К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА И ШАРА

С. М. Дургарьян (Ереван)

В ряде работ (например [1,2] и др.) рассмотрены задачи по определению симметричных температурных полей как полного, так и полого изотропного цилиндра и шара при различных начальных и граничных условиях.

Значительный практический интерес представляет определение неосесимметричных нестационарных температурных полей для изотропного и ортотропного полого цилиндра и шара при граничных условиях, соответствующих теплообмену на внешней и внутренней поверхностях.

При решении этих задач, искомые температурные функции можно представить в виде рядов (в случае цилиндра — тригонометрических вдоль образующей и направляющей; в случае шара — тригонометрических вдоль параллели и по полиномам Лежандра вдоль меридиана).

Тогда, если пользоваться преобразованием Лапласа, отыскание изображений коэффициентов разложения можно свести к интегрированию вспомогательного уравнения Бесселя. После интегрирования (с учетом преобразованных граничных условий) этого вспомогательного уравнения применением теоремы обращения преобразования Лапласа можно определить коэффициенты разложения, а затем и искомую температурную функцию.

В случаях, когда граничные условия на поверхностях ортотропного полого цилиндра или шара заданы в виде линейных комбинаций температурной функции и ее первой производной по нормали к поверхности, для использования теоремы вычетов при вычислении контурных интегралов и доказательства сходимости окончательных результатов возникает необходимость в определении и исследовании корней трансцендентного уравнения

$$\begin{gathered}[a_1J_\nu(x)-b_1xJ_{\nu+1}(x)]\,[a_2N_\nu(\mu x)-b_2\mu xN_{\nu+1}(\mu x)]-\\ -[a_2J_\nu(\mu x)-b_2\mu xJ_{\nu+1}(\mu x)]\,[a_1N_\nu(x)-b_1xN_{\nu+1}(x)]=0\qquad(\infty>\mu>1,\ \nu\geqslant 0)\end{gathered}\tag{0.1}$$

Частные случаи этого уравнения (при $\nu=0$, при $a_1=a_2=0$ или $b_1=b_2=0$, при $\nu=0$, $a_2=0$ и т. д.) рассмотрены Макмагоном [3], Сасаки [4], Карслоу [5], Липовым и Цвикком [6] и др. Ниже для вычисления и исследования корней уравнения (0.1) используются результаты работы [3].

1. Рассмотрим уравнение (0.1) в случае, когда $b_1b_2\neq 0$. Следуя Макмагону, при определении корней трансцендентного уравнения (0.1), будем пользоваться асимптотическими разложениями бесселевых функций [7]

$$\begin{aligned}a_1J_\nu(x)-b_1xJ_{\nu+1}(x)&=-R_1\sqrt{2/\pi x}\sin(x-\pi\nu/2-\pi/4-\theta_1)\\ a_1N_\nu(x)-b_1xN_{\nu+1}(x)&=R_1\sqrt{2/\pi x}\cos(x-\pi\nu/2-\pi/4-\theta_1)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}a_2J_\nu(\mu x)-b_2\mu xJ_{\nu+1}(\mu x)&=-R_2\sqrt{2/\pi\mu x}\sin(\mu x-\pi\nu/2-\pi/4-\theta_2)\\ a_2N_\nu(\mu x)-b_2\mu xN_{\nu+1}(\mu x)&=R_2\sqrt{2/\pi\mu x}\cos(\mu x-\pi\nu/2-\pi/4-\theta_2)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}R_1\cos\theta_1&=b_1x+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2x)^{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{\Gamma(\nu+2k+{}^3/_2)}{\Gamma(\nu-2k-{}^1/_2)}\Big[a_1-\frac{b_1}{4(k+1)}\times\\ &\qquad\times\Big(\nu+2k+\frac{5}{2}\Big)\Big(\nu+2k+\frac{3}{2}\Big)\Big]\\ R_1\sin\theta_1&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2x)^{2k}}\frac{1}{(2k)!}\frac{\Gamma(\nu+2k+{}^1/_2)}{\Gamma(\nu-2k+{}^1/_2)}\Big[a_1-\frac{b_1}{2(2k+1)}\times\\ &\qquad\times\Big(\nu+2k+\frac{3}{2}\Big)\Big(\nu+2k+\frac{1}{2}\Big)\Big]\end{aligned}\tag{1.3}$$

а значения $R_2 \cos\theta_2$ и $R_2 \sin\theta_2$ получим из (1.3), заменив в них a_1 на a_2, b_1 на b_2, x на μx.

