А тогда из (3.8), в силу условия (L), следует, что $\eta^{\cdot} \in L_2[0, +\infty)$. Далее доказательство приводится дословно так же, как в теореме 3.1. Теорема 3.2 доказана.

Заметим, что для систем с конечным числом степеней свободы частотные условия, приведенные в теоремах 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, как известно [3], могут быть переведены на язык разрешающих уравнений А. И. Лурье. Эти частотные условия имеют простой геометрический смысл [3]: видоизмененная амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы должна быть заключена в некоторой полуплоскости.

Аналитическая проверка выполнения условий (2.2), (2.12), (3.7), как правило, сопряжена с большими трудностями, преодолимыми лишь в сравнительно простых случаях. В сложных случаях для проверки этих условий необходимо применять вычислительную технику.

Все полученные выше результаты переносятся на случай многих нелинейностей, но соответствующие частотные условия проверять трудно.

Поступила 26 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Изд. 2-е испр. и доп. М., Гостехиздат, 1962.
3. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Халанай А. Абсолютная устойчивость некоторых нелинейных регулируемых систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 3.
5. Халанай А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с запаздывающим аргументом. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 10.
6. Corduneanu C. Sur une equation integrale de la theorie du reglage Automatiqu. Compt. Rend. Acad. Sci (Paris), 1963, vol. 256, No. 17.
7. Гелиг А. Х. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 3.
8. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
9. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963.
10. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем, III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 5.
11. Брусин В. А. Достаточные условия абсолютной устойчивости для одного класса систем автоматического регулирования. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 2.
12. Брусин В. А. Об абсолютной устойчивости следящей системы с люфтом. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1964, т. 7, № 3.
13. Брусин В. А. Абсолютная устойчивость некоторых классов управляющих систем. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1965, т. 8, № 1.

ЗАДАЧА ШВАРЦШИЛЬДА ДЛЯ МЕТРИКИ С ЧИСТО ЕВКЛИДОВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ

О. Шаршекеев (Фрунзе)

При изучении движения среды часто приходится приводить вычисления в криволинейных координатах. Тогда метрика кривого пространства задается интервалом

$$- ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

где g_{ik} — компоненты метрического тензора.

В случае движений, обладающих центральной симметрией (используя возможные преобразования координат), обычный интервал записывают в виде [1] метрика

Шварцшильда)

$$-ds^2 = -e^{\nu}c^2dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (\nu = \nu(t, r),\ \lambda = \lambda(t, r))$$

Однако в ряде задач газовой динамики имеет смысл метрику задавать иначе, так, чтобы пространственная часть интервала была «евклидовой»

$$-ds^2 = -e^{\nu}c^2dt^2 + 2e^{1/2\mu}cdtdr + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (\mu = \mu(t, r))$$

При этом весьма просто исследуется движение газа в поле тяжести. Чисто пространственая метрика при этом будет все же кривой

$$dl^2 = (1 + e^{\mu-\nu})dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Таким образом, геодезические линии — траектории будут кривыми.

Указанную метрику можно получить непосредственно из метрики Шварцшильда, полагая $e^{\nu} = 1 - r_0/r$, $\lambda = -\nu$, и при помощи преобразования $cdt = cdt_1 + D(r)dr$. Таким образом, имеем

$$-ds^2 = -(1 - r_0/r)c^2dt^2 \pm 2(r_0/r)^{1/2}cdtdr + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1}$$

Здесь $r_0 = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус.

Эта метрика удобна для квантования в сильном поле Шварцшильда. Заметим, что найденная метрика, как и метрика Финкельштейна, особенности при $r = r_0$ не имеет. При $r_0 > r$ метрика (1) становится пространственно-подобной.

Рассмотрим движение пробной частицы в экваториальной плоскости ($\theta = 1/2\pi$) гравитирующего тела с метрикой (1). При помощи уравнения геодезической имеем

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{r_0}{2r^2}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \frac{r_0}{r^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\frac{cdt}{ds}\frac{dr}{ds} - \frac{r_0}{2r^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d^2(ct)}{ds^2} + \frac{r_0}{2r^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 + \frac{r_0}{r^2}\frac{cdt}{ds}\frac{dr}{ds} + \frac{r_0}{2r^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

Используя (1), из (2) получим известное уравнение орбиты частицы

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} + \xi = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{3GMp}{c^2}\xi^2\right) \tag{3}$$

Это уравнение имеет решение [2]

$$\xi = \frac{1}{p}\{1 + (3 + e^2)A + e^2A\sin^2\varphi + e\cos[\varphi(1 - 3A)]\} \qquad \left(\xi = \frac{1}{r},\ A = \frac{GM}{pc^2}\right)$$

Здесь p — параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты. Отметим, что выражения

$$\frac{d\varphi}{ds} = (A)^{1/2}\frac{p}{r^2}, \qquad \frac{dr}{ds} = -(A)^{1/2}\{Ae^2\sin 2\varphi - e(1 - 3A)\sin[\varphi(1 - 3A)]\}$$

$$\frac{cdt}{ds} = \frac{eA\sqrt{2(1 + e\cos[\varphi(1 - 3A)]\}}\sin[\varphi(1 - 3A)] \pm \sqrt{A(e^2 - 1) + 1}}{1 - 2A\{1 + e\cos[\varphi(1 - 3A)]\}}$$

дают величину для отличных от нуля компоненты 4-скорости частицы.

При этом очевидно, что время нигде не имеет особенностей, что существенно при анализе движения частицы в поле Шварцшильда.

В заключение автор приносит благодарность К. П. Станюковичу за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Поступило 30 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1962.
2. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. Изд-во Наука, 1965.