Прикладная математика и механика. Том 30, 1966

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О. А. Олейник

(Москва)

В работе доказывается существование гладкого решения системы уравнений пограничного слоя для двумерного нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости при наличии произвольного вдува или отсоса через границу тела. Показано, что для таких течений решение системы Прандтля всегда существует для всех значений времени t вблизи начала обтекания и, кроме того, решение существует для некоторого промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ вдоль всего обтекаемого тела. В работе указан способ построения приближенного решения системы уравнений Прандтля теории пограничного слоя и доказана сходимость таких приближений. Краткое изложение результатов настоящей статьи имеется в [1].

Будем рассматривать систему уравнений пограничного слоя для нестационарного двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \nu u_{yy}, \qquad u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

в области

$$D\,\{0 \leqslant t < t_0,\ 0 \leqslant x < x_0,\ 0 \leqslant y < \infty\} \qquad (t_0 \leqslant \infty,\ x_0 \leqslant \infty)$$

с условиями

$$u\,|_{t=0} = u_0(x, y), \qquad u\,|_{y=0} = 0, \qquad v\,|_{y=0} = v_0(t, x), \qquad u\,|_{x=0} = u_1(t, y) \tag{2}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(t, x, y) = U(t, x) \tag{3}$$

Функции $p(t, x)$ и $U(t, x)$ связаны законом Бернулли $U_t + UU_x = -p_x$. Плотность ρ считаем равной единице.

Вывод этих уравнений имеется, например, в [2,3]. Система уравнений Прандтля для стационарного пограничного слоя изучена в работе [4]. Методы, которые будем применять для построения решений задачи (1)—(3), полностью применимы также и для доказательства существования решения системы уравнений Прандтля для стационарного пограничного слоя.

По физическим условиям задачи $u > 0$ при $y > 0$, $U(t, x) > 0$. Будем предполагать, что $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ при $y > 0$, $u_{0y} > 0$, $u_{1y} > 0$ при $y \geqslant 0$.

Для доказательства существования решения задачи (1)—(3) в области D при некоторых условиях на величину t_0, либо x_0, которые укажем ниже, перейдем к новым независимым переменным

$$\tau = t, \qquad \xi = x, \qquad \eta = u(t, x, y) \tag{4}$$

и новой неизвестной функции $w = u_y$. Имеем

$$w_\eta = \frac{u_{yy}}{u_y}, \quad w_{\eta\eta} = \frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y^3}, \quad w_\tau = u_{yt} - \frac{u_{yy}u_t}{u_y}, \quad w_\xi = u_{yx} - \frac{u_{yy}u_x}{u_y}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (1) относительно y, пользуясь вторым уравнением системы (1) для исключения v_y и выражением для v, полученным из первого уравнения, получим для новой функции w уравнение

$$L(w) \equiv \nu w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta w_\xi + p_x w_\eta = 0 \tag{5}$$

Замена независимых переменных (4) переводит область D в область

$$\Omega \,\{0 \leqslant \tau < t_0,\ 0 \leqslant \xi < x_0,\ 0 \leqslant \eta < U(\tau, \xi)\}$$

Условия (2), (3) на границе области D приводят к условиям на границе Ω

$$w|_{\tau=0} = u_{0y} \equiv w_0(\xi, \eta), \qquad w|_{\xi=0} = u_{1y} \equiv w_1(\tau, \eta), \qquad w|_{\eta=U(\tau,\xi)} = 0 \tag{6}$$

$$l(w) \equiv \nu w w_\eta - v_0 w - p_x = 0 \text{ при } \eta = 0 \tag{7}$$

Будем предполагать u_0 и u_1 такими, что w_0 и w_1 будут достаточно гладкими функциями на соответствующей границе Ω. Функция $U(\tau, \xi) > 0$ при всех τ и ξ.

Решение задачи (5)—(7) получим как предел функций w^n при $n \to \infty$, определенных следующим образом:

$$L_n(w^n) \equiv \nu (w^{n-1})^2 w_{\eta\eta}{}^n - w_\tau{}^n - \eta w_\xi{}^n + p_x w_\eta{}^n = 0 \tag{8}$$

в области Ω, w^n удовлетворяет условиям (6) и условию

$$l_n(w^n) \equiv \nu w^{n-1} w_\eta{}^n - v_0 w^{n-1} - p_x = 0 \tag{9}$$

на границе $\eta = 0$ области Ω.

За w° возьмем некоторую гладкую функцию, удовлетворяющую условиям (6) и условию $w^\circ > 0$ при $\eta < U(\tau, \xi)$. Будем предполагать, что существует такая гладкая функция $\varphi_0(\tau, \xi, \eta)$ в области Ω, что $w_0 \geqslant \varphi_0(0, \xi, \eta)$, $w_1 \geqslant \varphi_0(\tau, 0, \eta)$ и $\varphi_0 > 0$ при $\eta < U(\tau, \xi)$, причем $\varphi_0 \equiv m_0(U(\tau, \xi) - \eta)^k$ при некотором $m_0 > 0$ и $k \geqslant 1$, если $U(\tau, \xi) - \eta < \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ некоторое малое число. Предположим сначала, что существует решение w^n $(n = 1, 2, \ldots)$ задачи (8), (6), (9), которое имеет непрерывные производные третьего порядка в замыкании $\bar\Omega$ области Ω, и покажем, что w^n сходятся при $n \to \infty$ к решению задачи (5)—(7), а затем докажем существование w^n и укажем при этом способ их приближенного построения. Будем предполагать, что t_0 и x_0 конечны.

Лемма 1. Пусть гладкая функция V такова, что $L_n(V) \geqslant 0$ в Ω и $l_n(V) > 0$ при $\eta = 0$. Пусть $V \leqslant w^n$ при $\tau = 0$, а также при $\xi = 0$. Пусть $w^{n-1} > 0$ при $\eta = 0$. Тогда $V \leqslant w^n$ всюду в Ω.

Пусть гладкая функция V_1 такова, что $L_n(V_1) \leqslant 0$ в Ω, $l_n(V_1) < 0$ при $\eta = 0$ и пусть $V_1 \geqslant w^n$ при $\tau = 0$ и при $\xi = 0$; пусть $w^{n-1} > 0$ при $\eta = 0$. Тогда $V_1 \geqslant w^n$ всюду в Ω.

Доказательство. Докажем первую часть утверждения леммы 1. Рассмотрим разность $w^n - V = z$. Имеем

$$L_n(z) = L_n(w^n) - L_n(V) \leqslant 0, \qquad l_n(z) = l_n(w^n) - l_n(V) = \nu w^{n-1} z_\eta < 0$$

По условию $z \geqslant 0$ при $\tau = 0$ и $z \geqslant 0$ при $\xi = 0$. Рассмотрим функцию $z^1 = ze^{-\tau}$. Очевидно, что $z^1 \geqslant 0$ при $\tau = 0$ и при $\xi = 0$, и $z_\eta^1 < 0$ при $\eta = 0$. Отсюда следует, что z^1 не может принимать отрицательный минимум при $\eta = 0$, так как в точке отрицательного минимума $z_\eta^1 \geqslant 0$. В точках $\bar\Omega$ имеем

$$L_n(z) = (L_n(z^1) - z^1)e^{\tau} \leqslant 0 \tag{10}$$

Из (10) следует, что z^1 не может принимать отрицательный минимум во внутренней точке Ω, а также при $\xi = x_0$ и при $\tau = t_0$, так как в такой точке $z_\eta^1 = 0$, $z_\xi^1 \leqslant 0$, $z_\tau^1 \leqslant 0$, $z_{\eta\eta}^1 \geqslant 0$ и, следовательно, $L_n(z^1) - z^1 > 0$. На границе $\eta = U(\tau, \xi)$ функция z^1 также не может принимать отрицательный минимум, так как на этой поверхности $w^{n-1} = 0$, а $-z_\tau^1 - \eta z_\xi^1 + p_x z_\eta^1 = 0$ в точке минимума z^1, если он достигается при $\eta = U(\tau, \xi)$, и, значит, $L_n(z^1) - z^1 > 0$. Последнее следует из того, что вектор $(-1, -\eta, p_x)$ лежит в касательной плоскости к поверхности $\eta = U(\tau, \xi)$, ибо в силу закона Бернулли он ортогонален вектору нормали:

$$U_t + \eta U_\xi + p_x = U_\tau + UU_\xi + p_x = 0$$

Таким образом, $z^1 \geqslant 0$ в Ω и, следовательно, $w^n \geqslant V$ в Ω. Вторая часть утверждения леммы 1 доказывается аналогично.

Лемма 2. Существует постоянная $\tau_0 > 0$ такая, что при всех n и $\tau \leqslant \tau_0$ в области Ω выполняются неравенства $H_1(\tau, \xi, \eta) \geqslant w^n \geqslant h_1(\tau, \xi, \eta)$, где H_1 — непрерывна в $\bar\Omega$, а функция $h_1(\tau, \xi, \eta)$ положительна при $\eta < U(\tau, \xi)$, $\tau \leqslant \tau_0$ и непрерывна в $\bar\Omega$.

Доказательство. Построим функции V и V_1, удовлетворяющие условиям леммы 1. Определим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\psi(\tau, \xi, \eta)$ следующим образом. Пусть

$$\psi \equiv \varkappa(\alpha_1\eta) \quad \text{при } \eta < \delta_1, \quad 0 < \delta_1 < {}^1/_2 \min U(\tau, \xi)$$

$$\varkappa(s) = e^s \quad \text{при } 0 \leqslant s \leqslant 1; \qquad 1 \leqslant \varkappa(s) \leqslant 3 \quad \text{при } s \geqslant 1$$

$$\psi = (U(\tau, \xi) - \eta)^k \quad \text{при } U - \eta < \delta_0; \qquad 0 < a_0 \leqslant \psi \leqslant 4 \quad \text{при } \delta_1 < \eta < U - \delta_0$$

Здесь a_0 — некоторое малое число. Функции V и V_1 возьмем в следующем виде

$$V = m\psi e^{-\alpha\tau} \qquad (m, \alpha_1, \alpha = \text{const} > 0)$$
$$V_1 = M(C - e^{\beta_1\eta})e^{\beta\tau} \qquad (\beta_1, \beta, C, M = \text{const} > 0)$$

Покажем, что постоянные, входящие в V и V_1, и число $\tau_0 > 0$ можно подобрать независимыми от n так, что из того, что $V \leqslant w^{n-1} \leqslant V_1$ при $\tau \leqslant \tau_0$, следует, что $V \leqslant w^n \leqslant V_1$ при $\tau \leqslant \tau_0$. Рассмотрим $l_n(V)$ и $l_n(V_1)$. При $e^{-\alpha\tau} \geqslant {}^1/_2$ имеем

$$l_n(V) = \nu w^{n-1} m\psi_\eta e^{-\alpha\tau} - v_0 w^{n-1} - p_x \geqslant me^{-\alpha\tau}[\nu m\alpha_1 e^{-\alpha\tau} - v_0] - p_x > 0$$
$$l_n(V_1) = -\nu w^{n-1} M\beta_1 e^{\beta\tau} - v_0 w^{n-1} - p_x \leqslant me^{-\alpha\tau}(-\nu\beta_1 M e^{\beta\tau} - v_0) - p_x > 0$$

если $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ — достаточно велики.

Постоянные m, C и M выбираем соответственно из условий

$$\varphi_0(\tau, \xi, \eta) \geqslant m\psi(\tau, \xi, \eta), \quad C - e^{\beta_1\eta} \geqslant 1, \quad M \geqslant \max\{w_0, w_1\}$$

Выберем теперь $\beta > 0$ так, что $L_n(V_1) < 0$ в $\bar\Omega$. Учитывая, что $w^{n-1} \geqslant V = m\psi e^{-\alpha\tau}$, имеем, если $\beta > 0$ выбрано достаточно большим,

$$L_n(V_1) = -\nu(w^{n-1})^2 M\beta_1^2 e^{\beta_1\eta}e^{\beta\tau} - M(C - e^{\beta_1\eta})\beta e^{\beta\tau} - p_x M\beta_1 e^{\beta_1\eta}e^{\beta\tau} \leqslant$$
$$\leqslant -e^{\beta\tau}[\nu(m\psi e^{-\alpha\tau})^2 M\beta_1^2 e^{\beta_1\eta} + M\beta + p_x M\beta_1 e^{\beta_1\eta}] < 0$$

Вычислим теперь $L_n(V)$. Имеем

$$L_n(V) = \nu(w^{n-1})^2 m\psi_{\eta\eta}e^{-\alpha\tau} + \alpha m\psi e^{-\alpha\tau} - m\psi_\tau e^{-\alpha\tau} - \eta m\psi_\xi e^{-\alpha\tau} + p_x m\psi_\eta e^{-\alpha\tau}$$

Так как $0 \leqslant w^{n-1} \leqslant M(C - e^{\beta_1\eta})e^{\beta\tau}$, то постоянную $\alpha > 0$ можно выбрать независящей от n и настолько большой, что

$$L_n(V) > 0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{при} \quad \eta < U(\tau, \xi) - \delta_0$$

потому что $\psi \geqslant \min\{a_0, 1\}$. В области $\eta \geqslant U(\tau, \xi) - \delta_0$, где $\psi = (U - \eta)^k$, имеем

$$L_n(V) = me^{-\alpha\tau}[\nu(w^{n-1})^2 k(k-1)(U-\eta)^{k-2} - k(U-\eta)^{k-1}U_\tau + \alpha(U-\eta)^k -$$
$$-\eta k(U-\eta)^{k-1}U_\xi - p_x k(U-\eta)^{k-1}]$$

Из закона Бернулли следует, что $U_\tau + \eta U_\xi + p_x = -(U-\eta)U_\xi$. Поэтому

$$L_n(V) \geqslant me^{-\alpha\tau}[k(U-\eta)^k U_\xi + \alpha(U-\eta)^k] \geqslant 0$$

если $\alpha > 0$ достаточно велико. Следовательно, для функций V и V_1 выполнены условия леммы 1 в Ω, если $\tau \leqslant \tau_0$, а τ_0 таково, что $e^{-\alpha\tau_0} = 1/2$. Число α, а следовательно, и τ_0, определяется в зависимости лишь от данных задачи (5)—(7). Поэтому, если $V_1 \geqslant w^{n-1} \geqslant V$ при $\tau \leqslant \tau_0$, то для V и V_1 выполнены все условия леммы 1 и, следовательно, $V_1 \geqslant w^n \geqslant V$ при $\tau \leqslant \tau_0$. Так как можно предполагать, что эти неравенства выполнены для w°, то при любом n и $\tau \leqslant \tau_0$ имеем $V \leqslant w^n \leqslant V_1$. Лемма доказана.