Внеся (1.1) и (1.2) в исходное уравнение (0.1), получим [3]

$$\sin[x(\mu-1)-\theta_2-\theta_1]=0, \quad \text{или} \quad x(\mu-1)-\theta_2+\theta_1=s\pi \tag{1.4}$$

Из (1.3) значения $\operatorname{tg}\theta_1$ и $\operatorname{tg}\theta_2$ можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\theta_1=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k+1}\frac{1}{(8x)^{2k+1}}, \qquad \operatorname{tg}\theta_2=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}\frac{1}{(8\mu x)^{2k+1}} \tag{1.5}$$

Здесь [1]

$$A_1=8\frac{a_1}{b_1}-4\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right), \qquad A_3=-64\frac{\Gamma(\nu+{}^5/_2)}{\Gamma(\nu-{}^3/_2)}\left[\frac{a_1}{b_1}-\frac{1}{6}\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\nu+\frac{7}{2}\right)\right]-256\frac{\Gamma(\nu+{}^3/_2)}{\Gamma(\nu-{}^1/_2)}\left[\frac{a_1}{b_1}-\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{a_1}{b_1}-\frac{1}{4}\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$A_5=\frac{256}{3}\frac{\Gamma(\nu+{}^9/_2)}{\Gamma(\nu-{}^7/_2)}\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^9/_2)(\nu+{}^{11}/_2)}{10}\right)+$$

$$+2048\frac{\Gamma(\nu+{}^3/_2)\Gamma(\nu+{}^5/_2)}{\Gamma(\nu-{}^1/_2)\Gamma(\nu-{}^3/_2)}\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^3/_2)(\nu+{}^5/_2)}{4}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^5/_2)(\nu+{}^7/_2)}{6}\right)+$$

$$+\frac{2048}{3}\frac{\Gamma(\nu+{}^7/_2)}{\Gamma(\nu-{}^5/_2)}\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^1/_2)(\nu+{}^3/_2)}{2}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^7/_2)(\nu+{}^9/_2)}{8}\right)+$$

$$+8192\left[\frac{\Gamma(\nu+{}^3/_2)}{\Gamma(\nu-{}^1/_2)}\right]^2\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^1/_2)(\nu+{}^3/_2)}{2}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{(\nu+{}^3/_2)(\nu+{}^5/_2)}{4}\right)^2$$

. . . .

Значения B_j получим, если в выражениях для A_j заменим a_1 / b_1 на a_2 / b_2. Имея значения $\operatorname{tg}\theta_1$ и $\operatorname{tg}\theta_2$ углы θ_1 и θ_2 определим по формулам

$$\theta_j=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}(\operatorname{tg}\theta_j)^{2k+1}$$

или

$$\theta_1=A_1\frac{1}{8x}+\left(A_3-\frac{A_1^3}{3}\right)\frac{1}{(8x)^3}+\left(A_5-A_1^2A_3+\frac{A_1^5}{5}\right)\frac{1}{(8x)^5}+\cdots$$

$$\theta_2=B_1\frac{1}{8\mu x}+\left(B_3-\frac{B_1^3}{3}\right)\frac{1}{(8\mu x)^3}+\left(B_5-B_1^2B_3+\frac{B_1^5}{5}\right)\frac{1}{(8\mu x)^5}+\cdots \tag{1.6}$$

