ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

А. Х. Гелиг

(Ленинград)

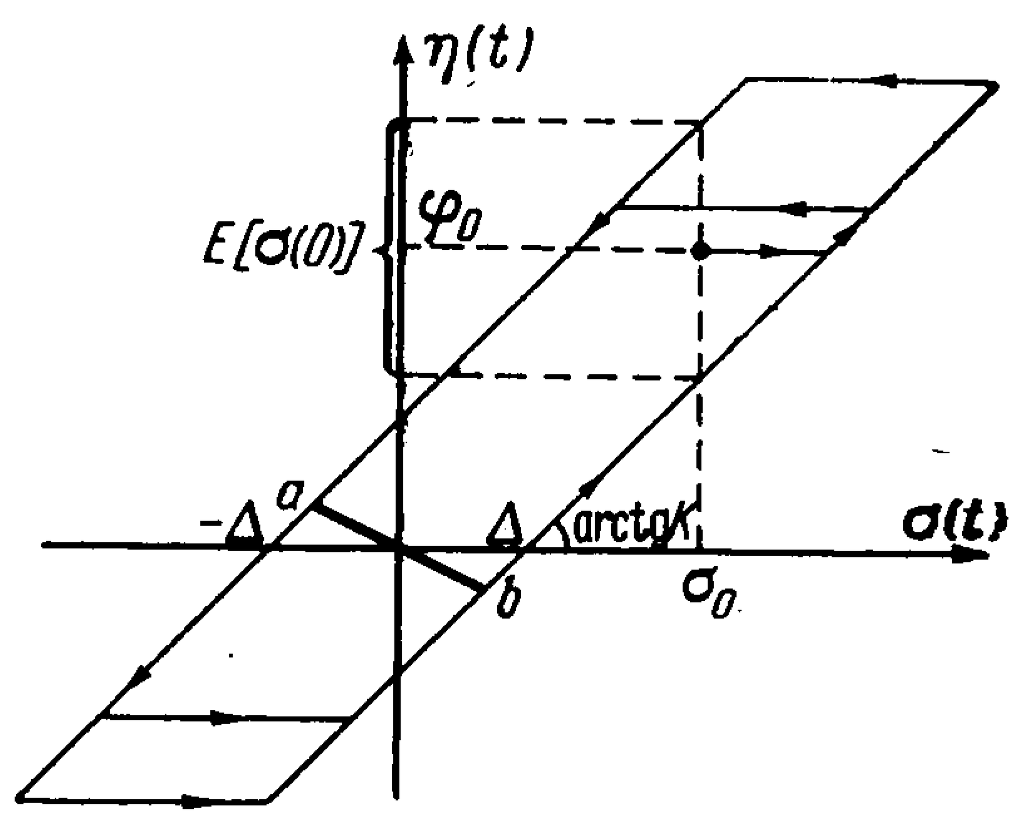
Рассматриваются регулируемые системы с бесконечным числом степеней свободы и одной нелинейностью, являющейся оператором определенного класса. Для некритического случая, а также критического случая одного нулевого корня получены достаточные условия устойчивости в частотной форме.

1. Если проблема абсолютной устойчивости нелинейных систем регулирования с конечным числом степеней свободы (систем с сосредоточенными параметрами) отражена в ряде монографий [1–3], то аналогичному вопросу для систем с бесконечным числом степеней свободы (систем с распределенными параметрами) посвящено лишь несколько статей [4–7]. В настоящей работе, как и в [6,7], предполагается, что система содержит лишь одну нелинейность и математическое описание системы сведено к уравнению

$$\sigma(t) = f(t) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

Здесь $\eta(\tau)$ — сильно непрерывная гистерезисная функция [8], т. е. нелинейный оператор, который всякому $t > 0$, каждой непрерывной на $[0, t]$ функции $\sigma(\tau)$ и начальному значению $\varphi_0 \in E[\sigma(0)]$ ($E[\sigma(0)]$ — множество начальных значений гистерезисной функции) ставит в соответствие непрерывную на $[0, t]$ функцию

$$\eta(\tau) = \varphi[\sigma, \varphi_0]_\tau, \qquad \eta(0) = \varphi_0 \tag{1.2}$$



причем это соответствие непрерывно. Частным случаем такой гистерезисной функции является обычная непрерывная однозначная функция $\varphi(\sigma)$, причем в этом случае $E[\sigma(0)] \equiv \varphi[\sigma(0)]$. В уравнении (1.1) функция $f(t)$ не зависит от η и описывает собственные колебания линейной части системы.