Лемма 3. Существует постоянная $\xi_0 > 0$ такая, что при всех n и $\xi \leqslant \xi_0$ в области Ω выполняются неравенства $H_2(\tau, \xi, \eta) \geqslant w^n \geqslant h_2(\tau, \xi, \eta)$, где H_2 — непрерывна в $\overline{\Omega}$, а непрерывная функция $h_2(\tau, \xi, \eta)$ положительна при $\eta < U(\tau, \xi)$, $\xi \leqslant \xi_0$.

Доказательство. Построим функции V и V_1, удовлетворяющие условиям леммы 1. Пусть $\psi(\tau, \xi, \eta)$ — функция, построенная при доказательстве леммы 2, а $\varphi(s)$ — дважды дифференцируемая функция при $s \geqslant 0$, равная $3 - e^s$ при $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, и такая, что $1 \leqslant \varphi(s) \leqslant 3$ при всех s, $|\varphi'| \leqslant 3$, $|\varphi''| \leqslant 3$. Пусть $V = m\psi e^{-\alpha\xi}$ и $V_1 = M\varphi(\beta_1\eta)e^{\beta\xi}$. Покажем, что положительные постоянные m, M, α_1, α, β_1, β и число $\xi_0 > 0$ можно выбрать независящими от n так, что, если $V_1 \geqslant w^{n-1} \geqslant V$ при $\xi \leqslant \xi_0$, то и $V_1 \geqslant w^n \geqslant V$ при $\xi \leqslant \xi_0$. Рассмотрим $l_n(V)$. Имеем

$$l_n(V) = \nu w^{n-1} m\alpha_1 e^{-\alpha\xi} - v_0 w^{n-1} - p_x = w^{n-1}(\nu m\alpha_1 e^{-\alpha\xi} - v_0) - p_x \geqslant$$
$$\geqslant me^{-\alpha\xi}(\nu m\alpha_1 e^{-\alpha\xi} - v_0) - p_x > 0$$

при достаточно большом α_1 в предположении, что $e^{-\alpha\xi} \geqslant 1/2$. Далее

$$l_n(V_1) = -\nu w^{n-1}M\beta_1 e^{\beta\xi} - w^{n-1}v_0 - p_x \leqslant me^{-\alpha\xi}(-\nu M\beta_1 e^{\beta\xi} - v_0) - p_x < 0,$$

если β_1 достаточно велико и $e^{-\alpha\xi} \geqslant 1/2$. Выберем теперь $\beta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $L_n(V_1) < 0$. Имеем

$$L_n(V_1) = \nu(w^{n-1})^2 M\beta_1^2\varphi'' e^{\beta\xi} - \eta M\varphi\beta e^{\beta\xi} + p_x M\beta_1\varphi' e^{\beta\xi} \tag{11}$$

Легко видеть, что $\varphi'' \leqslant -1$ при $\beta_1\eta \leqslant 1/2$. В силу сделанного предположения $w^{n-1} \geqslant m\psi e^{-\alpha\xi}$, причем функция ψ уже фиксирована, постоянная m определяется из условия, что $m\psi \leqslant \varphi_0$, а $e^{-\alpha\xi} \geqslant 1/2$ при $\xi \leqslant \xi_0$ в силу выбора ξ_0. Поэтому β_1 можно взять настолько большим, что $L_n(V_1) < 0$ при $\beta_1\eta \leqslant 1/2$. Далее выберем $\beta > 0$ настолько большим, чтобы при $\beta_1\eta \geqslant 1/2$ выполнялось неравенство $L_n(V_1) < 0$. Это можно сделать, так как второй член в выражении (11) для $L_n(V_1)$ будет сколь угодно большим при достаточно больших β, если $\eta \geqslant 1/2\beta_1$. За счет выбора M получим выполнение условий $V_1 \geqslant w^n$ при $\tau = 0$ и при $\xi = 0$. По лемме 1 имеем $w^n \leqslant V_1$ всюду в Ω при $\xi \leqslant \xi_0$. Рассмотрим теперь $L_n(V)$. Имеем

$$L_n(V) = \nu(w^{n-1})^2\psi_{\eta\eta}me^{-\alpha\xi} - m\psi_\tau e^{-\alpha\xi} + \eta m\psi\alpha e^{-\alpha\xi} - \eta m\psi_\xi e^{-\alpha\xi} + p_x\psi_\eta me^{-\alpha\xi}$$

Пусть $\alpha_1\eta \leqslant 1$, а $e^{-\alpha\xi} \geqslant 1/2$. Тогда

$$L_n(V) \geqslant \nu m^3\alpha_1^2 e^{3\alpha_1\eta} e^{-3\alpha\xi} + p_x\alpha_1 e^{\alpha_1\eta} e^{-\alpha\xi} m > 0$$

при достаточно большом α_1, так как $w^{n-1} \geqslant m\psi e^{-\alpha\xi}$ по предположению.

Пусть $1/\alpha_1 < \eta < U - \delta_0$. Тогда $L_n(V) > 0$, так как $0 \leqslant w^{n-1} \leqslant M\varphi(\beta_1\eta)e^{\beta\xi}$ в силу принятого предположения, $\eta m\psi\alpha e^{-\alpha\xi}$ может быть сделано сколь угодно большим при достаточно большом α, ибо при $1/\alpha_1 < \eta < U(\tau, \xi) - \delta_0$ функция $\psi \geqslant a_0 > 0$, а остальные члены в выражении $L_n(V)$ равномерно ограничены по n.

При $U(\tau, \xi) - \eta < \delta_0$ имеем

$$L_n(V) = me^{-\alpha\xi}[\nu(w^{n-1})^2 k(k-1)(U-\eta)^{k-2} - k(U-\eta)^{k-1}U_\tau -$$
$$- \eta k(U-\eta)^{k-1}U_\xi - p_x k(U-\eta)^{k-1} + \alpha\eta(U-\eta)^k]$$

Пользуясь законом Бернулли, как и при доказательстве леммы 2, получим, что $L_n(V) > 0$ при $U - \eta < \delta_0$, если α достаточно велико. Таким образом, если $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$ и ξ_0 выбрано так, что $e^{-\alpha\xi_0} = 1/2$, то $L_n(V) > 0$ в Ω. Так как в силу выбора m выполнено неравенство $V \leqslant w^n$ при $\tau = 0$ и при $\xi = 0$, то по лемме 1 $w^n \geqslant m\psi e^{-\alpha\xi}$ при $\xi \leqslant \xi_0$ и при всех τ. Лемма 3 доказана, так как можно считать, что $V \leqslant w^\circ \leqslant V_1$.

Отметим, что в дальнейшем рассматриваются только такие области Ω, где либо $t_0 \leqslant \tau_0$, либо $x_0 \leqslant \xi_0$.

Для оценки производных w^n первого и второго порядков докажем следующие леммы 4 и 5. В уравнении (8) и условиях (6) и (9) для w^n перейдем к новым функциям $W^n = w^n e^{\alpha\eta}$, где $\alpha > 0$ — постоянная, которую выберем ниже. Получим

$$L_n(w^n) = \nu(w^{n-1})^2 W_{\eta\eta}^n - W_\tau^n - \eta W_\xi^n + [p_x - 2\nu(w^{n-1})^2\alpha]W_\eta^n +$$
$$+ [\alpha^2\nu(w^{n-1})^2 - p_x\alpha]W^n = 0$$
$$l_n(w^n) = \nu W^{n-1}W_\eta^n - \alpha\nu W^{n-1}W^n - W^{n-1}v_0 - p_x = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

Обозначим

$$L_n^\circ(W) \equiv \nu(w^{n-1})^2 W_{\eta\eta} - W_\tau - \eta W_\xi + A^n W_\eta, \qquad A^n \equiv [p_x - 2\nu(w^{n-1})^2\alpha]$$

Имеем

$$L_n^\circ(W^n) + B^n W^n = 0, \qquad B^n \equiv [\alpha^2\nu(w^{n-1})^2 - \alpha p_x]$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_n = (W_\tau^n)^2 + (W_\xi^n)^2 + W_\eta^n(W_\eta^n - 2H^n) + K_0 + K_1\eta$$
$$\left(H^n \equiv \frac{1}{\nu}v_0 + \frac{p_x}{\nu W^{n-1}} + \alpha W^n\chi(\eta)\right)$$

Будем предполагать, что H^n определена в Ω, причем v_0, p_x доопределены для $\eta > 0$ так, что они равны нулю при $\eta > \delta_2$, где $\delta_2 = 1/2 \min U(\tau, \xi)$, не зависят от η при $\eta < 1/2\delta_2$ и для всех η являются достаточно гладкими функциями, $\chi(\eta)$ — гладкая функция, $\chi(\eta) = 1$ при $\eta \leqslant 1/2\delta_2$ и $\chi(\eta) = 0$ при $\eta \geqslant \delta_2$. Очевидно, что $W_\eta^n = H^n$ при $\eta = 0$.

Лемма 4. Постоянные K_0 и K_1 можно выбрать не зависящими от n и такими, что

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\eta} \geqslant \alpha\Phi_n - \frac{\alpha}{2}\Phi_{n-1} \tag{12}$$

при $\eta = 0$ и

$$L_n^\circ(\Phi_n) + R^n\Phi_n \geqslant 0 \tag{13}$$

в Ω, где R^n зависит от w^{n-1} и ее производных первого и второго порядка.

Доказательство. Рассмотрим $\partial\Phi_n / \partial\eta$ при $\eta = 0$. Имеем

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\eta} = 2W_\tau^n W_{\tau\eta}^n + 2W_\xi^n W_{\xi\eta}^n + W_{\eta\eta}^n (W_\eta^n - 2H^n) + W_\eta^n (W_{\eta\eta}^n - 2H_\eta^n) + K_1$$

Пользуясь граничным условием $W_\eta^n - H^n = 0$ при $\eta = 0$, получим

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\eta} = 2W_\tau^n H_\tau^n + 2W_\xi^n H_\xi^n - 2H^n H_\eta^n + K_1$$

Согласно леммам 2 и 3 при $\eta = 0$ выполняются неравенства $W^n \geqslant h_0 > 0$. При $\eta = 0$ имеем

$$H^n H_\eta^n = \left(\frac{1}{\nu} v_0 + \frac{p_x}{\nu W^{n-1}} + \alpha W^n \chi(\eta)\right)\left(-\frac{p_x W_\eta^{n-1}}{\nu (W^{n-1})^2} + \alpha\chi W_\eta^n\right)$$

Из условий $W_\eta^n - H^n = 0$ выразим W^n и W_η^{n-1}. Получим, что $H^n H_\eta^n$ зависит лишь от W^n, W^{n-1} и W^{n-2} и поэтому ограничено равномерно относительно n. Следовательно, $|2H^n H_\eta^n| \leqslant K_2$ и K_2 не зависит от n. Оценим $W_\tau^n H_\tau^n$ и $W_\xi^n H_\xi^n$.

При $\eta = 0$ имеем

$$W_\tau^n H_\tau^n = W_\tau^n \left[\frac{1}{\nu} v_{0\tau} + \frac{p_{x\tau}}{\nu W^{n-1}} - \frac{p_x W_\tau^{n-1}}{\nu (W^{n-1})^2} + \alpha W_\tau^n \chi(\eta)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \alpha (W_\tau^n)^2 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{v_{0\tau}}{\nu} + \frac{p_{x\tau}}{\nu W^{n-1}}\right]^2 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{p_x}{\nu (W^{n-1})^2}\right]^2 (W_\tau^{n-1})^2 - \frac{\alpha}{2}(W_\tau^n)^2$$

Выберем $\alpha > 0$ так, что $\dfrac{1}{\alpha}\left[\dfrac{p_x}{\nu (W^{n-1})^2}\right]^2 \leqslant \dfrac{\alpha}{4}$ и α не зависит от n. Тогда

$$W_\tau^n H_\tau^n \geqslant \frac{\alpha}{2}(W_\tau^n)^2 - \frac{\alpha}{4}(W_\tau^{n-1})^2 - K_3, \qquad K_3 \geqslant \max \frac{1}{\alpha}\left[\frac{v_{0\tau}}{\nu} + \frac{p_{x\tau}}{\nu W^{n-1}}\right]^2$$

K_3 не зависит от n. Аналогично получим, что

$$W_\xi^n H_\xi^n \geqslant \frac{\alpha}{2}(W_\xi^n)^2 - \frac{\alpha}{4}(W_\xi^{n-1})^2 - K_4, \qquad K_4 \geqslant \max \frac{1}{\alpha}\left[\frac{v_{0\xi}}{\nu} + \frac{p_{x\xi}}{\nu W^{n-1}}\right]^2$$

Имеем при $\eta = 0$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\eta} \geqslant \alpha\left[(W_\tau^n)^2 + (W_\xi^n)^2\right] - \frac{\alpha}{2}\left[(W_\tau^{n-1})^2 + (W_\xi^{n-1})^2\right] - K_5 + K_1$$

$$(K_5 = K_2 + 2K_3 + 2K_4)$$

Так как $W_\eta^n (W_\eta^n - 2H^n)$ при $\eta = 0$ в силу граничного условия $W_\eta^n - H^n = 0$ равномерно ограничено относительно n, то можно написать, что

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\eta} \geqslant \alpha\Phi_n - \frac{\alpha}{2}\Phi_{n-1} - K_6 + K_1$$

Здесь K_6 — некоторая постоянная, не зависящая от n. Выберем K_1 больше, чем K_6. Тогда, очевидно, при $\eta = 0$ $\partial\Phi_n / \partial\eta \geqslant \alpha\Phi_n - {}^1/_2\alpha\Phi_{n-1}$, что и требовалось доказать. Выбрав подходящим образом K_0, можно считать $\Phi_n \geqslant 1$ в Ω.