Внеся (1.6) в (1.4), получим

$$x=\frac{s\pi}{\mu-1}+\frac{B_1-\mu A_1}{8\mu(\mu-1)}\frac{1}{x}+\frac{3B_3-B_1^3-\mu^3(3A_3-A_1^3)}{3(8\mu)^3(\mu-1)}\frac{1}{x^3}+$$

$$+\frac{5B_5-5B_1^2B_3+B_1^5-\mu^5(5A_5-5A_1^2A_3+A_1^5)}{5(8\mu)^5(\mu-1)}\frac{1}{x^5}+\cdots$$

обращение которого с помощью ряда Лагранжа [8] даст окончательные значения корней x_s исходного уравнения (0.1)

$$x_s=\frac{s\pi}{\mu-1}+\frac{B_1-\mu A_1}{8\mu\pi s}+\frac{\mu-1}{3(8\mu\pi s)^3}[(\mu-1)(3B_3-B_1^3-3\mu^3A_3+A_1^3\mu^3)- \tag{1.7}$$

$$-24\mu(B_1-\mu A_1)^2]+\frac{(\mu-1)^2}{15(8\mu\pi s)^5}[3(\mu-1)^2(5B_5-5B_1^2B_3+B_1^5-5\mu^5A_5+5\mu^5A_1^2A_3-$$

$$-\mu^5A_1^5)-160\mu(\mu-1)(B_1-\mu A_1)(3B_3-B_1^3-3\mu^3A_3+A_1^3\mu^3)+1920\mu^2(B_1-\mu A_1)^3]+\cdots$$

---

[1] Получение общего выражения для A_{2k+1} не представилось возможным. Приводятся значения только первых трех коэффициентов A_1, A_3, A_5. Определение из (1.3) значения каждого последующего коэффициента не представляет принципиальных трудностей, однако сопряжено с чрезмерно громоздкими вычислениями.

Опустив аналогичные выкладки, заметим, что при $b_1 = b_2 = 0$ в (1.7) следует принять $A_{2k+1} = B_{2k+1} = C_{2k+1}$, где

$$C_1 = -4(\nu - {}^1/_2)(\nu + {}^1/_2), \qquad C_3 = \frac{32}{3}\frac{\Gamma(\nu + {}^7/_2)}{\Gamma(\nu - {}^5/_2)} - 32(\nu - {}^1/_2)(\nu + {}^1/_2)\frac{\Gamma(\nu + {}^5/_2)}{\Gamma(\nu - {}^3/_2)},$$

$$C_5 = -\frac{128}{15}\frac{\Gamma(\nu + {}^{11}/_2)}{\Gamma(\nu - {}^9/_2)} + \frac{128}{3}(\nu - {}^1/_2)(\nu + {}^1/_2)\frac{\Gamma(\nu + {}^9/_2)}{\Gamma(\nu - {}^7/_2)} +$$
$$+ 256\frac{\Gamma(\nu + {}^5/_2)}{\Gamma(\nu - {}^3/_2)}\left[\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\nu + {}^7/_2)}{\Gamma(\nu - {}^5/_2)} - (\nu - {}^1/_2)(\nu + {}^1/_2)\frac{\Gamma(\nu + {}^5/_2)}{\Gamma(\nu - {}^3/_2)}\right]$$

. . . .

Заменив s в (1.7) на $s + {}^1/_2$ и коэффициенты A_{2k+1} или B_{2k+1} на C_{2k+1}, получим формулы для вычисления корней x_s исходного уравнения (0.1) соответственно для случаев $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ или $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$.

Отметим, что при некоторых значениях параметров формула (1.7) может оказаться непригодной для вычисления первых нескольких корней. В этих случаях первые корни должны определяться либо по готовым таблицам, либо решением конкретного уравнения числовым методом. Это обстоятельство не имеет значения при исследовании асимптотического поведения корней исходного уравнения (0.1).