Преобразование Лапласа ядра

$$\gamma(t), \qquad \chi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\gamma(t)\,dt$$

принято называть передаточной функцией линейной части системы, а $\chi(i\omega)$ — ее частотной характеристикой.

В работе [6] изучалась абсолютная устойчивость единственного положения равновесия системы, описываемой уравнением (1.1), в критическом случае — одного нулевого корня (функция $\chi(p)$ имеет в нуле полюс первого порядка), причем предполагалось, что φ — однозначная непрерывная функция σ, удовлетворяющая при $k = +\infty$ условию

$$0 < \varphi / \sigma < k \leqslant +\infty \tag{1.3}$$

В статье [7] аналогичный вопрос рассматривался для некритического случая в предположении, что φ — сильно непрерывная гистерезисная функция, удовлетворяющая условию (1.3).

Однако имеются гистерезисные функции, которые не удовлетворяют условию (1.3), причем система с такой нелинейностью часто обладает неединственным положением равновесия. Типичным представителем такого рода нелинейности является люфт ([1], стр. 129) (фигура). В этой работе рассматривается вопрос об устойчивости множества состояний равновесия системы, описываемой уравнением (1.1), где нелинейность (1.2) принадлежит классу сильно непрерывных гистерезисных функций, преобразующих абсолютно непрерывную функцию $\sigma(\tau)$, производная которой $\sigma^{\cdot}(\tau)$, $\in L_2\,(0, t)$, и начальное значение φ_0 в абсолютно непрерывную функцию (1.2) с $\eta^{\cdot} \in L_2\,[0, t]$, причем почти для всех моментов времени выполнено условие

$$0 \leqslant \eta^{\cdot} / \sigma^{\cdot} \leqslant k \leqslant +\infty \qquad (1.4)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, а $\alpha \in L_r\,(0, t)$ означает, что сходится интеграл

$$\int_0^t |\alpha(\tau)|^r d\tau$$

Очевидно, люфт с образующей, наклоненной под углом $\operatorname{arc\,tg} K$ к оси абсцисс (фигура) удовлетворяет условию (1.4).

2. Изучим сначала некритический случай, т. е. случай, когда функции $f(t)$ и $\gamma(t)$ в уравнении (1.1) затухают при $t \to +\infty$. Для определения возможных состояний равновесия в (1.1) положим $\sigma(t) \equiv \sigma_\infty$, $\eta \equiv \varphi_\infty$, сделаем замену в интеграле $-\tau = \lambda$ и устремим $t \to +\infty$. Получаем уравнение

$$\sigma_\infty + \varphi_\infty \int_0^\infty \gamma(\lambda)\, d\lambda = 0 \qquad (2.1)$$

которому должно удовлетворять каждое равновесное состояние $(\sigma_\infty, \varphi_\infty)$. Действительные положения равновесия находятся как точки пересечения прямой (2.1) с графиком гистерезисной функции (отрезок ab на фигуре).

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

(1) справедливо неравенство (1.4),

(2) $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0, \qquad f^{\cdot}(t),\ \gamma(t),\ \int_t^\infty \gamma(\lambda)\, d\lambda \in L_2\,[0, +\infty), \qquad \gamma(t) \in L_1\,[0, +\infty)$$

(3) существует такое $\delta > 0$, что при всех вещественных ω выполнено частотное условие

$$K^{-1} + \operatorname{Re} \chi(i\omega) > \delta \qquad (2.2)$$

Тогда

$$\sigma(t) + \eta(t) \int_0^\infty \gamma(\lambda)\, d\lambda \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty$$