Рассмотрим теперь $L_n^\circ(\Phi_n)$. Заметим, что $H^n \equiv 0$ при $\eta \geqslant \delta_2$. Поэтому при таких η функция

$$\Phi_n = \Phi_n^* \equiv (W_\tau^n)^2 + (W_\xi^n)^2 + (W_\eta^n)^2 + K_0 + K_1\eta$$

Применим к уравнению $L_n^\circ(W^n) + B^n W^n = 0$ оператор

$$2W_\tau^n \frac{\partial}{\partial\tau} + 2W_\xi^n \frac{\partial}{\partial\xi} + 2W_\eta^n \frac{\partial}{\partial\eta}$$

Получим

$$\nu (w^{n-1})^2 \Phi_{n\eta\eta}^* - \Phi_{n\tau}^* - \eta\Phi_{n\xi}^* + A^n\Phi_{n\eta}^* + B^n\Phi_n^* - 2\nu (w^{n-1})^2 \{(W_{\tau\eta}^n)^2 + (W_{\xi\eta}^n)^2 +$$

$$+ (W_{\eta\eta}^n)^2\} + [2\nu (w^{n-1})_\tau^2 W_{\eta\eta}^n W_\tau^n + 2\nu (w^{n-1})_\xi^2 W_{\eta\eta}^n W_\xi^n + 2\nu (w^{n-1})_\eta^2 W_{\eta\eta}^n W_\eta^n] +$$

$$+ [-2W_\xi^n W_\eta^n + 2A_\eta^n (W_\eta^n)^2 + 2A_\xi^n W_\eta^n W_\xi^n + 2A_\tau^n W_\eta^n W_\tau^n +$$

$$+ 2W^n (B_\eta^n W_\eta^n + B_\xi^n W_\xi^n + B_\tau^n W_\tau^n)] - B^n (K_1\eta + K_0) - A^n K_1 = 0 \qquad (14)$$

Члены I_1, стоящие в первых квадратных скобках в (14), оценим сверху

$$I_1 \leqslant R_1 [(W_\tau^n)^2 + (W_\xi^n)^2 + (W_\tau^n)^2] + \frac{\nu^2}{R_1} \{[(w^{n-1})_\tau^2]^2 + [(w^{n-1})_\xi^2]^2 + [(w^{n-1})_\eta^2]^2\} (W_{\eta\eta}^n)^2$$

где R_1 — некоторая постоянная. Для функции $q(x)$, неотрицательной и обладающей ограниченными вторыми производными для всех значений x, справедливо неравенство (см. [5])

$$(q_x)^2 \leqslant 2 \{\max |q_{xx}|\} q \tag{15}$$

Функцию $(w^{n-1})^2$ можно продолжить для всех значений любого из независимых переменных так, что эта функция будет неотрицательной, ограниченной, а ее вторая производная не будет превосходить по модулю максимума модуля второй производной $(w^{n-1})^2$. Поэтому

$$\frac{\nu^2}{R_1} \{ [(w^{n-1})_\tau^2]^2 + [(w^{n-1})_\xi^2]^2 + [(w^{n-1})_\eta^2]^2\} (W_{\eta\eta}^n)^2 \leqslant \nu (w^{n-1})^2 (W_{\eta\eta}^n)^2$$

если R_1 выбрано достаточно большим. Постоянная R_1 зависит от вторых производных функций $(w^{n-1})^2$. Члены I_2, стоящие в последней квадратной скобке в (14), можно, пользуясь неравенством $2ab \leqslant a^2 + b^2$, оценить сверху выражением $R_2\Phi_n^* + K_7$, где R_2 зависит от производных первого порядка от функций w^{n-1}, а K_7 не зависит от n.

Поэтому при $\eta > \delta_2$, где $H^n = 0$, имеем

$$L_n^\circ (\Phi_n) + R_3\Phi_n + K_8 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad L_n^\circ (\Phi_n) + R^n\Phi_n \geqslant 0 \tag{16}$$

где K_8 не зависит от n, а функция R^n зависит от первых и вторых производных w^{n-1}.

В области Ω при $\eta \leqslant \delta_2$ для оценки $L_n^\circ (\Phi_n)$ еще нужно вычислить $L_n^\circ (-2W_\eta^n H^n)$. Имеем

$$\begin{aligned} L_n^\circ (2W_\eta^n H^n) &= 2H^n L_n^\circ (W_\eta^n) + 2W_\eta^n L_n^\circ (H^n) + 4\nu (w^{n-1})^2 W_{\eta\eta}^n H_\eta^n = \\ &= 2H^n [-\nu (w^{n-1})_\eta^2 W_{\eta\eta}^n + W_\xi^n - A_\eta^n W_\eta^n - B_\eta^n W^n - B^n W_\eta^n] + \\ &+ 2W_\eta^n \left[L_n^\circ \left(\frac{v_0}{\nu}\right) + L_n^\circ \left(\frac{p_x}{\nu W^{n-1}}\right) - \alpha\chi(\eta) B^n W^n + \alpha W^n L^\circ (\chi) + \right. \\ &\left. + 2\alpha\nu (w^{n-1})^2 W_\eta^n \chi'\right] + 4\nu (w^{n-1})^2 W_{\eta\eta}^n H_\eta^n \end{aligned} \tag{17}$$

Так как при $\eta \leqslant \delta_2$ согласно леммам 2 и 3 имеем $(w^{n-1})^2 > \gamma_0 > 0$, то члены I_1, входящие в равенство (14), а также член $2H^n\nu (w^{n-1})_\eta^2 W_{\eta\eta}^n$ в выражении для $L_n^\circ (-2W_\eta^n H^n)$ оценим, пользуясь неравенством

$$2ab \leqslant \frac{a^2}{h} + hb^2$$

где $h > 0$ — произвольное число. Имеем

$$I_1 + 2H^n\nu (w^{n-1})_\eta^2 W_{\eta\eta}^n \leqslant {}^1/_2\nu\gamma_0 (W_{\eta\eta}^n)^2 + R_4\Phi_n + K_9$$

где R_4 зависит от первых производных w^{n-1}, а K_9 не зависит от n. Из (14) и (17) следует, что при $\eta \leqslant \delta_2$ выполнено неравенство $L_n^\circ (\Phi_n) + R_5\Phi_n + R_6 \geqslant 0$, где R_5 и R_6 зависят от w^{n-1} и ее производных первого и второго порядка. Так как $\Phi_n \geqslant 1$, то $R_6\Phi_n \geqslant R_6$. Поэтому $L_n^\circ (\Phi_n) + R^n\Phi_n \geqslant 0$ в Ω, что и требовалось доказать.

Для оценки вторых производных функций w^n в Ω рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} F_n = (W_{\tau\tau}^n)^2 + (W_{\xi\xi}^n)^2 + (W_{\tau\xi}^n)^2 + W_{\xi\eta}^n (W_{\xi\eta}^n - 2H_\xi^n) + \\ + W_{\tau\eta}^n (W_{\tau\eta}^n - 2H_\tau^n) + g(\eta) (W_{\eta\eta}^n)^2 + N_0 + N_1\eta \end{aligned}$$

где N_0 и N_1 — некоторые постоянные, а гладкая функция $g(\eta)$ такова, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g > 0$ при $\eta > 0$ и $g(\eta) = 1$ при $\eta \geqslant \delta_2$.

Лемма 5. Постоянные N_0, N_1 можно выбрать зависящими лишь от производных первого порядка от w^n, w^{n-1}, w^{n-2} так, что

$$\frac{\partial F_n}{\partial \eta} \geqslant \alpha F_n - \frac{\alpha}{2} F_{n-1} \quad \text{при } \eta = 0 \tag{18}$$

$$L_n^\circ (F_n) + C^n F_n + N_2 \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega \tag{19}$$

где N_2 зависит лишь от первых производных w^n, w^{n-1}, w^{n-2}, а C^n зависит от w^{n-1} и ее производных первого и второго порядка.

Доказательство. В дальнейшем через C_i будем обозначать постоянные, зависящие от максимумов модулей w^{n-1} и ее производных первого и второго порядков, а через N_i будем обозначать постоянные, зависящие лишь от максимумов модулей первых производных w^n, w^{n-1}, w^{n-2}. Выберем $N_0 > 1$ так, что $F_n \geqslant 1$ в Ω.

Рассмотрим $\partial F_n / \partial \eta$ при $\eta = 0$. Пользуясь граничным условием $W_\eta^n - H^n = 0$ при $\eta = 0$, получим

$$\frac{\partial F_n}{\partial \eta} = 2W_{\tau\tau}^n W_{\tau\tau\eta}^n + 2W_{\xi\xi}^n W_{\xi\xi\eta}^n + 2W_{\tau\xi}^n W_{\tau\xi\eta}^n - 2H_\tau^n H_{\tau\eta}^n - 2H_\xi^n H_{\xi\eta}^n + N_1$$

Члены $H_\tau^n H_{\tau\eta}^n$ и $H_\xi^n H_{\xi\eta}^n$ ограничены постоянной, зависящей от первых производных w^n, w^{n-1} и w^{n-2}, так как вторые производные от этих функций, содержащие дифференцирование по η, можно с помощью граничного условия $W_\eta^n - H^n = 0$ выразить через первые производные. Оценим теперь

$$W_{\tau\tau}^n W_{\tau\tau\eta}^n = W_{\tau\tau}^n H_{\tau\tau}^n = W_{\tau\tau}^n \left\{ \frac{v_{0\tau\tau}}{\nu} + \frac{p_{x\tau\tau}}{\nu W^{n-1}} - 2\frac{p_{x\tau} W_\tau^{n-1}}{\nu (W^{n-1})^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{p_x}{\nu}\left[-\frac{W_{\tau\tau}^{n-1}}{(W^{n-1})^2} + 2\frac{(W_\tau^{n-1})^2}{(W^{n-1})^3} \right] + \alpha W_{\tau\tau}^n \right\} \geqslant \alpha (W_{\tau\tau}^n)^2 -$$
$$- \frac{1}{\alpha}\left[\frac{v_{0\tau\tau}}{\nu} + \frac{p_{x\tau\tau}}{\nu W^{n-1}} - 2\frac{p_{x\tau} W_\tau^{n-1}}{\nu (W^{n-1})^2} + 2\frac{p_x (W_\tau^{n-1})^2}{\nu (W^{n-1})^3} \right]^2 -$$
$$- \frac{1}{\alpha}\left[\frac{p_x}{\nu (W^{n-1})^2} \right]^2 (W_{\tau\tau}^{n-1})^2 - \frac{\alpha}{2} (W_{\tau\tau}^n)^2$$

В силу выбора α имеем

$$W_{\tau\tau}^n W_{\tau\tau\eta}^n \geqslant {}^1/_2 \alpha (W_{\tau\tau}^n)^2 - {}^1/_4 \alpha (W_{\tau\tau}^{n-1})^2 - N_3$$

Проводя аналогичные оценки для $W_{\xi\xi}^n W_{\xi\xi\eta}^n$ и $W_{\xi\tau}^n W_{\xi\tau\eta}^n$, получим

$$\frac{\partial F_n}{\partial \eta} \geqslant \alpha \left[(W_{\tau\tau}^n)^2 + (W_{\xi\xi}^n)^2 + (W_{\tau\xi}^n)^2 \right] - \frac{\alpha}{2} \left[(W_{\tau\tau}^{n-1})^2 + (W_{\xi\xi}^{n-1})^2 + (W_{\tau\xi}^{n-1})^2 \right] + N_1 - N_4$$

Так как $W_{\eta\xi}^n (W_{\xi\eta}^n - 2H_\xi^n) + W_{\tau\eta}^n (W_{\tau\eta}^n - 2H_\tau^n)$ при $\eta = 0$ зависит лишь от первых производных w^n, w^{n-1}, w^{n-2} в силу граничного условия $W_\eta^n - H^n = 0$ при $\eta = 0$, то можно написать

$$\frac{\partial F_n}{\partial \eta} \geqslant \alpha F_n - \frac{\alpha}{2} F_{n-1} + N_1 - N_5$$

Пусть $N_1 = N_5$. Тогда, очевидно, при $\eta = 0$

$$\frac{\partial F_n}{\partial \eta} \geqslant \alpha F_n - \frac{\alpha}{2} F_{n-1}$$

Рассмотрим теперь $L_n^\circ (F_n)$. Обозначим через F_n^* сумму

$$(W_{\tau\tau}^n)^2 + (W_{\xi\xi}^n)^2 + (W_{\tau\xi}^n)^2 + (W_{\xi\eta}^n)^2 + (W_{\tau\eta}^n)^2 + g\,(W_{\eta\eta}^n)^2 + N_0 + N_1 \eta$$

Так как $H^n = 0$ и $g(\eta) = 1$ при $\eta > \delta_2$, то при таких η имеем $F_n^* = F_n$. Применим оператор

$$P \equiv 2W_{\tau\tau}^n \frac{\partial}{\partial \tau^2} + 2W_{\xi\xi}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2W_{\tau\xi}^n \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} + 2W_{\xi\eta}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + 2W_{\tau\eta}^n \frac{\partial}{\partial \tau \partial \eta} + 2gW_{\eta\eta}^n \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