2. В случае конечного значения ν из (1.7) следует, что корни x_s исходного уравнения (0.1) при s, стремящемся к бесконечности, стремятся к бесконечности по крайней мере столь же быстро, как ms, где $m \neq 0$.

Из (1.7) следует также, что при вещественных значениях параметров ν, a_1, a_2, b_1, b_2, μ исходное уравнение (0.1) имеет бесчисленное множество действительных корней.

Исследуем их поведение при беспредельном увеличении индекса ν.

Учитывая, что функция, стоящая в левой части исходного уравнения (0.1), является четной, не ограничивая общности результатов, рассмотрим только положительные корни ($x_s > 0$).

Известно [7], что при асимптотическом разложении бесселевых функций с большими индексами необходимо отдельно рассмотреть случаи, когда аргумент меньше индекса ($\mu x / \nu = q$, где $0 \leqslant q < 1$), больше индекса и равен индексу.

Бесселевы функции при больших значениях индекса (когда аргумент меньше индекса, но больше нуля) представим при помощи асимптотических формул [7]

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-\nu(\alpha - \operatorname{th}\alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu\operatorname{th}\alpha}}\left[1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{cth}\alpha - \frac{5}{24}\operatorname{cth}^3\alpha\right) + \cdots\right]$$
$$N_\nu(x) = \frac{\sqrt{2}e^{\nu(\alpha - \operatorname{th}\alpha)}}{\sqrt{\pi\nu\operatorname{th}\alpha}}\left[1 - \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{cth}\alpha - \frac{5}{24}\operatorname{cth}^3\alpha\right) + \cdots\right]$$
$$J_\nu(\mu x) = \frac{e^{-\nu(\beta - \operatorname{th}\beta)}}{\sqrt{2\pi\nu\operatorname{th}\beta}}\left[1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{cth}\beta - \frac{5}{24}\operatorname{cth}^3\beta\right) + \cdots\right]$$
$$N_\nu(\mu x) = \frac{\sqrt{2}e^{\nu(\beta - \operatorname{th}\beta)}}{\sqrt{\pi\nu\operatorname{th}\beta}}\left[1 - \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{8}\operatorname{cth}\beta - \frac{5}{24}\operatorname{cth}^3\beta\right) + \cdots\right]$$
$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{\nu}{x}, \qquad \operatorname{ch}\beta = \frac{\nu}{\mu x}$$

Для бесселевых функций с индексом $\nu + 1$ будем пользоваться обозначениями

$$\operatorname{ch}\alpha' = (\nu + 1) / x, \quad \operatorname{ch}\beta' = (\nu + 1) / \mu x.$$

Заметим, что рассмотрению подлежат только положительные значения α, β, α', β', при этом $\alpha - \beta > 0$, $\alpha' - \alpha > 0$, $\beta' - \beta > 0$.

Покажем, что исходное уравнение (0.1) не имеет корней $x_s > 0$, для которых q стремится к нулю при беспредельном возрастании индекса ν.

Для определенности примем, что ни один из коэффициентов уравнения (0.1) не равен нулю [1] ($a_1 \neq 0,\ b_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0$). Случаи, когда только один из этих коэффициентов равен нулю, принципиально не отличаются от рассматриваемого. Случаи же одновременного равенства нулю двух коэффициентов либо не имеют смысла (например, случаи $a_1 = b_1 = 0$ или $a_2 = b_2 = 0$), либо сводят рассматриваемое уравнение к уравнениям, исследованным в [3-6].