Лемма 2.1. Если $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ принадлежат $L_2\,[0, +\infty)$, то

$$\mu(t) + \int_0^t \alpha(t-\tau)\beta(\tau)\, d\tau \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty$$

Доказательство леммы 2.1. Разбивая интеграл на два (по промежуткам $[0, T]$ и $[T, t]$), и воспользовавшись неравенством Шварца, получим

$$|\mu(t)| \leqslant \left[\int_0^T \alpha^2(t-\tau)\, d\tau \int_0^T \beta^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} + \left[\int_T^t \alpha^2(t-\tau)\, d\tau \int_T^t \beta^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2}$$

Сделав замену $t - \tau = \lambda$ в первых интегралах, завысим оценку

$$|\mu(t)| \leqslant \left[\int_{t-T}^\infty \alpha^2(\lambda)\, d\lambda \int_0^\infty \beta^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} + \left[\int_0^\infty \alpha^2(\lambda)\, d\lambda \int_T^\infty \beta^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2}$$

Фиксируя T, при котором второе слагаемое меньше $0.5\,\varepsilon$ (ε — произвольное число), выберем такое $T_1 > T$, чтобы при $t > T_1 - T$ первое слагаемое было также меньше $0.5\,\varepsilon$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Сделав замену $t - \tau = \lambda$ переменной интегрирования в (1.1), получим в силу (1.2)

$$\sigma(t) = f(t) - \int_0^t \gamma(\lambda)\,\eta(t-\lambda)\,d\lambda$$

Продифференцировав по t и вернувшись к старой переменной интегрирования, найдем

$$\sigma^{\cdot}(t) = \psi(t) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\,\eta^{\cdot}(\tau)\,d\tau \qquad (\psi(t) = f^{\cdot}(t) - \gamma(t)\,\varphi_0) \tag{2.3}$$

Введем обозначения

$$\mu^*(t) = \begin{cases} \eta^{\cdot}(t) & (0 \leqslant t \leqslant T) \\ 0 & (t < 0,\ t > T) \end{cases} \qquad \left(\sigma_1(t) = \int_0^t \gamma(t-\tau)\,\mu^*(\tau)\,d\tau\right) \tag{2.4}$$

и рассмотрим функционал

$$r = \int_0^\infty \left(\sigma^{\cdot}\mu^* - \frac{\mu^{*2}}{k}\right) dt \tag{2.5}$$

Ввиду (2.3) производная $\sigma^{\cdot} = \psi - \sigma_1$ при $0 < t < T$. Поэтому

$$r = \int_0^T \psi\mu^*\,dt - \int_0^\infty \left(\sigma_1\mu^* + \frac{\mu^{*2}}{k}\right) dt \tag{2.6}$$

Последний интеграл в (2.6), в силу (2.4) равенства Парсеваля и теоремы о свертке [9], преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{Re} \chi(i\omega) + \frac{1}{k}\right) |\zeta(i\omega)|^2\,d\omega \tag{2.7}$$

где $\zeta(p)$ — преобразование Лапласа функции $\mu^*(t)$. В силу (2.2) и равенства Парсеваля, имеем

$$J \geqslant \delta \int_0^\infty \mu^{*2}\,dt \tag{2.8}$$

Из (1.4) и (2.6) вытекает неравенство

$$\left|\int_0^T \psi\mu^*\,dt\right| \leqslant \frac{2}{\delta} \int_0^\infty \psi^2\,dt + \frac{\delta}{2} \int_0^T |\eta^{\cdot}|^2\,dt \tag{2.9}$$

Из этого неравенства и неравенства $r \geqslant 0$ и соотношения (2.7), (2.8) вытекает

$$\int_0^T |\eta^{\cdot}|^2\,dt \leqslant C \qquad \left(C = \frac{4}{\delta^2} \int_0^\infty \psi^2\,dt\right) \tag{2.10}$$