к правой и левой части уравнения $L_n^\circ(W^n) + B^n W^n = 0$. Получим

$$\begin{aligned}
&\nu (w^{n-1})^2 F^*_{n\eta\eta} - F^*_{n\tau} - \eta F^*_{n\xi} + A^n F^*_{n\eta} - 2\nu (w^{n-1})^2 [(W^n_{\tau\tau\eta})^2 + (W^n_{\xi\xi\eta})^2 + (W^n_{\tau\xi\eta})^2 + \\
&+ (W^n_{\xi\eta\eta})^2 + (W^n_{\tau\eta\eta})^2 + g(\eta)(W^n_{\eta\eta\eta})^2] + \{4\nu (w^{n-1})_\tau^2 W^n_{\eta\eta\tau} W^n_{\tau\tau} + \\
&+ 4\nu (w^{n-1})_\xi^2 W^n_{\eta\eta\xi} W^n_{\xi\xi} + 2\nu (w^{n-1})_\tau^2 W^n_{\eta\eta\xi} W^n_{\tau\xi} + 2\nu (w^{n-1})_\xi^2 W^n_{\eta\eta\tau} W^n_{\tau\xi} + \\
&+ 2\nu (w^{n-1})_\tau^2 W^n_{\eta\eta\eta} W^n_{\tau\eta} + 2\nu (w^{n-1})_\eta^2 W^n_{\eta\eta\tau} W^n_{\tau\eta} + 2\nu (w^{n-1})_\xi^2 W^n_{\eta\eta\eta} W^n_{\xi\eta} + \\
&+ 2\nu (w^{n-1})_\eta^2 W^n_{\eta\eta\xi} W_{\xi\eta}^{\ n} + 4g (w^{n-1})_\eta^2 W^n_{\eta\eta\eta} W_{\eta\eta}^{\ n} + 2\nu W^n_{\eta\eta} [(w^{n-1})_{\tau\tau}^2 W_{\tau\tau}^{\ n} + \\
&+ (w^{n-1})^2_{\xi\xi} W^n_{\xi\xi} + (w^{n-1})^2_{\tau\xi} W^n_{\tau\xi} + (w^{n-1})^2_{\xi\eta} W^n_{\xi\eta} + (w^{n-1})^2_{\tau\eta} W^n_{\tau\eta} + \\
&+ g (w^{n-1})^2_{\eta\eta} W^n_{\eta\eta}] - \nu (w^{n-1})^2 g_{\eta\eta} (W^n_{\eta\eta})^2 - 4\nu (w^{n-1})^2 g_\eta W^n_{\eta\eta} W^n_{\eta\eta\eta} - \\
&- 2W^n_{\tau\eta} W^n_{\tau\xi} - 2W^n_{\xi\eta} W^n_{\xi\xi} - 4g W^n_{\xi\eta} W^n_{\eta\eta} + P(A^n) W_\eta^{\ n} - g_\eta A^n (W^n_{\eta\eta})^2 + 4A_\tau^{\ n} W^n_{\eta\tau} W^n_{\tau\tau} + \\
&+ 4A_\xi^{\ n} W^n_{\eta\xi} W^n_{\xi\xi} + 2A_\xi^{\ n} W_{\eta\tau} W^n_{\tau\xi} + 2A_\tau^{\ n} W^n_{\eta\xi} W^n_{\tau\xi} + 2A_\xi^{\ n} W^n_{\xi\eta} W^n_{\eta\eta} + 2A_\eta^{\ n} (W^n_{\xi\eta})^2 + \\
&+ 2A_\tau^{\ n} W^n_{\eta\tau} W^n_{\eta\eta} + 2A_\eta^{\ n} (W^n_{\tau\eta})^2 + 4g A_\eta^{\ n} (W^n_{\eta\eta})^2 + P(B^n W^n)\} - A^n N_1 = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим сначала ту часть области Ω, где $\eta \leqslant \delta_2$. Так как $(w^{n-1})^2 \geqslant \gamma_0 > 0$ при $\eta \leqslant \delta_2$ согласно леммам 2 и 3, то можно, пользуясь уравнением $L_n^\circ(W^n) + B^n W^n = 0$ и уравнением, полученным из него дифференцированием по η, выразить производные $W^n_{\eta\eta}$ и $W^n_{\eta\eta\eta}$ при $\eta \leqslant \delta_2$, входящие в фигурную скобку равенства (20), через линейную комбинацию производных W^n первого и второго порядков, содержащих не более одного дифференцирования по η, причем коэффициенты при этих производных будут зависеть от первых производных w^{n-1}. После такой замены члены, стоящие в фигурной скобке, будут содержать лишь производные первого и второго порядков от W^n. Оценим члены этого выражения сверху, пользуясь элементарным неравенством

$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \tag{21}$$

Таким образом из (20) получаем

$$L_n^\circ(F_n^*) + C_1 F_n^* + C_2 + N_6 \geqslant 0$$

Здесь N_6 зависит лишь от максимумов модулей первых производных w^n, w^{n-1}, w^{n-2}. Так как $F_n^* \geqslant 1$ в силу выбора N_6, то при $\eta \leqslant \delta_2$ имеем

$$L_n^\circ(F_n^*) + C_3 F_n^* + N_6 \geqslant 0 \tag{22}$$

Для того чтобы оценить $L_n^\circ(F_n)$ при $\eta \leqslant \delta_2$, следует еще оценить

$$L_n^\circ(-2W^n_{\tau\eta} H_\tau^{\ n} - 2W^n_{\xi\eta} H_\xi^{\ n})$$

Имеем

$$\begin{aligned}
L_n^\circ(W^n_{\tau\eta} H_\tau^{\ n}) &= L_n^\circ(W^n_{\tau\eta}) H_\tau^{\ n} + W^n_{\tau\eta} L_n^\circ(H_\tau^{\ n}) + 2\nu (w^{n-1})^2 W^n_{\tau\eta\eta} H^n_{\tau\eta} = \\
&= H_\tau^{\ n} [-\nu (w^{n-1})^2_{\tau\eta} W^n_{\eta\eta} - (w^{n-1})_\tau^2 W^n_{\eta\eta\eta} - (w^{n-1})_\eta^2 W^n_{\eta\eta\tau} + W^n_{\xi\tau} - \\
&- (B^n W^n)_{\tau\eta} - A^n_{\tau\eta} W_\eta^{\ n} - A_\tau^{\ n} W^n_{\eta\eta} - A_\eta^{\ n} W^n_{\eta\tau}] + \\
&+ W^n_{\tau\eta} \left[L_n^\circ\left(\frac{v_{0\tau}}{\nu}\right) + L_n^\circ\left(\left(\frac{p_x}{\nu W^{n-1}}\right)_\tau\right) + L_n^\circ(\alpha W_\tau^{\ n} \chi) \right] + 2\nu (w^{n-1})^2 W^n_{\tau\eta\eta} H^n_{\tau\eta}
\end{aligned}$$

В этом выражении для $L_n^\circ(W_{\tau\eta}^{\ n} H_\tau^{\ n})$ заменим, пользуясь уравнением $L_n^\circ(W^n) + B^n W^n = 0$, производные второго и третьего порядков от W^n, содержащие более одного дифференцирования по η, через производные первого и второго порядков от W^n, содержащие не более одного дифференцирования по η. В выражение для

$$L_n^\circ\left(\left(\frac{p_x}{\nu W^{n-1}}\right)_\tau\right) = L_n^\circ\left(\frac{p_{x\tau}}{\nu W^{n-1}} - \frac{p_x W_\tau^{n-1}}{\nu (W^{n-1})^2}\right)$$

входят производные первого и второго порядка от W^{n-1} и производная третьего порядка вида $W^{n-1}_{\eta\eta\tau}$. Производную $W^{n-1}_{\eta\eta\tau}$ выразим из уравнения, полученного из $\overset{\circ}{L}_{n-1}(W^{n-1}) + B^{n-1}W^{n-1} = 0$ дифференцированием по τ, через производные от W^{n-1} первого и второго порядков и производные первого порядка от w^{n-2}. Аналогично вычисляем $L_n{}^\circ(W_{\xi\eta}{}^n H_\xi{}^n)$. Пользуясь неравенством вида (21), получим, что при $\eta \leqslant \delta_2$

$$L_n{}^\circ(-2W^n_{\tau\eta}H_\tau{}^n - 2W^n_{\xi\eta}H_\xi{}^n) + C_4F_n{}^* + N_7 \geqslant 0$$

Складывая неравенство (22) и последнее неравенство, получим

$$L_n{}^\circ(F_n) + C_5F_n{}^* + N_8 \geqslant 0$$

Так как

$$F_n = F_n{}^* - 2W^n_{\tau\eta}H_\tau{}^n - 2W^n_{\xi\eta}H_\xi{}^n \geqslant {}^1/_2 F_n{}^* - N_9$$

то при $\eta \leqslant \delta_2$ имеем $L_n{}^\circ(F_n) + C_6F_n + N_{10} \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь $L_n{}^\circ(F_n)$ при $\eta \geqslant \delta_2$. При таких значениях η имеем $F_n = F_n{}^*$, $g(\eta) = 1$. Члены, стоящие в фигурной скобке в (20) и содержащие производные третьего порядка от W^n, оценим, пользуясь неравенством (15), точно так же, как оценивались члены I_1, входящие в (14). Применяя к остальным членам этой скобки неравенства вида (21), получим, что

$$L_n{}^\circ(F_n) + C^nF_n + N_{11} \geqslant 0 \quad \text{при } \eta \geqslant \delta_2$$

Теорема 1. Производные первого и второго порядков от решения w^n задачи (8), (6), (9) равномерно ограничены относительно n в области Ω при $\tau \leqslant \tau_1$, где $\tau_1 > 0$ — число, зависящее от данных задачи (1)—(3).

Доказательство. Покажем, что существуют числа M_1 и M_2 и число $\tau_1 > 0$ такие, что если $\Phi_\mu \leqslant M_1, F_\mu \leqslant M_2$ при $\tau \leqslant \tau_1$ и $\mu \leqslant n-1$, то $\Phi_n \leqslant M_1$ и $F_n \leqslant M_2$ при $\tau \leqslant \tau_1$. По лемме 4 имеем $L_n{}^\circ(\Phi_n) + R^n\Phi_n \geqslant 0$, где R^n зависит от w^{n-1}, ее первых и вторых производных.

Рассмотрим функцию $\Phi_n{}^1 = \Phi_n e^{-\gamma\tau}$, постоянную $\gamma > 0$ выберем ниже. Имеем $L_n{}^\circ(\Phi_n{}^1) + (R^n - \gamma)\Phi_n{}^1 \geqslant 0$ в Ω. Выберем γ, зависящей от M_1 и M_2 так, что $R^n - \gamma \leqslant -1$ в Ω^1, т. е. в Ω при $\tau \leqslant \tau_1$. Тогда $\Phi_n{}^1$ не может принимать наибольшее значение внутри Ω^1, а также при $\xi = x_0$, при $\tau = \tau_1$ или при $\eta = U(\tau, \xi)$. Если $\Phi_n{}^1$ принимает наибольшее значение при $\tau = 0$ либо при $\xi = 0$, то $\Phi_n{}^1 = \Phi_n e^{-\gamma\tau} \leqslant \Phi_n < K_{10}$, где K_{10} не зависит от n и определяется лишь данными задачи (8), (9), (6). Если же $\Phi_n{}^1$ принимает наибольшее значение в некоторой точке при $\eta = 0$, то в этой точке $\partial\Phi_n{}^1 / \partial\eta \leqslant 0$ и из (12) следует, что $\Phi_n{}^1 \leqslant {}^1/_2\Phi^1_{n-1}$, т. е. $\Phi_n{}^1 \leqslant {}^1/_2M_1$.

Итак, имеем

$$\Phi_n{}^1 \leqslant \max\{{}^1/_2M_1, K_{10}\} \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } \tau \leqslant \tau_1; \qquad \Phi_n \leqslant \max\{{}^1/_2M_1, K_{10}\}\, e^{\gamma\tau}$$

Пусть τ_2 таково, что $e^{\gamma\tau_2} = 2$. За M_1 возьмем $2K_{10}$. Тогда $\Phi_n \leqslant M_1$ при $\tau \leqslant \tau_2$. Рассмотрим теперь F_n. По лемме 5 имеем

$$L_n{}^\circ(F_n) + C^nF_n + N_2 \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega$$

где C^n зависит от первых и вторых производных функции w^{n-1}, а N_2 зависит от первых производных w^n, w^{n-1}, w^{n-2}. Пусть $F_n{}^1 = F_n e^{-\gamma_1\tau}$. Тогда имеем

$$L^\circ{}_n(F_n{}^1) + (C^n - \gamma_1)F_n{}^1 \geqslant -N_2e^{-\gamma_1\tau} \geqslant -N_2 \quad \text{в } \Omega$$

Выберем $\gamma_1 > 0$, зависящим от M_1 и M_2 так, что $C^n - \gamma_1 \leqslant -1$ в Ω^2, т.е. в Ω при $\tau \leqslant \tau_2$. Тогда, если $F_n{}^1$ принимает наибольшее значение внутри Ω^2, либо при $\tau = \tau_2$, либо при $\xi = x_0$ или при $\eta = U(\tau, \xi)$, то $F_n{}^1 \leqslant N_2(M_1)$.

Если функция $F_n{}^1$ принимает наибольшее значение при $\tau = 0$, либо при $\xi = 0$, то $F_n{}^1 = F_n e^{-\gamma_1\tau} \leqslant F_n \leqslant N_{12}(M_1)$, где N_{12} зависит от M_1. Если же $F_n{}^1$ принимает наибольшее значение при $\eta = 0$, то в силу леммы 5 в точке максимума F_n^1

$$0 \geqslant \frac{\partial F_n^1}{\partial \eta} \geqslant \alpha F_n^1 - \frac{\alpha}{2} F_{n-1}^1$$

и поэтому $F_n^1 \leqslant {}^1/_2 F_{n-1}^1 \leqslant {}^1/_2 F_{n-1} e^{-\gamma_1 \tau} \leqslant {}^1/_2 M_2$.