Пользуясь приведенными выше асимптотическими формулами для бесселевых функций, основное уравнение (0.1) представим в виде

$$\frac{a_1a_2}{\sqrt{\operatorname{th}\alpha\operatorname{th}\beta}}\{\exp[-\nu(\alpha-\beta+\alpha'-\beta-\operatorname{th}\alpha+\operatorname{th}\beta-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\beta)-(\alpha'-\operatorname{th}\alpha')]-$$
$$-\exp[-\nu(\alpha'-\alpha-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\alpha)-(\alpha'-\operatorname{th}\alpha')]\}-$$
$$-\frac{a_2b_1x\sqrt{\nu}}{\sqrt{(1+\nu)\operatorname{th}\alpha'\operatorname{th}\beta}}\{\exp[-2\nu(\alpha'-\beta-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\beta)-2(\alpha'-\operatorname{th}\alpha')]-1\}-$$
$$-\frac{a_1b_2\mu x\sqrt{\nu}}{\sqrt{(1+\nu)\operatorname{th}\alpha\operatorname{th}\beta'}}\{\exp[-\nu(\alpha-\beta'+\alpha'-\beta-\operatorname{th}\alpha+\operatorname{th}\beta'-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\beta)-$$
$$-(\alpha'-\beta'-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\beta')]-\exp[-\nu(\alpha'-\alpha+\beta'-\beta-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\alpha-$$
$$-\operatorname{th}\beta'+\operatorname{th}\beta)-(\alpha'+\beta'-\operatorname{th}\alpha'-\operatorname{th}\beta')]\}+\frac{b_1b_2\mu x^2\nu}{(1+\nu)\sqrt{\operatorname{th}\alpha'\operatorname{th}\beta'}}\{\exp[-\nu(3\alpha'-\beta'-$$
$$-2\beta-\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\beta'-2\operatorname{th}\alpha'+2\operatorname{th}\beta)-(3\alpha'-\beta'-3\operatorname{th}\alpha'+\operatorname{th}\beta')]-$$
$$-\exp[-\nu(\beta'-2\beta+\alpha'-\operatorname{th}\beta'-\operatorname{th}\alpha'+2\operatorname{th}\beta)-2(\alpha'-\operatorname{th}\alpha')]\}=0$$

Отсюда, учитывая предельные соотношения при $\nu\to\infty$ и $q\to 0$

$$\lim\alpha'=\lim\beta'=\infty,\qquad \lim(\alpha'-\beta')=\lim(\alpha'-\beta)=\ln\mu$$
$$\lim[\nu(\alpha'-\alpha)]=\lim[\nu(\beta'-\beta)]=1,$$
$$\lim\operatorname{th}\alpha=\lim\operatorname{th}\alpha'=\lim\operatorname{th}\beta=\lim\operatorname{th}\beta'=1$$
$$\lim[\nu(\alpha-\beta)]=\lim[\nu(\alpha-\beta')]=\infty$$

получим $a_2b_1x_s=0$, что противоречит исходным предположениям $a_2\neq 0$, $b_1\neq 0$, $x_s>0$. Полученное противоречие позволяет утверждать, что среди корней рассматриваемого уравнения (0.1) нет таких, для которых q стремился бы к нулю при беспредельном возрастании ν.

Таким образом, даже без рассмотрения остальных двух случаев (когда аргумент бесселевых функций больше индекса или равен индексу), можно считать доказанным утверждение о том, что при беспредельном возрастании ν ненулевые корни x_s исходного уравнения (0.1) возрастают по крайней мере столь же быстро, как $m\nu$, где $m\neq 0$.

Поступила 7 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Гостехиздат, 1952.
3. MahonMc. James. On the roots of the Bessel and certain related functions. Annals of Mathematics. 1894—1895, vol. 9, pp. 23—29.
4. Sasaki L. On the roots of the equation $\frac{Y_n(kr)}{J_n(kr)}-\frac{Y_n'(ka)}{J_n'(ka)}=0$. Tôhoku Math. J., 1914, vol. 5, pp. 45—47.
5. Carslaw. Conduction of heat. London, 1922.
6. Lipow M., Zwick S. A. On the roots of the cquation $Y_1(mx)[xJ_1(x)-BJ_0(x)]-J_1(mx)[xY_1(x)-BY_0(x)]=0$ J. Math. and Phys., 1955, vol. 34, pp. 308—315.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1949.
8. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., Гостехиздат, 1950.