Постоянная C в этой оценке не зависит от T. Следовательно,

$$\eta^{\cdot} \in L_2\,[0, +\infty)$$

Вернувшись к (1.1) и проинтегрировав по частям, найдем

$$\sigma(t) = f(t) - \int_0^t \eta(\tau) \frac{d}{d\tau} \int_{t-\tau}^\infty \gamma(\lambda)\,d\lambda = f(t) + \varphi_0 \int_t^\infty \gamma(\lambda)\,d\lambda -$$

$$- \eta(t) \int_0^\infty \gamma(\lambda)\,d\lambda + \int_0^t d\tau\,\eta^{\cdot}(\tau) \int_{t-\tau}^\infty \gamma(\lambda)\,d\lambda$$

Здесь в правой части первое, второе и четвертое слагаемые стремятся к нулю при $t \to +\infty$ в силу условия (2) теоремы 2.1 и леммы 2.1. Теорема 2.1 доказана.

Заметим, что для систем с конечным числом степеней свободы теорема 2.1 следует из результатов, полученных в [10].

Желая обобщить условие (2.2), сузим класс рассматриваемых систем. Рассмотрим следующие условия.

(M) Существует такая постоянная m_φ, что для любой $\sigma(t)$ из области определения нелинейного оператора $\eta(t)=\varphi\,[\sigma,\varphi_0]_t$ и любого $t>0$

$$|\eta(t)-k\sigma(t)|\leqslant m_\varphi \qquad (2.11)$$

(N) Если $|\sigma^{\cdot}(t)|$ ограничена равномерно по $t>0$, то функционал

$$\int_0^t \sigma^{\cdot\cdot}(\tau)\,\eta^{\cdot}(\tau)\,d\tau$$

также ограничен сверху равномерно по $t>0$.

(L) Если линеаризовать рассматриваемое нелинейное уравнение, положив переменную $\eta=k\sigma+\nu(t)$, где $\sup|\nu(t)|<\infty$, при $t>0$, то решение $\sigma(t)$ полученного линейного уравнения равномерно ограничено при $t>0$.

Для люфта с образующей, наклоненной под углом $\operatorname{arc\,tg} k$, условие (2.11), очевидно, выполнено. Легко проверить, что для такого люфта

$$\int_0^t \varphi^{\cdot}\sigma^{\cdot\cdot}\,d\tau\leqslant\frac{k}{2}\,\sigma^{\cdot 2}(t)$$

Поэтому условие (N) также выполнено.

Для систем с конечным числом степеней свободы выполнение требования (L) вытекает из условия (2.2) (как и следующего далее более общего условия (2.12)) в силу критерия Найквиста и очевидных оценок.

Теорема 2.2. Предположим, что:

(1) выполнены условия (1.4), а также условия (M), (N) и (L);

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0,\ f^{\cdot},\ f^{\cdot\cdot},\ \gamma,\ \gamma^{\cdot},\ \int\limits_t^\infty \gamma\,d\lambda\in L_2\,[0,+\infty),\ \gamma\in L_1\,[0,\infty),\ \sup\limits_{t>0}|f^{\cdot}|<+\infty$

(3) существуют такие $\delta>0$ и $\vartheta\geqslant 0$, что при всех вещественных ω выполнено частотное условие

$$\frac{1}{k}+\operatorname{Re}\,[(1-i\omega\vartheta)\,\chi(i\omega)]>\delta \qquad (2.12)$$

Тогда

$$\sigma(t)+\eta(t)\int_0^\infty\gamma(\lambda)\,d\lambda\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty$$

Доказательство. Введя функции (2.4), рассмотрим функционал

$$r=\int_0^\infty\left(\sigma^{\cdot}\mu^*-\frac{\mu^{*2}}{k}-\vartheta\sigma^{\cdot\cdot}\mu^*\right)dt \qquad (2.13)$$

Воспользовавшись уравнением (1.1), равенством Парсеваля и условиями (1.4) и (2.12), после несложных выкладок, аналогичных тем, которые были проведены при доказательстве теоремы 2.1, получим оценку

$$\frac{\delta}{2}\int_0^T\eta^{\cdot 2}\,dt\leqslant\frac{2}{\delta}\int_0^\infty(\psi-\vartheta\psi^{\cdot})^2\,dt+\vartheta\int_0^T\sigma^{\cdot\cdot}\eta^{\cdot}\,dt \qquad (2.14)$$