Следовательно, имеем

$$F_n^1 \leqslant \max \{{}^1/_2 M_2, N_{12}, N^2\} \quad \text{в } \Omega^2, \qquad F_n \leqslant \max \{{}^1/_2 M_2, N_{12}, N_2\} e^{\gamma_1 \tau}$$

Пусть τ_3 таково, что $e^{\gamma_1 \tau_3} = 2$. За M_2 возьмем $\max \{2N_{12}, 2N_2\}$. Тогда $F_n \leqslant M_2$ при $\tau \leqslant \tau_3$ и $\tau \leqslant \tau_2$. Выбор τ_3, как и τ_2, зависит лишь от постоянных M_1 и M_2, которые мы указали выше и которые определяются лишь данными задачи (1)—(3). Можно считать, что w° выбрано так, что $\Phi_0 \leqslant M_1$ и $F_0 \leqslant M_2$. Из доказанного следует, что Φ_n и F_n равномерно ограничены по n при $\tau \leqslant \min \{\tau_2, \tau_3\} = \tau_1$. Из ограниченности Φ_n и F_n по n следует ограниченность производных первого и второго порядков от w^n. Теорема доказана.

Теорема 2. Производные первого и второго порядков от решения w^n задачи (8), (6), (9) равномерно ограничены относительно n в области Ω при $\xi \leqslant \xi_1$, где ξ_1 — некоторое число, зависящее лишь от данных задачи (1)—(3) и $\xi_1 \leqslant \xi_0$.

Доказательство. Покажем, что существуют числа M_1, M_2 и $\xi_1 > 0$ такие, что если $\Phi_\mu \leqslant M_1$ и $F_\mu \leqslant M_2$ при $\xi \leqslant \xi_1$ и $\mu \leqslant n - 1$, то $\Phi_n \leqslant M_1$ и $F_n \leqslant M_2$ при $\xi \leqslant \xi_1$. По лемме 4 имеем $L_n^\circ (\Phi_n) + R^n \Phi_n \geqslant 0$, где R^n зависит от w^{n-1}, ее первых и вторых производных.

Пусть $\Phi_n = \Phi_n^1 e^{\beta\xi} \varphi_1 (\beta_1 \eta)$, где $\varphi_1 (s)$ — гладкая функция, определенная равенством $\varphi_1 (s) = 2 - {}^1/_2 e^s$ при $s \leqslant \ln {}^3/_2$ и такая, что $1 \leqslant \varphi_1 \leqslant {}^3/_2$ при всех s; β, β_1 — некоторые положительные постоянные, которые выберем ниже. Имеем

$$L_n^\circ (\Phi_n^1) + 2\nu (w^{n-1})^2 \beta_1 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} \Phi_{n\eta}^1 + \left(R^n - \eta\beta + A^n \beta_1 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \nu (w^{n-1})^2 \beta_1^2 \frac{\varphi_1''}{\varphi_1}\right) \Phi_n^1 \geqslant 0 \tag{23}$$

Если $\beta_1 \eta \leqslant \ln {}^3/_2$, то $-{}^3/_4 \leqslant \varphi_1' \leqslant -{}^1/_2, \varphi_1'' \leqslant -{}^1/_2$. В силу леммы 3 справедливо неравенство $(w^{n-1})^2 \geqslant \gamma_0 > 0$ при $\eta \leqslant \delta_2$, если $x_0 \leqslant \xi_0$.

Пусть $\eta \leqslant \beta_1^{-1} \ln {}^3/_2$ и $\eta \leqslant \delta_2$. Тогда постоянную β_1 можно выбрать, так что коэффициент при Φ_n^1 в (23) при $\xi \leqslant \xi_1$ удовлетворяет неравенству

$$\left(R^n - \eta\beta + A^n \beta_1 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \nu (w^{n-1})^2 \beta_1^2 \frac{\varphi_1''}{\varphi_1}\right) \leqslant -1$$

В области $\eta > \min \{\delta_2, \beta_1^{-1} \ln {}^3/_2\}$ это неравенство будет выполняться, если выберем $\beta > 0$ достаточно большим. (Очевидно, что β зависит от M_1 и M_2.) Тогда в силу (23) функция Φ_n^1 не может при $\xi \leqslant \xi_1$ принимать наибольшее значение внутри Ω, при $\tau = t_0$, при $\xi = \xi_1$ или при $\eta = U (\tau, \xi)$.

Если Φ_n^1 принимает наибольшее значение при $\tau = 0$, либо при $\xi = 0$, то

$$\Phi_n^1 = \frac{\Phi_n}{\varphi_1} e^{-\beta\xi} \leqslant \Phi_n \leqslant K_{11}$$

где K_{11} не зависит от n, так как Φ_n при $\tau = 0$ и при $\xi = 0$ можно выразить через функции w_0, w_1 и их производные.

Если же Φ_n^1 принимает наибольшее значение при $\eta = 0$, то в этой точке производная $\partial \Phi_n^1 / \partial \eta \leqslant 0$ и из (12) следует, что

$$\Phi_n^1 \leqslant \frac{1}{2} \Phi_{n-1}^1, \quad \text{или} \quad \Phi_n^1 \leqslant \frac{1}{2} \frac{\Phi_{n-1}}{\varphi_1} e^{-\beta\xi} \leqslant \frac{1}{2} M_1$$

в силу сделанного предположения. Итак, имеем

$$\Phi_n^1 \leqslant \max \left\{\frac{1}{2} M_1, K_{11}\right\} \text{ в } \Omega \quad \text{при } \xi \leqslant \xi_1, \qquad \Phi_n \leqslant \max \left\{\frac{1}{2} M_1, K_{11}\right\} \max [e^{\beta\xi} \varphi_1 (\beta_1 \eta)]$$

Так как $\varphi_1(\beta_1\eta) \leqslant {}^3/_2$, то $e^{\beta\xi}\varphi_1(\beta_1\eta) \leqslant 2$, если $e^{\beta\xi} \leqslant {}^4/_3$. Выберем ξ_2 из условия $e^{\beta\xi_2} = {}^4/_3$. Тогда

$$\Phi_n \leqslant \max\{M_1, 2K_{11}\} \quad \text{при } \xi \leqslant \xi_2$$

Возьмем $M_1 = 2K_{11}$. Тогда $\Phi_n \leqslant M_1$ при $\xi \leqslant \xi_2$, причем ξ_2 зависит от M_1 и M_2. Рассмотрим теперь F_n. По лемме 5 имеем

$$L_n^\circ(F_n) + C^n F_n \geqslant -N_2 \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } \xi \leqslant \xi_0$$

Пусть $F_n = F_n^1 \varphi_1(\beta_2\eta)\, e^{\beta_3\xi}$, где $\varphi_1(s)$ — функция, определенная выше. Имеем

$$L_n^\circ(F_n^1) + 2\nu(w^{n-1})^2 \beta_2 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} F_{n\eta}^1 + \left(C^n - \eta\beta_3 + A^n\beta_2 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \nu(w^{n-1})^2 \beta_2^2 \frac{\varphi_1''}{\varphi_1}\right) F_n^1 > -N_2 \frac{e^{-\beta_3\xi}}{\varphi_1} \tag{24}$$

Если $\beta_2\eta \leqslant \ln {}^3/_2$, то $-{}^3/_4 \leqslant \varphi_1' \leqslant -{}^1/_2$, $\varphi_1'' \leqslant -{}^1/_2$, $1 \leqslant \varphi_1 \leqslant {}^3/_2$.

В силу леммы 3 имеем $(w^{n-1})^2 \geqslant \gamma_0 > 0$ при $\eta \leqslant \delta_2$. Пусть $\eta \leqslant \min\{\delta_2, \beta_2^{-1}\ln {}^3/_2\}$. Для таких значений η постоянную β_2 можно выбрать так, что коэффициент при F_n^1 в (24) удовлетворяет неравенству:

$$C^n - \eta\beta_3 + A^n\beta_2 \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \nu(w^{n-1})^2 \beta_2^2 \frac{\varphi_1''}{\varphi_1} \leqslant -1$$

В области $\eta > \min\{\delta_2, \beta_2^{-1}\ln {}^3/_2\}$ это неравенство будет выполняться, если выберем β_3 достаточно большим. Очевидно, что β_3 зависит от M_1 и M_2. Так же, как и при доказательстве теоремы 1 получаем, что

$$F_n^1 \leqslant \max\{{}^1/_2 M_2, N_2, N_{13}\} \quad \text{в } \Omega \quad \text{при } \xi \leqslant \xi_1$$

где $N_{13} = \max F_n$ при $\tau = 0$ и при $\xi = 0$, причем N_{13} зависит от M_1. Имеем

$$F_n \leqslant \max\{{}^1/_2 M_2, N_2, N_{13}\} \max\,[e^{\beta_3\xi}\varphi_1(\beta_2\eta)] \leqslant \max\{M_2, 2N_2, 2N_{13}\}$$

если $e^{\beta_3\xi}\varphi_1'(\beta_2\eta) \leqslant 2$ и $e^{-\beta_3\xi} \leqslant {}^4/_3$. Выберем $M_2 = \max\{2N_2, 2N_{13}\}$ и ξ_3 определим равенством $e^{\beta_3\xi_3} = {}^4/_3$. Тогда $F_n \leqslant M_2$ при $\xi \leqslant \xi_1$, где $\xi_1 = \min\{\xi_2, \xi_3\}$. Из ограниченности Φ_n и F_n следует равномерная по n ограниченность первых и вторых производных от w^n.

Теорема 3. Функции w^n равномерно сходятся в области Ω к функции w, которая является решением задачи (5)—(7), если либо $t_0 \leqslant \tau_1$, либо $x_0 \leqslant \xi_1$.

Доказательство. В теоремах 1 и 2 доказано, что w^n имеют равномерно ограниченные по n производные первого и второго порядков в Ω при $t_0 \leqslant \tau_1$ или $x_0 \leqslant \xi_1$. Покажем теперь, что w^n равномерно сходятся в такой области Ω. Имеем для $v^n = w^n - w^{n-1}$ уравнение

$$\nu(w^{n-1})^2 v_{\eta\eta}^n - v_\tau^n - \eta v_\xi^n + p_x v_\eta^n + \nu w_{\eta\eta}^{n-1}(w^{n-1} + w^{n-2})\, v^{n-1} = 0$$

и условия

$$v^n|_{\tau=0} = 0, \quad v^n|_{\xi=0} = 0, \quad v^n|_{\eta=U(\tau,\xi)} = 0 \quad (\nu w^{n-1} v_\eta^n - v_0 v^{n-1} + \nu w_\eta^{n-1} v^{n-1})_{\eta=0} = 0$$

Рассмотрим функцию v_1^n такую, что $v^n = e^{\alpha\tau+\beta\eta}\, v_1^n$. Имеем

$$\nu(w^{n-1})^2 v_{1\eta\eta}^n - v_{1\tau}^n - \eta v_{1\xi}^n + p_x v_{1\eta}^n + \nu w_{\eta\eta}^{n-1}(w^{n-1} + w^{n-2})\, v_1^{n-1} + 2\nu(w^{n-1})^2 \beta v_{1\eta}^n + (\nu(w^{n-1})^2\beta^2 + p_x\beta - \alpha)\, v_1^n = 0 \tag{25}$$

Постоянную $\beta < 0$ выберем так, что в граничном условии для v_1 при $\eta = 0$

$$\nu w^{n-1} v_{1\eta}^n + \beta\nu w^{n-1} v_1^n + (\nu w_\eta^{n-1} - v_0)\, v_1^{n-1} = 0 \tag{26}$$

коэффициенты при v_1^n и v_1^{n-1} удовлетворяют неравенству

$$\max|\nu w_\eta^{n-1} - v_0| < q\,\nu\,|\beta|\min w^{n-1}(\tau, \xi, 0), \qquad q < 1$$

Фиксировав β, выберем $\alpha > 0$ так, чтобы

$$\max | \nu w_{\tau\eta}^{n-1} (w^{n-1} + w^{n-2}) | < q(\alpha - \max | \nu(w^{n-1})^2 \beta^2 + p_x \beta |)$$

Тогда, если $| v_1^n |$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке Ω или на ее границе, то из уравнений (25), (26) получим, что $\max | v_1^n | \leqslant q \max | v_1^{n-1} |$, т. е. ряд $v_1^1 + v_1^2 + \ldots + v_1^n + \ldots$, частные суммы которого равны $w^n e^{-\alpha\tau - \beta\eta}$, мажорируется геометрической прогрессией и поэтому равномерно сходится. Из ограниченности w^n и ее первых и вторых производных следует также равномерная сходимость при $n \to \infty$ всех первых производных функций w^n. Из уравнения (8) следует, что $w_{\eta\eta}^n$ также равномерно сходятся при $n \to \infty$, если $\eta < U(\tau, \xi) - \delta_3$, где $\delta_3 > 0$ — произвольное число.

Таким образом, доказано, что решение задачи (5)—(7) существует в области Ω, если x_0, либо t_0 достаточно мало и если существует решение задачи (8), (6), (9).

Укажем один из способов построения функций w^n. (Заметим, что аналогичные методы применялись для изучения линейных уравнений вида (8) в работе [5].) Ниже будет указана краевая задача для эллиптического уравнения в некоторой специальной области, решения которой $w^{\varepsilon n}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходятся к w^n. Аналогично можно построить соответствующую краевую задачу для параболического уравнения.

