае.

Возмущения, соответствующие значению $k(\omega)$ из области $Q_-^{*(1)}$, при больших значениях h медленно затухают при удалении от стенки (декремент затухания равен $\operatorname{Re} k(\omega)$). При этом рассматриваемые возмущения распространяются в основном во внешней области по отношению к пограничному слою и представляют собой, как нетрудно проверить, решения уравнения Лапласа.

Автор благодарен С. В. Иорданскому за обсуждение вопросов, связанных с настоящей работой, и И. Е. Киреевой за составление программы численного счета.

Поступила 13 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, т. 30, вып. 1.
2. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, 1961.
4. Рухадзе А. А., Силин В. П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. Усп. физ. н., 1964, т. 82, вып. 3.
5. G r o n e D. Über das spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. Z. angew. Math. Mech., t. 35, p. 344.
6. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса. ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 10.
7. T o l l m i e n W. Asimptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Z. angew. Math. Mech. 1947, t. 25/27, p. 33, 70.
8. W a s o w W. The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Ann. Math., 1948, ser., 2, t. 49, p. 852.
9. H o l s t e i n H. Über die aussere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminar Strömungen. Z. angew. Math. Mech., 1950, t. 30, p. 25.
10. T o l l m i e n W. Ein allgemeines Kriterium der Instabilität Laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1935, t. 50, p. 79.
11. L i n C. C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Quart. Appl. Math., 1945, vol. 3, No. 2, pp. 117—142; No. 3, pp. 218—234; 1946, vol. 3, No. 4, pp. 277—301.