Сделав в уравнении (1.1) замену $\eta=k\sigma+\nu$ и воспользовавшись условиями (M) и (L), заключаем, что $|\sigma(t)|$, а следовательно в силу (2.11), и $|\eta(t)|$, равномерно ограничены при $t>0$. Продифференцировав уравнение (1.1), получим, что и $|\sigma^{\cdot}(t)|$ равномерно ограничена при $t>0$. А тогда из условия (N) следует, что второй интеграл в правой части (2.14) ограничен сверху равномерно по T. Следовательно, $\eta^{\cdot}\in L_2\,[0, +\infty)$. Далее доказательство завершается так же, как в теореме 2.1.

Заметим, что если функции $f(t)$ и $\gamma(t)$ вместе с производными, перечисленными в условиях (2) теорем 2.1 и 2.2 экспоненциально затухают при $t \to +\infty$ (для систем с конечным числом степеней свободы это всегда имеет место, если корни характеристического уравнения лежат в открытой левой полуплоскости), то условия (2) теорем 2.1 и 2.2 заведомо выполнены.

3. Рассмотрим теперь критический случай одного нулевого корня. Исследуемое уравнение имеет вид

$$\sigma(t) = f(t) + \varkappa - \int_0^t [\gamma(t-\tau) + \rho]\,\eta(\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

где $\varkappa$ и ρ — постоянные, $f(t)$ и $\gamma(t)$ — затухающие функции, а η — нелинейный оператор, описанный в начале статьи. После введения переменной

$$\xi(t) = \frac{\varkappa}{\rho} + \int_0^t \eta(\tau)\,d\tau$$

уравнение (3.1) перепишется в виде системы

$$\sigma(t) = f(t) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau - \rho\xi(t), \qquad \xi^{\cdot} = \eta \tag{3.2}$$

Для определения возможных положений равновесия системы (3.2) положим $f \equiv 0$, $\sigma(t) = \sigma_\infty$, $\eta(t) \equiv \varphi_\infty$, $\xi(t) \equiv \xi_\infty$. Из второго уравнения в (3.2) получаем $\varphi_\infty = 0$, а из первого — равенство $\sigma_\infty + \rho\xi_\infty = 0$.

В этой части работы будем предполагать, что имеются такие две непрерывные функции $\varphi_+(\sigma)$ и $\varphi_-(\sigma)$ и числа σ' и σ'', что при всех $t > 0$ (3.3)

$$\varphi_-[\sigma(t)] \leqslant \eta(t) \leqslant \varphi_+[\sigma(t)], \qquad \varphi_-(\sigma) > 0 \ \text{ при } \sigma > \sigma'', \qquad \varphi_+(\sigma) < 0 \ \text{ при } \sigma < \sigma'$$

Для люфта (фигура), очевидно, можно взять

$$\varphi_+(\sigma) = k(\sigma + \Delta), \quad \text{а} \quad \varphi_-(\sigma) = k(\sigma - \Delta)$$

Теорема 3.1. Пусть

(1) имеет место (1.4) и (3.3);

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} f = \lim\limits_{t\to+\infty} f^{\cdot} = \lim\limits_{t\to+\infty} \gamma = 0$, $\quad f^{\cdot}, \gamma \in L_2[0, +\infty)$, $\quad \gamma \in L_1[0, +\infty)$;

(3) $\rho > 0$ и существует такое $\delta > 0$, что при всех вещественных ω выполнено условие (2.2). Тогда

$$\lim \eta = \lim(\sigma + \rho\xi) = 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

Лемма 3.1. Если $\alpha(t)\in L_1\,[0, +\infty)$, а $\beta(t)$ ограничена равномерно по $t > 0$ и стремится к нулю при $t \to \infty$, то

$$\mu(t) = \int_0^t \alpha(t-\tau)\,\beta(\tau)\,d\tau \to 0 \qquad t \to +\infty.$$

Доказательство этой леммы легко проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 2.1.