Пусть G — бесконечно дифференцируемая ограниченная область в плоскости $\xi\eta$ такая, что цилиндр $[0, t_0] \times G$ содержит Ω и граница σ области G содержит отрезок $[-2\delta, x_0 + 2\delta]$ оси ξ, где $\delta > 0$ — некоторое малое число.

Будем предполагать, что в некоторой окрестности точки A пересечения σ с прямой $\xi = 0$ граница σ лежит на прямой $\eta = \eta_1 = \text{const}$. Рассмотрим односвязную бесконечно дифференцируемую область Q с границей S, совпадающую с цилиндром $[-1, t_0 + 1] \times G$ при $-1 \leqslant \tau \leqslant t_0 + 1$ и содержащуюся в цилиндре $[-2, t_0 + 2] \times G$. Точки Q, для которых $\tau \geqslant 0$ и $\xi \geqslant 0$, либо $\tau \geqslant t_0$, обозначим через Ω_1. Продолжим гладким образом коэффициент p_x в уравнении (8) и функции v_0 и p_x в граничном условии (9) для всех значений ξ и τ.

Введем обозначения: через S_1 обозначим границу $\{\tau = 0, 0 \leqslant \xi \leqslant x_0, 0 \leqslant \eta \leqslant U(0, \xi)\}$ области Ω, пусть $S_2 = \{0 \leqslant \tau \leqslant t_0, \xi = 0, 0 \leqslant \eta \leqslant U(\tau, 0)\}$ и пусть $S_0 = \{0 \leqslant \tau \leqslant t_0, 0 \leqslant \xi \leqslant x_0, \eta = 0\}$.

Предположим, что существует гладкая функция w^*, определенная в $Q - \Omega_1$ и удовлетворяющая условиям

$$w^* |_{\tau=0} = w_0 \text{ на } S_1, \quad w^* |_{\xi=0} = w_1 \text{ на } S_2$$

$$L(w^*) = 0(\xi^4) \text{ в окрестности } S_2 \text{ при } \xi \leqslant 0 \text{ и } \tau \geqslant 0$$

$$L(w^*) = O(\tau^4) \text{ в окрестности } S_1 \text{ при } \xi \geqslant 0, \ \tau \leqslant 0$$

$$l(w^*) = O(\xi^4) \text{ на } S \text{ в окрестности отрезка } [0, t_0] \text{ оси } \tau$$

$$l(w^*) = O(\tau^4) \text{ на } S \text{ в окрестности отрезка } [0, x_0] \text{ оси } \xi$$

Можно считать, что w^* имеет непрерывные производные шестого порядка в замкнутой области $\overline{Q - \Omega_1}$ и является бесконечно дифференцируемой функцией вне некоторой окрестности границы S_1 и S_2 области Ω. Такую функцию w^* можно построить, если w_0, w_1, v_0, p_x — достаточно гладкие функции, кроме того, w_0 и w_1 удовлетворяют условиям согласования на осях τ, ξ, η в соответствии с уравнением (5) и граничными условиями (6) и (7).

Например, функцию w^* можно построить следующим образом. В окрестности S_2 при $\xi \leqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$ положим

$$w^* = w_1 + \xi \frac{\partial w}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} + \cdots + \frac{\xi^m}{m!}\frac{\partial^m w}{\partial \xi^m}\bigg|_{\xi=0}, \qquad m \geqslant 4 \tag{27}$$

Здесь производные w по ξ при $\xi = 0$ определены из уравнения (5) и уравнений, полученных из него дифференцированием по ξ, при условии, что $w = w_1$ при $\xi = 0$. При $\tau \leqslant 0$, $\xi \geqslant 0$ в окрестности границы S_1 области Ω функцию w^* определяем по формуле

$$w^* = w_0 + \tau \frac{\partial w}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} + \cdots + \frac{\tau^m}{m!}\frac{\partial^m w}{\partial \tau^m}\bigg|_{\tau=0}, \qquad m \geqslant 4 \tag{28}$$

где производные w по τ при $\tau = 0$ определяются из уравнения (5) и уравнений, полученных из него дифференцированием по τ, при условии, что $w = w_0$ при $\tau = 0$. Легко проверить, что функция w^*, определенная формулами (27) и (28) в окрестности границы Ω, лежащей на плоскостях $\tau = 0$ и $\xi = 0$, и продолженная произвольным гладким образом на остальную часть $Q - \Omega_1$, удовлетворяет требуемым условиям, если w_0 и w_1 достаточно гладкие функции и для них выполнены соответствующие условия согласования на осях τ, ξ, η.

При построении функций w^n, удовлетворяющих уравнению (8) и условиям (6), (9), за функцию w° возьмем w^*, продолженную произвольным гладким образом на Ω_1. Будем считать, что функция w^{n-1}, обладающая в Q ограниченными производными четвертого порядка и являющаяся решением задачи (8), (6), (9) в Ω, уже построена, и будем искать w^n. Будет показано, что $w^n = w^*$ в $Q - \Omega_1$, если $w^{n-1} = w^*$ в $Q - \Omega_1$.

Пусть $\sigma_\delta = \sigma - q_\delta$, где q_δ — отрезок $[-2\delta,\ x_0 + 2\delta]$ оси ξ, пусть $S^\delta = [-1,\ t_0 + 1]\sigma_\delta$. В области Q рассмотрим оператор

$$L^\varepsilon(w) \equiv \varepsilon(w_{\tau\tau} + w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}) + a_1 w_{\tau\tau} + a_2 w_{\xi\xi} + a_3 w_{\eta\eta} + \nu (w^{n-1})_\varepsilon^{\ 2} w_{\eta\eta} - \\ - w_\tau - \eta w_\xi + (p_x)_\varepsilon w_\eta - 2(a_1 + \varepsilon) w$$

Здесь $\varepsilon > 0$, бесконечно дифференцируемые функции a_1, a_2, a_3 положительны при $\tau < -1/2$ и при $\tau > t_0 + \delta$, a_3 положительна также в δ-окрестности S^δ, а a_2 положительна всюду в этой окрестности за исключением ее точек, лежащих на плоскости $\xi = 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t_0$. В остальных точках Q функции a_1, a_2, a_3 равны нулю. Число $\delta > 0$ выбираем настолько малым, что в Ω функции a_1, a_2, a_3 равны нулю. Через $(\Psi)_\varepsilon$ обозначаем усреднение с радиусом ε функции Ψ при помощи положительного бесконечно дифференцируемого ядра.

Рассмотрим в области Q краевую задачу для эллиптического уравнения

$$L^{\varepsilon}(w) = (f)_{\varepsilon} \tag{29}$$

с граничным условием на S

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = (F)_{\varepsilon} \tag{30}$$

где $\mathbf{n}$ — направление внутренней нормали к S. Функцию f, входящую в (29), определяем в Q следующим образом:

$$f = L(w^*) + a_1 w_{\tau\tau}^* + a_2 w_{\xi\xi}^* + a_3 w_{\eta\eta}^* - 2a_1 w^*$$

в $Q - \Omega_1$, $f = 0$ в Ω и f будет некоторым произвольным гладким продолжением этой функции (с ограниченными производными четвертого порядка) в остальной части Q. Функция F равна

$$\frac{v_0}{\nu} + \frac{p_x}{\nu w^{n-1}} \quad \text{на } S_0, \qquad F = \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{на } \gamma$$

Здесь γ — пересечение S с границей области $Q - \Omega_1$. На остальной части S функция F, входящая в (30), будет произвольным гладким продолжением функции F, заданной на S_0 и γ.

Очевидно, можно считать, в силу свойств w^*, что функция f имеет в Q ограниченные производные до четвертого порядка включительно, причем f — бесконечно дифференцируема вне δ-окрестности Ω, а функция F имеет ограниченные производные четвертого порядка в некоторой окрестности S_0 и бесконечно дифференцируема на остальной части S. Краевая задача (29), (30) имеет единственное решение $w^{\varepsilon n}$ в области Q и, так как граница области Q, коэффициенты уравнения (29), правые части в уравнении (29) и граничном условии (30) бесконечно дифференцируемы, то $w^{\varepsilon n}$ — бесконечно дифференцируемая функция в замыкании Q (см., например, [6]). Единственность решения задачи (29), (30) следует из принципа максимума [7]. Покажем, что $w^{\varepsilon n}$ и их производные до четвертого порядка включительно равномерно ограничены по ε.

Лемма 6. В области Q решения $w^{\varepsilon n}$ задачи (29), (30) равномерно ограничены относительно ε.

Доказательство. В уравнении (29) сделаем замену

$$w^{\varepsilon n} = v^{\varepsilon}\psi^1$$

где $\psi^1(\tau) = 1$ при $\tau \leqslant -1$, $\psi^1(\tau) = 1 + b(1+\tau)^3$ при $-1 \leqslant \tau \leqslant t_0 + 2$. Постоянную $b > 0$ выбираем так, чтобы $\psi^1_{\tau\tau} \leqslant \psi^1$ в Q. Пусть $6b(t_0 + 3) < 1$. Для функции v^{ε} получим в Q уравнение

$$\begin{gathered}\varepsilon\Delta v^{\varepsilon} + a_1 v^{\varepsilon}_{\tau\tau} + a_2 v^{\varepsilon}_{\xi\xi} + a_3 v^{\varepsilon}_{\eta\eta} + \nu\,(w^{n-1})_{\varepsilon}^2 v^{\varepsilon}_{\eta\eta} - v^{\varepsilon}_{\tau} - \eta v^{\varepsilon}_{\xi} + (p_x)_{\varepsilon} v^{\varepsilon}_{\eta} + \\ + 2(a_1+\varepsilon)\frac{\psi^1_{\tau}}{\psi^1} v^{\varepsilon}_{\tau} + \left[(a_1+\varepsilon)\frac{\psi^1_{\tau\tau}}{\psi^1} - \frac{\psi^1_{\tau}}{\psi^1} - 2(a_1+\varepsilon)\right] v^{\varepsilon} = \frac{(f)_{\varepsilon}}{\psi_1}\end{gathered} \tag{31}$$

и граничное условие на S

$$\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{(F)_{\varepsilon}}{\psi^1} \quad \text{при } -2 \leqslant \tau \leqslant t_0 + 1 \tag{32}$$

$$\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \psi^1/\partial \mathbf{n}}{\psi^1} v^{\varepsilon} = \frac{(F)_{\varepsilon}}{\psi^1} \quad \text{при } \tau \geqslant t_0 + 1 \tag{33}$$

Так как

$$\frac{\partial \psi^1}{\partial \mathbf{n}} = \psi_\tau{}^1 \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{n}} \leqslant 0 \quad \text{при } \tau \geqslant t_0 + 1 \quad \text{на } S$$

то коэффициент при v^ε в граничном условии (33) неположителен. (Q можно считать выпуклой при $\tau \geqslant t_0 + 1$.) Коэффициент при v^ε в уравнении (31) отрицателен. Действительно, $-(a_1+\varepsilon)+(a_1+\varepsilon)\psi_{\tau\tau}{}^1/\psi^1 \leqslant 0$, так как $\psi_{\tau\tau}{}^1/\psi^1 \leqslant 1$, а $\psi_\tau{}^1 > 0$ при $\tau > > -1$ и функция $a_1 > 0$ при $\tau < -{}^1/_2$. Применяя к решению эллиптического уравнения (31) с граничным условием (32), (33) оценку, доказанную в теореме 4 работы [7], получим, что v^ε, а следовательно, и $w^{\varepsilon n}$ равномерно по ε ограничены в Q.

Лемма 7. Решения $w^{\varepsilon n}$ задачи (29), (30) имеют в Q равномерно ограниченные по ε производные до четвертого порядка включительно.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в области Q при $\tau > t_0 + \delta + r_1$ и при $\tau < -{}^1/_2 - r_1$, где r_1 — произвольное положительное число, уравнение (29) является эллиптическим равномерно относительно ε. Поэтому согласно известным априорным оценкам типа Шаудера (см., например, [6]) производные $w^{\varepsilon n}$ порядка m ограничены по модулю равномерно по ε при $\tau > t_0 + \delta + r_1$ и при $\tau < -{}^1/_2 - r_1$, если w^{n-1} в этой области имеет ограниченные производные порядка $m-1$.

Пусть точка $P(\xi,\eta)$ принадлежит σ_δ, причем $|\xi| \geqslant 2\delta$, и пусть A_δ обозначает ее δ-окрестность на плоскости $\xi\eta$. Рассмотрим цилиндр

$$B_\delta = [-{}^1/_2 - r_1,\, t_0 + \delta + r_1] \times A_\delta.$$

Покажем, что в этой области $w^{\varepsilon n}$ имеют ограниченные равномерно по ε производные до четвертого порядка включительно. Можно считать, что в области B_δ коэффициент a_1 зависит только от τ, а a_2 и a_3 зависят только от ξ и η.

В области A_δ перейдем к новым координатам ξ', η' так, чтобы граница σ, принадлежащая A_δ, перешла в прямую $\eta' = 0$, а направление $\mathbf{n}$ нормали к σ перешло в направление оси η'. Граничное условие (29) в новых координатах, которые в дальнейшем будем также обозначать ξ, η, примет вид $\partial w^{\varepsilon n}/\partial\eta = F_\varepsilon{}^*$.

Пусть $T(\tau,\xi,\eta)$ — функция в B_δ такая, что $\partial T/\partial\eta = F_\varepsilon{}^*$ при $\eta = 0$. Функция $z = w^{\varepsilon n} - T$ удовлетворяет в B_δ уравнению

$$M(z) \equiv (\varepsilon + a_1)\, z_{\tau\tau} - z_\tau + a_{11} z_{\xi\xi} + 2a_{12} z_{\xi\eta} + a_{22} z_{\eta\eta} + b_1 z_\xi + b_2 z_\eta - 2(\varepsilon + a_1)\, z = f_\varepsilon{}^* \tag{34}$$

и условию $z_\eta = 0$ на S, причем $a_{11}\alpha_1{}^2 + 2a_{12}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2{}^2 \geqslant \lambda_0(\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2)$.