Доказательство теоремы 3.1. Введя функции (2.4) и функционал (2.5), преобразуем последний, воспользовавшись равенством $\sigma^{\cdot} = \psi - \sigma_1 - \rho\xi^{\cdot}$, справедливым при $0 < t < T$ (см. доказательство теоремы 2.1)

$$r = \int_0^T \psi\mu^*\,dt - \rho\int_0^T \xi^{\cdot}\eta^{\cdot}\,dt - \int_0^\infty \left(\sigma_1\mu^* + \frac{\mu^{*2}}{k}\right)dt \tag{3.4}$$

Для первого интеграла в правой части (3.4) справедлива оценка (2.9). Второе слагаемое, в силу второго уравнения из (3.2), равно $0.5\rho\,(\varphi_0^2 - \eta^2(T))$. Последнее слагаемое, ввиду равенства Парсеваля и условия (2.2), оценивается сверху величиной

$$-\delta\int_0^T \eta^{\cdot 2}\,dt$$

Суммируя эти результаты и воспользовавшись (3.4) и условием (1.4), получим

$$\frac{\rho}{2}\eta^2(T)+\frac{\delta}{2}\int_0^T \eta^{\cdot 2}\,dt \leqslant \frac{\rho}{2}\varphi_0^2+\frac{2}{\delta}\int_0^\infty \psi^2\,dt$$

из которого следует, что $|\eta(t)|$ ограничено равномерно по $t>0$ и $\eta^{\cdot}\in L_2\,[0,+\infty)$.

Продифференцировав первое уравнение в (3.2) и воспользовавшись вторым уравнением, условием (2) теоремы 3.1 и леммой 2.1 получим

$$\lim_{t\to+\infty}(\sigma^{\cdot}+\rho\eta)=0 \tag{3.5}$$

Докажем, что $\lim\eta=0$ при $t\to+0$. В силу (3.5), по любому $\delta>0$ найдется такое $T>0$, что при всех $t>T$ для функции $\varepsilon(t)=\sigma^{\cdot}+\rho\eta$ справедлива оценка $|\varepsilon(t)|<0{,}5\delta$. Пусть $\rho\eta(T)>\delta$ (при $\rho\eta(T)<-\delta$ рассуждаем аналогично). Тогда $\sigma^{\cdot}=\varepsilon-\rho\eta<-0{,}5\,\delta$ при $t>T$ до тех пор, пока $\rho\eta>\delta$. Из (1.4) следует, что $\eta^{\cdot}\leqslant 0$, пока $\rho\eta>\delta$. Согласно (3.3), найдется такой момент $t_1>T$, что при $t=t_1$ выполнено неравенство

$$-\delta<\rho\eta(t)<\delta \tag{3.6}$$

Покажем, что если оценка (3.6) справедлива при $t=t_1>T$, то она будет иметь место и при всех $t>t_1$. Предположим, что $|\rho\eta(t_2)|>\delta$ в момент $t_2>t_1$, например, $\rho\eta(t_2)>\delta$. Следовательно, найдется такой момент $t_0\in(t_1,t_2)$, что $\rho\eta(t)>\delta$ при $t=t_0$, существуют производные $\sigma^{\cdot}$, $\eta^{\cdot}$ и $\eta^{\cdot}>0$. В силу (1.4), тогда и $\sigma^{\cdot}(t_0)>0$ и $\varepsilon(t_0)>\delta$, что противоречит выбору T. Итак, $\lim\eta=0$ при $t\to+\infty$.

Переходя к пределу при $t\to+\infty$ в первом уравнении в (3.2) и воспользовавшись леммой 3.1, завершим доказательство теоремы 3.1.

Заметим, что для систем с конечным числом степеней свободы результат, близкий к теореме 3.1, был получен в [11–13].

И в критическом случае можно обобщить условие (2.2). Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Предположим, что для рассматриваемого уравнения

(1) выполнены условия (1.4), (3.3), (M), (N) и (L).