Чтобы оценить производные первого порядка от z по ξ и η, рассмотрим функцию

$$\Lambda^1 = \rho_\delta{}^2(\xi,\eta)\,[z_\xi{}^2 + z_\eta{}^2] + c_1 z^2 + c_2\eta, \qquad c_2 > 0$$

Здесь постоянная c_1 предполагается достаточно большой, она будет выбрана ниже; $\rho_\delta(\xi,\eta)$ — функция, равная единице в $A_{\delta/2}$ и равная нулю в некоторой малой окрестности границы A_δ, не принадлежащей σ. Кроме того, $\rho_{\delta\eta} = 0$ на σ.

Легко видеть, что $\partial\Lambda^1/\partial\eta = c_2 > 0$ на S и, следовательно, Λ^1 не может принимать максимальное значение на S. Если максимум Λ^1 принимается в точках границы B_δ, где $\rho_\delta = 0$, то

$$\Lambda^1 \leqslant \max\,[c_1 z^2 + c_2\eta] \leqslant c_3$$

где c_3 не зависит от ε. Легко проверить при достаточно большом значении c_1, что $M(\Lambda^1) - \Lambda^1 \geqslant -c_4$ в B_δ, если постоянная c_4 достаточно велика. Поэтому, если Λ^1 принимает наибольшее значение внутри B_δ, то $\Lambda^1 \leqslant c_4$.

При $\tau = t_0 + \delta + r_1$ и $\tau = -{}^1/_2 - r_1$ функция Λ^1 ограничена равномерно по ε, как установлено выше. Итак, Λ^1 равномерно по ε ограничена в B_δ и, значит, z_ξ и z_η ограничены в B_{δ_1}, $\delta_1 < \delta$.

Представим уравнение (34) в следующем виде:

$$M(z) \equiv \Gamma(z) + M^1(z) = f_\varepsilon^*, \qquad \Gamma(z) \equiv (\varepsilon + a_1) z_{\tau\tau} - z_\tau$$

Можно считать, что коэффициенты оператора M^1 не зависят от τ. Поэтому, как легко видеть, $\Gamma(z)$ удовлетворяет уравнению

$$M(\Gamma) \equiv \Gamma(\Gamma) + M^1(\Gamma) = \Gamma(f_\varepsilon^*) \text{ в } B_\delta, \quad \Gamma_\eta|_{\eta=0} = 0 \quad \text{на } S \tag{35}$$

Рассмотрим в B_{δ_1} функцию

$$\Lambda^2 = \rho_{\delta_1}{}^2 [z_{\xi\xi}^2 + z_{\xi\eta}^2 + \Gamma^2(z)] + c_5(z_\xi^2 + z_\eta^2) + c_6\eta$$

Нетрудно подсчитать, пользуясь уравнениями (34) и (35), что

$$M(\Lambda^2) - \Lambda^2 \geqslant -c_7 \quad \text{в } B_{\delta_1}, \qquad \frac{\partial \Lambda^2}{\partial \eta} = c_6 > 0$$

на S, если $c_5 > 0$ достаточно велико. Отсюда получаем, что Λ^2 равномерно по ε ограничена в B_{δ_1}, а $\Gamma(z)$, $z_{\xi\xi}$, $z_{\xi\eta}$ равномерно по ε ограничены в B_{δ_2}, $\delta_2 < \delta_1$. Из уравнения (34) следует, что $z_{\eta\eta}$ также равномерно по ε ограничена. Рассматривая уравнения для z_τ вида $(a_1 + \varepsilon) z_{\tau\tau} - z_\tau = \Gamma$ и пользуясь ограниченностью Γ в B_{δ_2} и ограниченностью z_τ при $\tau = -1/2 - r_1$ и $\tau = t_0 + \delta + r_1$, легко получим, что z_τ также равномерно по ε ограничена в B_{δ_2}.

Так как функция $\Gamma(z)$ ограничена в B_{δ_2} и удовлетворяет уравнению (35) с граничным условием $\Gamma_\eta|_{\eta=0} = 0$ на S, то для Γ в B_{δ_2} можно рассмотреть функции Λ^1 и Λ^2, как это было сделано для z, и получить оценки, равномерные по ε в B_{δ_3} $(\delta_3 < \delta_2)$, для производных

$$\Gamma_\xi, \quad \Gamma_\eta, \quad \Gamma_{\xi\xi}, \quad \Gamma_{\xi\eta}, \quad \Gamma(\Gamma), \quad \Gamma_{\eta\eta}, \quad \Gamma_\tau$$

Дифференцируя по τ уравнение (35), получим для Γ_τ уравнение

$$(a_1 + \varepsilon)\Gamma_{\tau\tau\tau} - (1 - a_1')\Gamma_{\tau\tau} + M^1(\Gamma_\tau) = (\Gamma(f_\varepsilon^*))_\tau$$

и условие $\Gamma_{\tau\eta}|_{\eta=0} = 0$ на S. По предположению $a_1'(\tau)$ мало в области B_δ. Поэтому уравнение для Γ_τ имеет такой же вид, как (35). Следовательно, можно оценить равномерно по ε в B_{δ_4}, $(\delta_4 < \delta_3)$, как это делалось для z, производные Γ вида:

$$\Gamma_{\tau\xi}, \quad \Gamma_{\tau\eta}, \quad \Gamma_{\tau\xi\xi}, \quad \Gamma_{\tau\eta\xi}, \quad (a_1+\varepsilon)\Gamma_{\tau\tau\tau} - (1-a_1')\Gamma_{\tau\tau}, \quad \Gamma_{\tau\eta\eta}, \quad \Gamma_{\tau\tau}$$

Проводя аналогичные рассуждения для $\Gamma_{\tau\tau}$, получим в B_{δ_5}, $(\delta_5 < \delta_4)$, равномерную по ε ограниченность производных

$$\Gamma_{\tau\tau\xi}, \quad \Gamma_{\tau\tau\eta}, \quad \Gamma_{\tau\tau\xi\xi}, \quad \Gamma_{\tau\tau\eta\xi}, \quad (a_1+\varepsilon)\Gamma_{\tau\tau\tau\tau} - (1-2a_1')\Gamma_{\tau\tau\tau}, \quad \Gamma_{\tau\tau\eta\eta}, \quad \Gamma_{\tau\tau\tau}$$

Из этих оценок следует, что в B_{δ_5} равномерно по ε ограничены производные z третьего и четвертого порядков, содержащие более одного дифференцирования по τ, а первые производные по ξ и η от $\Gamma(\Gamma)$ удовлетворяет условию Липшица по ξ и η равномерно по ε и τ. Из оценок типа Шаудера (см. [6]) для эллиптического уравнения

$$M^1(\Gamma) = -\Gamma(\Gamma) + \Gamma(f_\varepsilon^*)$$

следует, что производные до третьего порядка включительно по ξ и η от Γ ограничены и удовлетворяют условию Гельдера равномерно по ε и τ в B_{δ_6} $(\delta_6 < \delta_5)$. Пользуясь оценками Шаудера для уравнения (34) для z, записанного в виде

$$M^1(z) = -\Gamma(z) + f_\varepsilon^*$$

получим, что z имеет производные по ξ и η до четвертого порядка включительно, равномерно ограниченные по ε и τ в области B_{δ_7}, $\delta_7 < \delta_6$. Таким образом, получены оценки производных $w^{\varepsilon n}$ по τ, ξ, η до четвертого порядка включительно в некоторой окрестности всей границы S, за исключением окрестности S_0 и окрестности ω пересечения S с плоскостью $\xi = 0$, лежащего в плоскости $\eta = \eta_1$.

В уравнении (29) и граничном условии (30) перейдем к новой функции W, определенной равенством

$$w = We^{\varphi_2(\eta)}, \qquad \varphi_2 = -\alpha\eta(\eta_1 - \eta)/\eta_1, \quad \alpha = \text{const} > 0$$

Для функции W получим граничные условия вида

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha W = (F)_\varepsilon \quad \text{при } \eta = 0, \qquad -\frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha W = (F)_\varepsilon \quad \text{при } \eta = \eta_1$$

Для того чтобы оценить в Q производные первого порядка от $w^{\varepsilon n}$ рассмотрим в Q при $-{}^1/_2 - r_1 \leqslant \tau \leqslant t_0 + \delta + r_1$ (обозначим эту область Q_{r_1}), функцию

$$X_1 = W_\xi^2 + W_\tau^2 + W_\eta (W_\eta - 2Y) + k(\eta), \qquad Y = (\alpha W + (F)_\varepsilon)\, \varkappa_1(\eta)\cdot$$

$$\varkappa_1(\eta) = 1 \quad \text{при } |\eta| < \delta$$
$$\varkappa_1(\eta) = -1 \quad \text{при } |\eta - \eta_1| < \delta$$
$$\varkappa_1(\eta) = 0 \quad \text{при } 2\delta < \eta < \eta_1 - 2\delta$$

Здесь $k(\eta)$ — некоторая положительная функция, которая будет выбрана ниже. Очевидно, на границе S, лежащей в плоскости $\eta = 0$ или $\eta = \eta_1$, выполнено равенство $\partial W / \partial \eta - Y = 0$. Имеем

$$\left.\frac{\partial X_1}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 2W_\xi W_{\xi\eta} + 2W_\tau W_{\tau\eta} - 2W_\eta Y_\eta + k'(0) =$$
$$= 2\alpha\,[W_\xi^2 + W_\tau^2] - 2YY_\eta + 2W_\xi (F)_{\varepsilon\xi} + 2W_\tau (F)_{\varepsilon\tau} + k'(0) > 0$$

если $k'(0) > 0$ достаточно велико. Аналогично, выбрав в X_1 функцию $k(\eta)$ так, что $k'(\eta_1) < 0$ и достаточно велико по модулю, получим, что $\partial X_1 / \partial \eta|_{\eta=\eta_1} < 0$. Используя те же приемы как и при доказательстве леммы 4, получаем, что

$$L^{\circ\varepsilon}(X_1) + c_8 X_1 \geqslant -c_9 \tag{36}$$

$$L^{\circ\varepsilon}(W) \equiv L^\varepsilon(W) + 2\,[(\varepsilon + a_8) + \nu\,(w^{n-1})_\varepsilon^{\,2}]\, \varphi_{2\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} +$$
$$+ \{(\nu\,(w^{n-1})_\varepsilon^{\,2} + \varepsilon + a_8)\,[\varphi_{2\eta\eta} + (\varphi_{2\eta})^2] + (p_x)_\varepsilon\, \varphi_{2\eta}\}\, W$$

Здесь c_8 и c_9 не зависят от ε. Рассмотрим в Q_{r_1} функцию

$$X_1^* = X_1 e^{-\beta t}, \qquad \beta = \mathrm{const} > 0$$

Тогда, если β достаточно велико, то коэффициент при X_1^* в неравенстве (36) отрицателен и меньше -1. Из (36) следует, что если X_1^* принимает наибольшее значение внутри Q_{r_1}, то X_1^* ограничено постоянной, не зависящей от ε. При $\eta = 0$ и $\eta = \eta_1$ функция X_1^* не может принимать наибольшее значение; на остальной части границы Q_{r_1} функция X_1^* ограничена равномерно по ε в силу предыдущих оценок. Аналогично оцениваем равномерно по ε производные второго и третьего порядков от $w^{\varepsilon n}$, рассматривая функции

$$X_2 = W_{\tau\tau}^2 + W_{\xi\xi}^2 + W_{\tau\xi}^2 + W_{\eta\xi}(W_{\eta\xi} - 2Y_\xi) + W_{\eta\tau}(W_{\eta\tau} - 2Y_\tau) + g_1^2(\eta)\, W_{\eta\eta}^2 + k(\eta)$$

$$X_3 = (X_3)' + g_1^2(\eta)\,[W_{\eta\eta\eta}^2 + W_{\eta\eta\xi}^2 + W_{\eta\eta\tau}^2] + W_{\eta\xi\xi}(W_{\eta\xi\xi} - 2Y_{\xi\xi}) +$$
$$+ W_{\eta\tau\tau}(W_{\eta\tau\tau} - 2Y_{\tau\tau}) + W_{\eta\xi\tau}(W_{\eta\xi\tau} - 2Y_{\xi\tau}) + k(\eta)$$

$$g_1(\eta) = 0 \text{ при } \eta < \delta/2, \; g_1(\eta) = 0 \text{ при } \eta > \eta_1 - \delta/2, \; g_1(\eta) = 1 \text{ при } \eta_1 - \delta > \eta > \delta$$

Здесь $(X_3)'$ — сумма квадратов третьих производных W по ξ и τ. Для оценки функций X_2 и X_3, которые можно провести аналогично тому, как это делалось для X_1, нужно воспользоваться при выводе неравенства для X_2 и X_3 вида (36) тем, что коэффициент в уравнении (29) при производной $W_{\eta\eta}$ положителен при $\eta < \delta$ и $\eta_1 - \eta < \delta$, так же как и при доказательстве леммы 5. При оценке производных четвертого порядка от W обратим внимание на следующее. Рассмотрим функцию

$$X_4 = (X_4)' + g_1^2(\eta)\,(X_4)'' + W_{\eta\xi\xi\xi}(W_{\eta\xi\xi\xi} - 2Y_{\xi\xi\xi}) + W_{\eta\tau\tau\tau}(W_{\eta\tau\tau\tau} - 2Y_{\tau\tau\tau}) +$$
$$+ W_{\eta\xi\xi\tau}(W_{\eta\xi\xi\tau} - 2Y_{\xi\xi\tau}) + W_{\eta\tau\tau\xi}(W_{\eta\tau\tau\xi} - 2Y_{\tau\tau\xi}) + k(\eta)$$

где $(X_4)'$ — сумма квадратов производных W четвертого порядка, не содержащих дифференцирования по η, а $(X_4)''$ — сумма квадратов производных W четвертого порядка, содержащих более одного дифференцирования по η.

В функцию X_4 входят производные третьего порядка от Y, а значит и от $(F)_\varepsilon$. Оператор $L^{\circ\varepsilon}(X_4)$ оценивается через $L^{\circ\varepsilon}(Y_{\tau\tau\tau})$, $L^{\circ\varepsilon}(Y_{\xi\xi\xi})$, $L^{\circ\varepsilon}(Y_{\tau\tau\xi})$ и $L^{\circ\varepsilon}(Y_{\tau\xi\xi})$, которые содержат производные пятого порядка от $(F)_\varepsilon$. По построению функция F бесконечно дифференцируема вне δ-окрестности S_0 и имеет ограниченные производные четвертого порядка на S. В области Q, принадлежащей δ-окрестности S_0, оператор $L^{\circ\varepsilon}$ содержит дифференцирования второго порядка по ξ и τ с коэффициентом ε вида $\varepsilon(\partial^2/\partial\tau^2)$ и $\varepsilon(\partial^2/\partial\xi^2)$. Так как F имеет ограниченные производные четвертого порядка, то производные пятого порядка от усредненной функции $(F)_\varepsilon$ имеют порядок $1/\varepsilon$. Поэтому применение оператора $L^{\circ\varepsilon}$ к производным третьего порядка от $(F)_\varepsilon$ дает величину, равномерно ограниченную по ε. В остальном оценка для X_4 проводится точно так же, как и для X_1, X_2, X_3. В результате получаем, что для $w^{\varepsilon n}$ равномерно по ε ограничены все производные до четвертого порядка включительно.

Теорема 4. Решения $w^{\varepsilon n}$ задачи (29), (30) в области Q сходятся при $\varepsilon \to 0$ к функции w^n, которая в Ω является решением задачи (8), (6), (9).

Доказательство. Так как по лемме 7 производные $w^{\varepsilon n}$ до четвертого порядка включительно равномерно по ε ограничены, то можно выбрать последовательность $w^{\varepsilon_k n}$ такую, что при $\varepsilon_k \to 0$ функции $w^{\varepsilon n}$ сходятся к w^n равномерно в Q вместе с производными до третьего порядка включительно. Очевидно, предельная функция w^n удовлетворяет в Ω уравнению (8) и граничному условию (9) при $\eta = 0$. Покажем теперь, что w^n удовлетворяет условиям (6). Для этого докажем, что $w^n = w^*$ в $Q - \Omega_1$. Пусть $w^n - w^* = Z$. По построению в $Q - \Omega_1$

$$a_1 Z_{\tau\tau} + a_2 Z_{\xi\xi} + a_3 Z_{\eta\eta} + \nu (w^*)^2 Z_{\eta\eta} - Z_\tau - \eta Z_\xi + p_x Z_\eta - 2a_1 Z = 0$$

и $\partial z / \partial \mathfrak{n} = 0$ на той части границы $Q - \Omega_1$, которая принадлежит S. В $Q - \Omega_1$ рассмотрим функцию Z^*, определенную равенством $Z = Z^* \psi^1(\tau)$, где ψ^1 — функция, построенная при доказательстве леммы 6. Для Z^* получим в $Q - \Omega_1$ уравнение, в котором коэффициент при Z^* строго отрицателен в замыкании $Q - \Omega_1$.

Пусть $E(\tau, \xi, \eta)$ — гладкая функция в Q такая, что $\partial E / \partial \mathfrak{n} < 0$ на S и $E > 1$. Рассмотрим функцию $Z^1 = Z^* (E + c)$, где c — положительная постоянная. В уравнении, которое получим для Z^1, коэффициент при Z^1, легко видеть, будет отрицательным, если c достаточно велико. Граничное условие на S имеет вид $\partial Z^1 / \partial \mathfrak{n} - \alpha_1 Z^1 = 0$, где $\alpha_1 = -\partial E / \partial \mathfrak{n} > 0$. Модуль функции Z^1 не может принимать наибольшее значение на S, так как в точке максимума $|Z^1|$ на S имеем $Z^1 (\partial Z^1 / \partial \mathfrak{n}) - \alpha_1 (Z^1)^2 < 0$, что противоречит граничному условию на S. Максимум $|Z^1|$ не может приниматься также и внутри $Q - \Omega_1$, так как в точке максимума $|Z^1|$ имеем $Z_\tau^1 = 0$, $Z_\xi^1 = 0$, $Z_\eta^1 = 0$, $Z^1 Z_{\eta\eta}^1 \leqslant 0$, $Z^1 Z_{\xi\xi}^1 \leqslant 0$, $Z^1 Z_{\tau\tau}^1 \leqslant 0$, а это противоречит тому, что в этой точке выполнено уравнение, полученное для Z^1.

Аналогично доказываем, что максимум $|Z^1|$ не может достигаться при $\tau = 0$ либо при $\xi = 0$ на границе $Q - \Omega_1$. Следовательно, $Z^1 \equiv 0$ в $Q - \Omega_1$ и, значит, $w^n \equiv w^*$ в $Q - \Omega_1$. Отсюда следует, что $w^n|_{\tau=0} = w_0$ и $w^n|_{\xi=0} = w_1$.

Покажем, что $w^n = 0$ на поверхности $\eta = U(\tau, \xi)$. Из доказанного следует, что $w^n = 0$ при $\tau = 0$ и $\eta = U(0, \xi)$ и $w^n = 0$ при $\xi = 0$ и $\eta = U(\tau, 0)$. Так как $w^{n-1} = 0$ на поверхности $\eta = U(\tau, \xi)$, то w^n на этой поверхности удовлетворяет уравнению $w_\tau^n + \eta w_\xi^n - p_x w_\eta^n = 0$. Как уже отмечалось, направление $(1, \eta, -p_x)$ лежит в касательной плоскости к поверхности $\eta = U(\tau, \xi)$. Эти направления образуют векторное поле на этой поверхности. Интегральные кривые этого поля при продолжении для меньших значений τ пересекают границу поверхности либо при $\xi = 0$, либо при $\tau = 0$, где $w^n = 0$. Так как w^n постоянна на этих интегральных кривых, то $w^n = 0$ на всей поверхности $\eta = U(\tau, \xi)$. Заметим, что построенная функция w^n имеет в Ω производные третьего порядка, удовлетворяющие условию Липшица.

Вернемся теперь к первоначальной задаче (1)—(3). Считаем, что выполнены предположения о достаточной гладкости p, v_0, u_1, u_0, w_0, w_1, а также условия согласования для этих функций, которые заключаются в существовании функции w^*, указанной выше.

Теорема 5. Существует единственное решение задачи (1)—(3) в области D, если $t_0 \leqslant \tau_1$, либо $x_0 \leqslant \xi_1$; где $\tau_1 > 0$ и $\xi_1 > 0$ — некоторые числа, которые определяются данными задачи (1)—(3). Это решение обладает следующими свойствами: $u > 0$ при $y > 0$, $u_y > 0$ при $y \geqslant 0$, производные u_t, u_x, u_y, u_{yy} непрерывны и ограничены в D. Кроме того, u_{yy} / u_y и $(u_{yyy}u_y - u_{yy}^2) / u_y^3$ ограничены в D.

Доказательство. Пусть w — решение задачи (5)—(7), которое построено при доказательстве теоремы 4. Определим u из условия $w = u_y$ или

$$y = \int_0^u \frac{ds}{w(t, x, s)} \tag{37}$$

Так как $w(t, x, s) > 0$ при $s < U(t, x)$ и $w = 0$ при $s = U(t, x)$, то $u \to U(t, x)$ при $y \to \infty$ и $0 < u < U(t, x)$ при $0 < y < \infty$, $u|_{y=0} = 0$. Условия $u|_{t=0} = u_0$ и $u|_{x=0} = u_1$ также выполнены в силу условий $w_0 = u_{0y}$ и $w_1 = u_{1y}$. Функция, определяемая (37), имеет производные $u_y = w$, $u_{yy} = w_\eta w$, $u_{yyy} = w_{\eta\eta} u_y^2 + w_\eta u_{yy}$. Производные u_t и u_x определяются равенствами

$$u_t = -w \int_0^u \frac{w_t(t, x, s)\, ds}{w^2(t, x, s)}, \qquad u_x = -w \int_0^u \frac{w_x(t, x, s)\, ds}{w^2(t, x, s)}$$

Положим

$$v = \frac{-u_t - uu_x - p_x + \nu u_{yy}}{u_y} \tag{38}$$

Покажем, что u, v, определенные формулами (37), (38), удовлетворяют системе (1). Дифференцируя равенство $u_y = w$, получим, что существуют производные

$$u_{yx} = w_\xi + u_x w_\eta, \qquad u_{yt} = w_\tau + u_t w_\eta$$

Поэтому функция v имеет производную по y. Дифференцируя (38) по y, получим

$$v_y u_y + v u_{yy} = -u_{ty} - uu_{xy} - u_y u_x + \nu u_{yyy}$$

или

$$v_y u_y + u_y u_x + u_{yy}\left[\frac{-u_t - uu_x - p_x + \nu u_{yy}}{u_y}\right] + u_{ty} + uu_{xy} - \nu u_{yyy} = 0 \tag{39}$$

Функция w удовлетворяет уравнению (5). Заменяя в уравнении (5) производные w через производные от u, получим, что

$$\nu u_y^2 \left(\frac{u_y u_{yyy} - u_{yy}^2}{u_y^3}\right) - u_{yt} + u_t \frac{u_{yy}}{u_y} - u\left(u_{yx} - \frac{u_x u_{yy}}{u_y}\right) + p_x \frac{u_{yy}}{u_y} = 0 \tag{40}$$

Из (40) и (39) следует, что $v_y u_y + u_x u_y = 0$, т. е.

$$u_x + v_y = 0 \tag{41}$$

Уравнения (38), (41) дают систему (1). Покажем теперь, что v удовлетворяет условию $v|_{y=0} = v_0(t, x)$. Из условия (7) следует, что

$$v_0 = \left(\frac{\nu w w_\eta - p_x}{w}\right)\Big|_{\eta=0}$$

Из (38) следует, что

$$v\,\Big|_{y=0} = \left(\frac{\nu u_{yy} - p_x}{u_y}\right)\Big|_{y=0} = \left(\frac{\nu w w_\eta - p_x}{w}\right)\Big|_{\eta=0} = v_0$$

Единственность решения задачи (1)—(3) следует из единственности решения задачи (5)—(7). Предположим, что существует два решения w' и w'' задачи (5)—(7). Их разность $V^\circ = w' - w''$ удовлетворяет в Ω уравнению

$$\nu (w')^2 V_{\eta\eta}^\circ - V_\tau^\circ - \eta V_\xi^\circ + p_x V_\eta^\circ + \nu w_{\eta\eta}'' (w' + w'') V^\circ = 0 \tag{42}$$

и условиям

$$V^\circ|_{\tau=0} = 0, \quad V^\circ|_{\xi=0} = 0, \quad V^\circ|_{\eta=U(\tau,\xi)} = 0, \quad (\nu w' V_\eta^\circ - v_0 V^\circ + \nu w_\eta'' V^\circ)|_{\eta=0} = 0$$

Рассмотрим функцию V^1, определенную равенством

$$V^\circ = V^1 e^{\alpha\tau - \beta\eta},$$

где α и β — некоторые положительные постоянные. Для V^1 из (42) получаем уравнение

$$\nu (w')^2 V_{\eta\eta}^1 - V_\tau^1 - \eta V_\xi^1 + [p_x - 2\nu (w')^2 \beta] V_\eta^1 +$$
$$+ [\nu w_{\eta\eta}''(w' + w'') + \nu (w')^2 \beta^2 - \alpha] V^1 = 0 \tag{43}$$

и условия

$$V^1|_{\tau=0} = 0, \; V^1|_{\xi=0} = 0, \; V^1|_{\eta=U(\tau,\xi)} = 0, \; (\nu w' V_\eta^1 + (\nu w_\eta'' - v_0 - \nu\beta w') V^1)|_{\eta=0} = 0 \tag{44}$$

Если α и β возьмем достаточно большими, то из (44) и (43) следует, что $|V^1|$ не может принимать наибольшее значение ни во внутренних точках Ω, ни на ее границе. Следовательно, $V^1 \equiv 0$ и $w' \equiv w''$ в Ω, что и требовалось доказать.

Другое доказательство единственности решения задачи (5)—(7) имеется в [8]. Аналогично можно доказать непрерывную зависимость решения w задачи (5)—(7) от заданных функций p, v_0, u_0, u_1. Поведение решения задачи (5)—(7) и задачи (1)—(3) при $t \to \infty$ изучено в работе [9].

Сходимость конечно-разностных приближений для решений системы Прандтля рассмотрена в работе [10].

Поступила 23 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. О системе уравнений пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 4, стр. 751—754.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд-во иностр. литер., М., 1956.
3. Лойцянский А. Г. Ламинарный пограничный слой, М., Физматгиз, 1962.
4. Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3, стр. 489—507.
5. Олейник О. А. Об уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Матем. сб., 1966, т. 69, № 1, стр. 111—140.
6. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. Изд-во иностр. литер., М., 1962.
7. Олейник О. А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Матем. сб., 1952, т. 30, № 3, стр. 695—702.
8. Nickel K. Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Crenzschichten II. Math. Zeitschr. 1964, Bd. 83, Hf. 1, s. 1—7.
9. Олейник О. А. Об устойчивости решений системы уравнений пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости. ПММ, 1966, т. 30, № 3, стр. 417—423
10. Oleinik O. A. On existence, uniqueness, stability and approximation of solutions of Prandtl's system for the nonstationary boundary layer, Rendiconti Accad. Naz. Lincei, 1966, v. XL, giugno.