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} f=\lim\limits_{t\to+\infty} f^{\cdot}=0,\quad f^{\cdot},\ f^{\cdot\cdot},\ \gamma,\ \gamma^{\cdot}\in L_2\,[0,+\infty),\qquad \gamma\in L_1\,[0,+\infty)$

(3) $\rho>0$ и существуют такие $\delta>0$ и $\vartheta\geqslant 0$, что при всех вещественных ω

$$1/K-\vartheta\rho+\operatorname{Re}\,[(1-i\omega\vartheta)\,\chi(i\omega)]>\delta \tag{3.7}$$

Тогда

$$\lim\eta=\lim\,(\sigma+\rho\xi)=0\qquad\text{при}\quad t\to+\infty$$

Доказательство. Введя функции (2.4), преобразуем функционал (2.13), воспользовавшись уравнениями (3.2). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 3.1, получим оценку

$$\frac{\rho}{2}\eta^2(T)+\frac{\delta}{2}\int_0^T\eta^{\cdot 2}\,dt\leqslant\frac{\rho}{2}\varphi_0^2+\frac{2}{\delta}\int_0^\infty(\psi-\vartheta\psi^{\cdot})^2\,dt+\vartheta\int_0^T\sigma^{\cdot\cdot}\eta^{\cdot}\,dt \tag{3.8}$$

Сделав в уравнении (3.1) замену $\eta=k\sigma+\nu$, согласно условиям (M), (L), получим, что $|\sigma(t)|$, а следовательно, и $|\eta(t)|$ равномерно ограничены при $t>0$. Продифференцировав первое уравнение в (3.2), убедимся, что и $|\sigma^{\cdot}(t)|$ равномерно ограничена.

А тогда из (3.8), в силу условия (L), следует, что $\eta^{\cdot} \in L_2[0, +\infty)$. Далее доказательство приводится дословно так же, как в теореме 3.1. Теорема 3.2 доказана.

Заметим, что для систем с конечным числом степеней свободы частотные условия, приведенные в теоремах 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, как известно [3], могут быть переведены на язык разрешающих уравнений А. И. Лурье. Эти частотные условия имеют простой геометрический смысл [3]: видоизмененная амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы должна быть заключена в некоторой полуплоскости.

Аналитическая проверка выполнения условий (2.2), (2.12), (3.7), как правило, сопряжена с большими трудностями, преодолимыми лишь в сравнительно простых случаях. В сложных случаях для проверки этих условий необходимо применять вычислительную технику.

Все полученные выше результаты переносятся на случай многих нелинейностей, но соответствующие частотные условия проверять трудно.

Поступила 26 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Изд. 2-е испр. и доп. М., Гостехиздат, 1962.
3. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Халанай А. Абсолютная устойчивость некоторых нелинейных регулируемых систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 3.
5. Халанай А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с запаздывающим аргументом. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 10.
6. Corduneanu C. Sur une equation integrale de la theorie du reglage Automatiqu. Compt. Rend. Acad. Sci (Paris), 1963, vol. 256, No. 17.
7. Гелиг А. Х. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 3.
8. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
9. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963.
10. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем, III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 5.
11. Брусин В. А. Достаточные условия абсолютной устойчивости для одного класса систем автоматического регулирования. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 2.
12. Брусин В. А. Об абсолютной устойчивости следящей системы с люфтом. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1964, т. 7, № 3.
13. Брусин В. А. Абсолютная устойчивость некоторых классов управляющих систем. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1965, т. 8, № 1.

ЗАДАЧА ШВАРЦШИЛЬДА ДЛЯ МЕТРИКИ С ЧИСТО ЕВКЛИДОВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ

О. Шаршекеев (Фрунзе)

При изучении движения среды часто приходится приводить вычисления в криволинейных координатах. Тогда метрика кривого пространства задается интервалом

$$-ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

где g_{ik} — компоненты метрического тензора.

В случае движений, обладающих центральной симметрией (используя возможные преобразования координат), обычный интервал записывают в виде [1] метрика